

# Guía 4

## LO MARAVILLOSO DE LAS PARÁBOLAS



GATEWAY ARCH (MISSOURI)

### Indicadores de logros

- ✓ Define la parábola, sus elementos y los representa gráficamente.
- ✓ Deduce y grafica, como lugares geométricos, las parábolas dadas por:  
 $\{(x, y): x^2 = 4ay\}$  ;  $\{(x, y): y^2 = 4ax\}$
- ✓ Aplica los conceptos que involucran parábolas, a situaciones de la vida real.
- ✓ Toma decisiones basadas en principios y valores sociales y particulares  
**(COMPETENCIA AXIOLÓGICA)**.
- ✓ Cuida los bienes ajenos, públicos y del entorno.
- ✓ Actúa y se desempeña con autodisciplina, sin necesidad de supervisión, en el marco de la autonomía otorgada.
- ✓ Analiza y reflexiona sobre su comportamiento y el de los otros.
- ✓ Acepta a los otros sin importar sus condiciones socioculturales.
- ✓ Respeta los acuerdos consensuados.

## Principios y valores sociales

Con mis compañeros de subgrupo, leemos y analizamos el siguiente párrafo.

Ya tenemos conocimiento acerca de la competencia AXIOLÓGICA, la cual fue trabajada en la Unidad 2, Guía 2.

Un indicador de esta competencia es tomar decisiones basadas en principios y valores sociales y particulares.

Los principios y valores sociales nacen en la familia; los padres inculcan en sus hijos las primeras normas morales de convivencia, que después se complementan en la escuela. El cumplimiento o incumplimiento de esas normas no tienen consecuencias físicas, ni económicas, ni legales. Es el individuo mismo, su propia apreciación y valoración como ser humano, quien se ve afectado o beneficiado, del mal o buen proceder moral.



Las estrategias de Escuela Nueva, me facilitan el desarrollo de principios morales y éticos. Respondo, con mis compañeros de subgrupo las siguientes preguntas.

- \* ¿Cuido mis pertenencias, las de mis compañeros y las de mi colegio?
- \* ¿Me comporto con autodisciplina, sin necesidad de supervisión?
- \* ¿Evito el fraude para obtener buenas notas en trabajos y evaluaciones?
- \* ¿Soy sincero en el buen trato con mis compañeros y profesores?
- \* ¿A mis padres, siempre les hablo con la verdad y respeto?

Analizamos las respuestas y nos fijamos unas metas de mejoramiento que compartimos con los demás subgrupos.

**“El verdadero bien se halla únicamente en la tranquilidad de la conciencia”**

**Séneca.**



## LO MARAVILLOSO DE LAS PARÁBOLAS

Si alguna vez he escrito sobre las guías, a sabiendas de que no lo debo hacer, es ésta la oportunidad de reflexionar y tomar conciencia que debo cuidar los bienes del colegio, que en el próximo año serán usados por otros estudiantes.

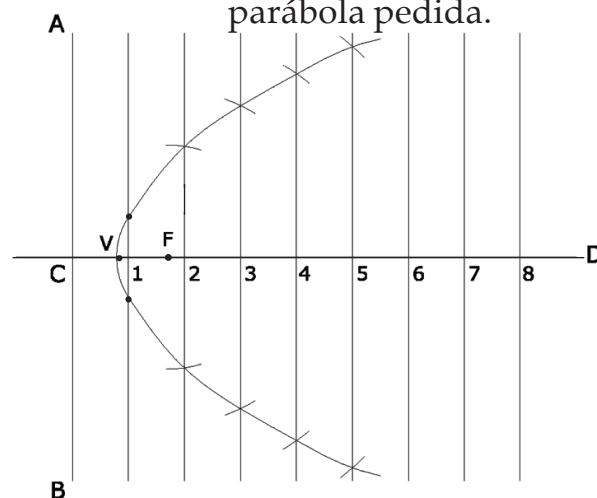


La parábola es una de las formas más utilizadas por el hombre para diseñar estructuras de puentes, túneles, arcos, portales; muchos ingenieros y arquitectos han hecho maravillosas obras inspirados en la **Parábola**.

