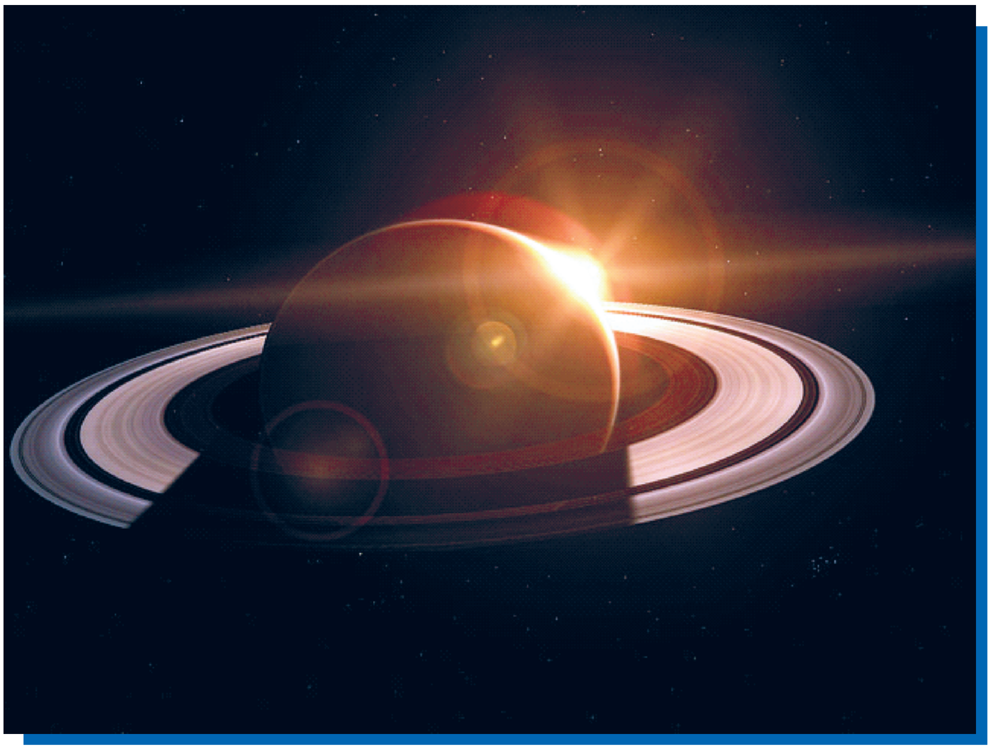
Guía 5

LA ELIPSE: ASÍ GIRAN LOS PLANETAS



Indicadores de logros

- ✓ Define la elipse y la representa gráficamente.
- ✓ Deduce y grafica, como lugares geométricos, las elipses dadas por:

$$\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}\ ;\ \left\{(x,y):\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\right\}$$

- ✓ Aplica los conceptos en situaciones de la vida real que involucran elipses.
- ✓ Comprende, interpreta, analiza y produce diferentes tipos de textos según sus necesidades (COMUNICACIÓN).
- ✓ Expresa con autonomía lo que quiere y lo que piensa en forma verbal y no verbal.
- ✓ Usa un lenguaje verbal y no verbal adecuado al medio.
- ✓ Demuestra respeto por los conceptos emitidos por los otros.
- ✓ Reconoce la diferencia entre procesos de información y comunicación.

Información y comunicación

Con mis compañeros de subgrupo, analizamos el siguiente texto y respondemos las preguntas que se plantean al final.

La comunicación es la competencia que le permite al individuo comprender e interpretar mensajes, lo mismo que manifestar lo que se siente y piensa en relación con algún tema o situación de carácter personal o grupal.

La construcción de la comunicación debe pasar por la adquisición de habilidades para **escuchar, hablar, leer y escribir.**

La comunicación puede ser verbal y no verbal. Una persona se puede comunicar con otra en forma oral, escrita o por señales o códigos.

Se entiende la INFORMACIÓN como parte de la cultura, es decir, el conjunto de conocimientos, comportamientos, rituales y signos propios de los órdenes comunicativo, religioso, ideológico, ético y otros similares que caracterizan una sociedad.

En el mundo actual es cada vez mayor el flujo de INFORMACIÓN, de allí la necesidad de establecer nuevos canales de COMUNICACIÓN y aprendizaje que faciliten el acceso a la información disponible.

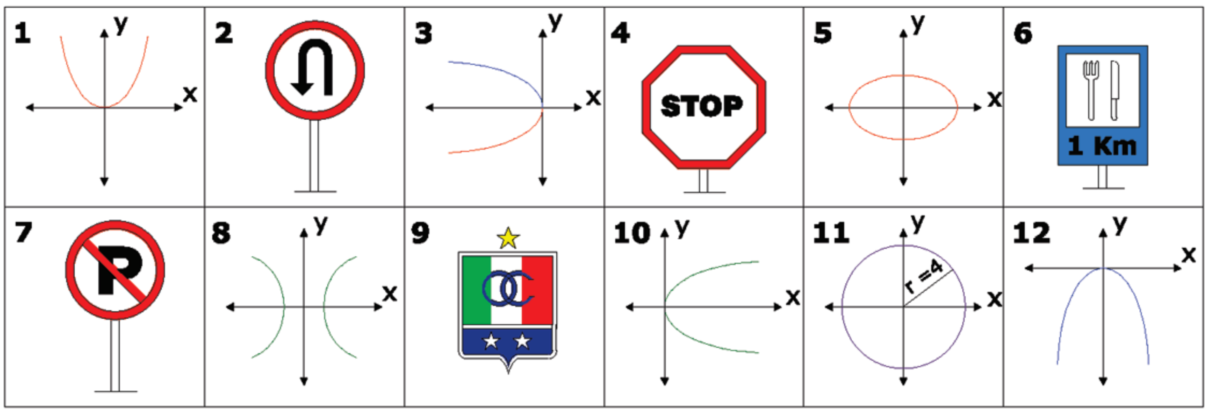
Con mis compañeros de subgrupo, respondemos:

1. ¿Qué diferencia hay entre procesos de información y comunicación?
2. ¿Qué canales de comunicación nos dan acceso a la información?

LA ELIPSE Y LA HIPÉRBOLA

Los símbolos y gráficos son recursos empleados en la comunicación. Con un compañero de grupo, interpreto los símbolos y resuelvo el ejercicio que se propone a continuación.

1. Tomo del CRA un juego de PIÉNSALO y resuelvo el siguiente ejercicio.



A HIPÉRBOLA	B PROHIBIDO PARQUEAR	C ELIPSE	D $x^2 + y^2 = 16$	E PARE	F $y^2 = 4ax$
G RESTAURANTE	H $x^2 = 4ay$	I $y^2 = -4ax$	J ONCE CALDAS	K $x^2 = -4ay$	L PERMITIDO GIRAR EN U

2. Tomo del CRA, el ejercicio No. 6 para practicar el Lenguaje de los Sordomudos con el juego PIÉNSALO.

Presento los ejercicios al profesor para su revisión y evaluación.

LA ELIPSE

El lenguaje de los símbolos se hace más importante en el estudio de las Matemáticas y la **exactitud** en su escritura, es fundamental para representar el concepto que se está definiendo.

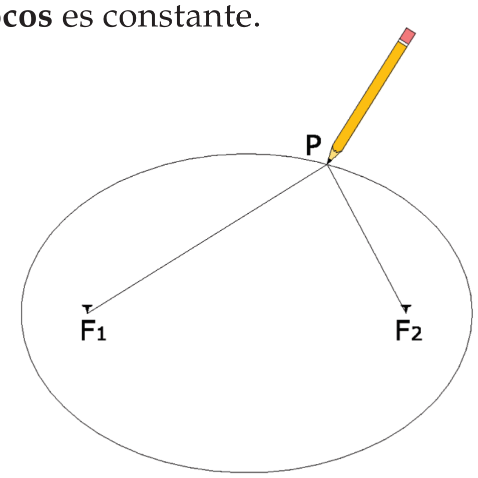
Analizo e interpreto con mis compañeros de subgrupo, la definición de elipse, la deducción de su relación matemática y sus gráficas. Después de una puesta en común en presencia del profesor, consignamos lo fundamental en el cuaderno.

ELIPSE

La **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

La definición nos da una manera sencilla para construir la elipse con una cuerda:

En los puntos fijos se ata una cuerda de longitud dada y constante. Se tensiona la cuerda, con la punta afilada de un lápiz, en P y manteniéndola siempre tensa se deja deslizar el lápiz.



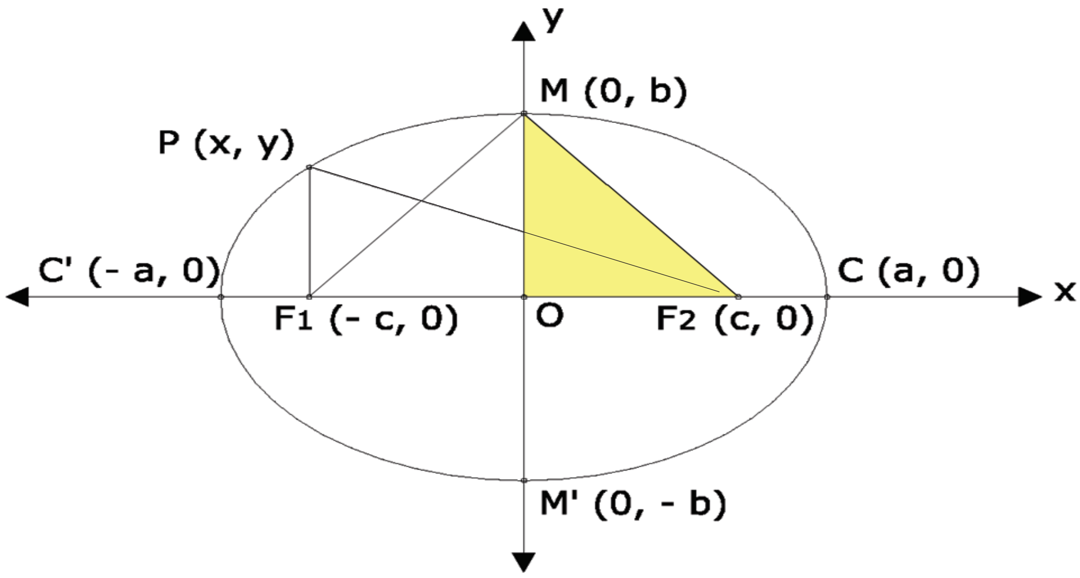
La figura dibujada es una elipse porque $PF_1 + PF_2$ = longitud de la cuerda, que es constante cualquiera sea la posición de P.

Por comodidad, tomemos dos puntos fijos (focos) sobre el eje X de tal manera que estén a la misma distancia (c) del origen.

Sean F_1 (- c, 0) y F_2 (c, 0) los focos. Si P (x, y) es un punto variable que recorre la elipse, entonces:

ELIPSE = {P (x, y): $PF_1 + PF_2$ = constante}

ELIPSE = {P (x, y): $PF_1 + PF_2 = 2a$}   (1)



El punto M pertenece a la mediatriz del segmento F_1F_2 y por lo tanto, $MF_1 = MF_2$.

El punto M está sobre la elipse, entonces la suma de las distancias a los focos es constante e igual a 2a:

$MF_1 + MF_2 = 2a$
$2\ MF_2 = 2a$
$\mathbf{MF_2 = a}$; así mismo $\mathbf{MF_1 = a}$
De la gráfica $OM = b$; $OF_1 = OF_2 = c$.

El triángulo MOF_2 es un triángulo rectángulo con hipotenusa $MF_2 = a$ y catetos $OM = b$ y $OF_2 = c$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad (2)$$

Aplicamos la fórmula de la distancia a las longitudes PF_1 y PF_2:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad (3)$$

$$PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (4)$$

Reemplazando las igualdades (3) y (4) en (1)

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\}$$

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros con el fin de destruir uno de los radicales:

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 2\,(2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}) + (x-c)^2 + y^2 \}$

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \}$

Simplificando:

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \}$

Dividiendo por 4 los dos miembros:

ELIPSE = $\{ (x,y): \; cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \}$

Elevando al cuadrado nuevamente:

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2 (x-c)^2 + a^2 y^2 \}$

Simplificando, transponiendo términos y cambiando signos:

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \}$

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad c^2x^2 - a^2 x^2 + a^4 - a^2c^2 = a^2 y^2 \}$

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad -a^2x^2 + c^2x^2 - a^2 y^2 = -a^4 + a^2c^2 \}$

ELIPSE = $\{ (x,y): \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2c^2 \}$

Factorizando:

ELIPSE = $\{ (x,y): \; x^2 (a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2) \}$

Dividiendo por $a^2 (a^2 - c^2)$:

$$\text{ELIPSE} = \left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \right\}$$

Pero de la ecuación (2): $a^2 - c^2 = b^2$

Finalmente la ecuación se convierte en:

$$\text{ECUACIÓN DE LA ELIPSE} = \left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

La distancia **OM = b** se llama **semieje menor** de la elipse, la distancia **OC = a** se llama **semieje mayor**. Los extremos del eje mayor se llaman **vértices** de la elipse y el origen **centro** de la misma.

Si **a = b**, la ecuación de la elipse se convierte en la ecuación de una circunferencia de radio "a". En efecto:

$$\left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \right\} \Leftrightarrow \quad \{ (x,y): x^2 + y^2 = a^2 \}$$

Si hemos entendido todo hasta aquí, quiere decir que la **comunicación** ha sido excelente: los símbolos han sido bien interpretados, el lenguaje verbal de mis compañeros y de mi Profesor ha sido claro, adecuado y convincente.

Muchas veces, con el objetivo de retar la mente, nos hemos enfrentado a preguntas de difícil interpretación. Tratemos de resolver algunas, para destacar la importancia de una buena **comunicación:**

1. ¿Cómo puede usted tener $700 con dos monedas, si una de las monedas no es de $200?

2. Una cámara con su estuche cuesta US110, si la cámara vale US100 más que el estuche, ¿Cuánto vale el estuche?

3. Si en una escuela se demoran 2 minutos en izar una bandera. ¿Cuánto tiempo se demorarán en izar la bandera a media asta?

4. ¿Por qué un colombiano que vive en Estados Unidos no puede ser enterrado en Colombia?

Comparto mis respuestas con el profesor para verificarlas.

Con mis compañeros de subgrupo, analizo los siguientes ejemplos y resuelvo los ejercicios propuestos:

EJEMPLO 1: Encuentro la ecuación de una elipse que tiene sus focos en F_1 (- 3, 0) y F_2 (3, 0) y cuyo semieje menor tiene una longitud de tres unidades.

$$\text{ELIPSE} = \left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \qquad \begin{matrix} a=? \\ b=3 \\ c=3 \end{matrix}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$; $a^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

Por lo tanto, $\text{ELIPSE} = \left\{ (x,y): \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$ que es la ecuación pedida.

EJEMPLO 2. Dada la ecuación de la elipse $\{(x, y): 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ encuentro el valor de los semiejes y la localización de los focos.

$4x^2 + 9y^2 = 36$

Divido cada término por 36:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Comparando con la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Semieje mayor = a = 3; semieje menor = b = 2.

Aplicando la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$, puedo encontrar el valor de **c**.

$c^2 = a^2 - b^2$
$c^2 = 9 - 4$
$c = \pm\sqrt{5}$

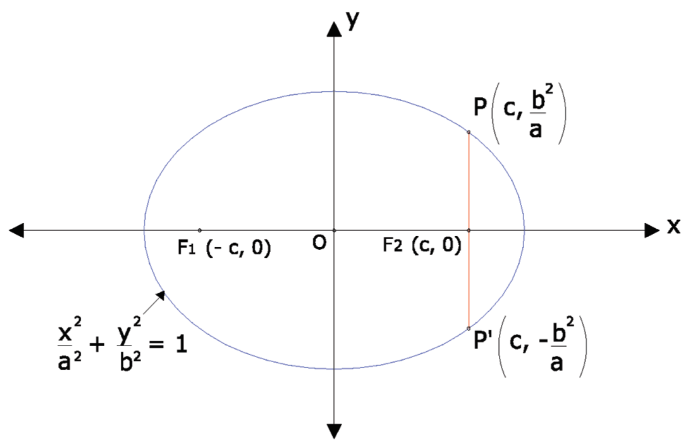
Los focos están situados en $F_1 (-\sqrt{5}, 0)$ y $F_2 (\sqrt{5}, 0)$.

EJEMPLO 3. Encuentro la longitud de LATUS RECTUM de una elipse. El LATUS RECTUM de una elipse es el segmento perpendicular al eje mayor que pasa por uno de los focos y une dos puntos de una elipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ (Ecuación de la elipse)

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

El punto P (c, y) está sobre la elipse, luego, al hacer x = c, se tiene



$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}$$; pero $a^2 - c^2 = b^2$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{b^2\cdot b^2}{a^2}$$

$y=\pm\frac{b^2}{a}$, por lo tanto los puntos P $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ y P′ $\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$ son los puntos de la elipse que están unidos al LATUS RECTUM.

Para encontrar la longitud del LATUS RECTUM (PP′), basta sumar las ordenadas de P y P′, pero tomando positiva la ordenada de P′.

$$\boxed{PP'=\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{a}=\frac{2b^2}{a}}$$ que es la longitud del LATUS RECTUM.

EJEMPLO 4. Encuentro la longitud del LATUS RECTUM y hago la gráfica de la elipse $\{(x, y): 9x^2 + 16y^2 = 144\}$.

Divido los dos miembros de la ecuación por 144

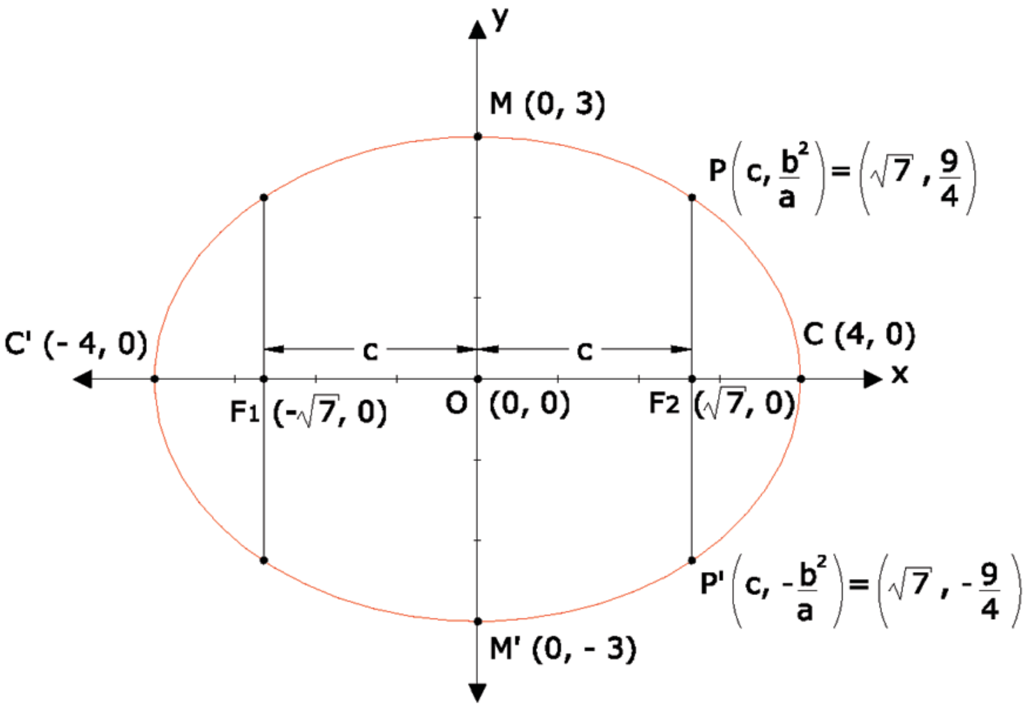
$$\frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

Comparando esta última con la ecuación : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

a = 4 y b = 3.

LATUS RECTUM $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$



El valor de **c**, se encuentra aplicando la fórmula $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$: $c^2 = a^2 - b^2$.

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\pm\sqrt{7}$

En la gráfica se puede verificar que el Eje mayor = 2a = 8 cm., el eje menor igual a 2b = 6 cm. y la distancia entre los dos focos $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{7} \approx 5.3$ cm. Además la distancia $MF_2 = MF_1 = a = 4$cm. y los **vértices** de la elipse son los puntos (- 4, 0) y (4, 0).

EJEMPLO 5. Encuentro los focos y dibujo la elipse: $\left\{(x, y): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\right\}$

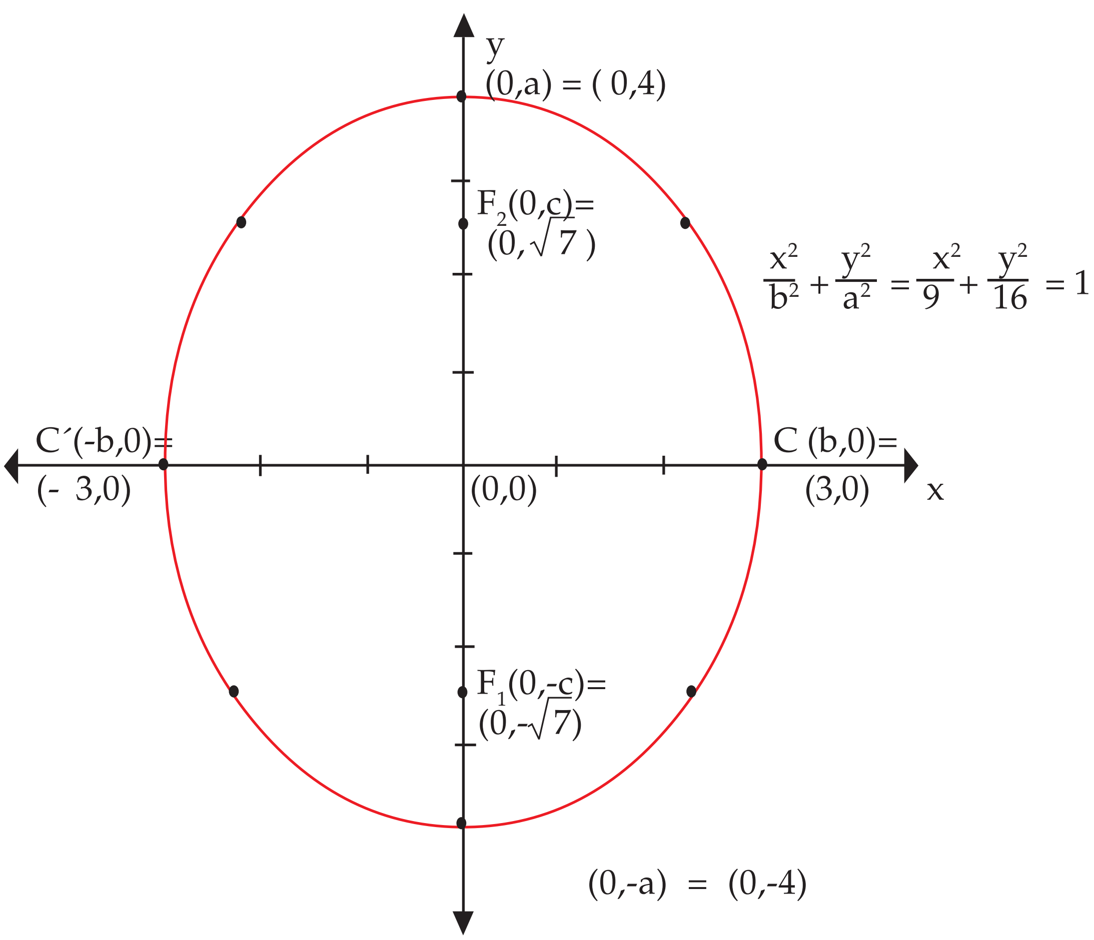
La ecuación $\left\{(x, y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ tiene semieje mayor = a, por lo tanto a > b y los focos están situados en el eje X. Si el denominador de x^2 es menor que el de y^2, entonces la ecuación de la elipse tiene la forma $\left\{(x, y): \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right\}$ **y los focos están situados en el eje Y.**

Comparando esta última fórmula con la ecuación dada:

$\left\{(x, y): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\right\}$ se tiene que **b = 3 y a = 4**

Para hallar los focos, aplico la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$:

$c^2 = a^2 - b^2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \pm\sqrt{7}$



EJERCICIOS.

Para resolver los siguientes ejercicios es muy importante la **comunicación escrita**, pues si una letra cambia de posición en la fórmula, su gráfica también cambia.

1. Con uno o dos compañeros, encuentre las longitudes de los semiejes, la localización de los focos de las siguientes elipses y dibújelas. Manejemos con respeto los conceptos de los compañeros.

   a. $\{(x, y): x^2 + 2y^2 = 1\}$
   b. $\{(x, y): 16x^2 + 25y^2 = 400\}$
   c. $\{(x, y): 9x^2 + y^2 = 9\}$

2. Encuentre la ecuación de la elipse:

   a. Si los focos están en (- 2, 0) y (2, 0) y el semieje mayor vale 3.
   b. Si los focos están en (0, 1) y (0, - 1) y el semieje menor vale 2.
   c. Que tiene por semieje mayor 5 y semieje menor 2, los focos sobre el eje X y centro en el origen.

3. Encuentre los puntos donde se corta la elipse $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ con la recta $\{(x, y): y = x\}$.

4. Encuentre el LATUS RECTUM de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

5. Encuentre los puntos de intersección de la elipse $\{(x, y): x^2 + 4y^2 = 1\}$

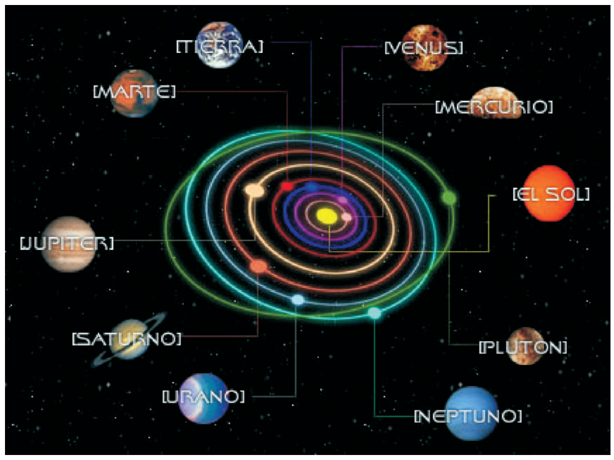
   a. con el eje X.
   b. con el eje Y.

Compartimos las soluciones con nuestro profesor.

D ¿QUÉ APLICACIONES TIENEN LAS ELIPSES?

Las experiencias comunicativas estimulan el crecimiento personal y mejoran la autoestima. Para tal efecto preparo las siguientes actividades:

1. Consulto las investigaciones de Kepler, especialmente su Primera Ley: "Los planetas en su movimiento describen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos está situado el Sol".

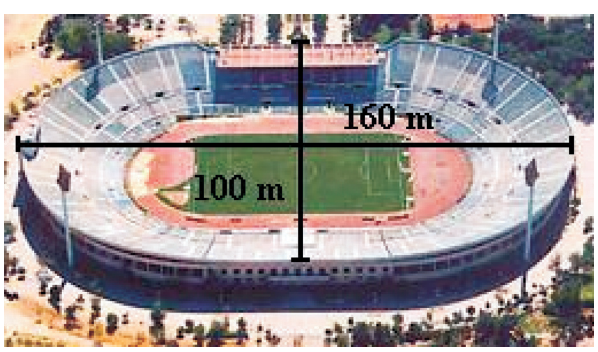


2. Preparo una exposición para participar en las actividades de conjunto, cuando me corresponda.

3. Coloque dos clavos en puntos F_1 y F_2 sobre una tabla. Tome una cuerda de 20 cm. de longitud con ojales en los extremos, que colocará en cada uno de los dos clavos. Dibuje una elipse como se explicó al principio de esta guía.

4. Coloque los clavos del ejercicio 3 sobre una línea recta y muévalos sobre la misma separándolos o acercándolos para obtener distintas elipses.

   a. ¿Qué pasa a las elipses a medida que se acercan los clavos?
   b. ¿Qué pasa si se juntan los dos clavos?
   c. ¿Qué pasa si se alejan tanto como la longitud de la cuerda?



5. Halle el área de un terreno elíptico, donde se va a a construir un estadio, si el semieje mayor mide 160 m. y el semieje menor 100 m.

   ($A = \pi ab$)

Discutimos las respuestas con el profesor.

¿DESEA AMPLIAR SUS CONOCIMIENTOS?

La comunicación se evidencia en la escuela con el manejo de los materiales de autoaprendizaje, que generan espacios para compartir ideas y concretar conceptos.

1. Consulte en la Biblioteca las investigaciones de Copérnico, quien escribió su famosa obra **De revolutionibus Orbium Coelestium**, relacionadas con la teoría heliocéntrica.

2. Consulte el concepto "excentricidad" relacionado con la elipse.

3. Visite la Sala Virtual y consulte:

   a. Elipsoide.
   b. Coordenadas Elípticas

4. Visite la Sala Virtual, utilice el CD " Páginas Web de Matemáticas" y siga las siguientes instrucciones:

   - Descartes
   - Unidades Didácticas
   - Segundo Ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria
   - 4° de ESO Opción B
   - Las Cónicas como lugares geométricos. Trazado
   - ÍNDICE
   - 1. Elipse
   - Siga las instrucciones y verifique los conceptos vistos en esta guía.

Unifico conceptos con mis compañeros y presentamos un informe concreto al Profesor.

LA COMUNICACIÓN PERMITE ALCANZAR CON MÁS FACILIDAD LOS LOGROS PROPUESTOS TANTO A NIVEL INDIVIDUAL COMO ORGANIZACIONAL.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA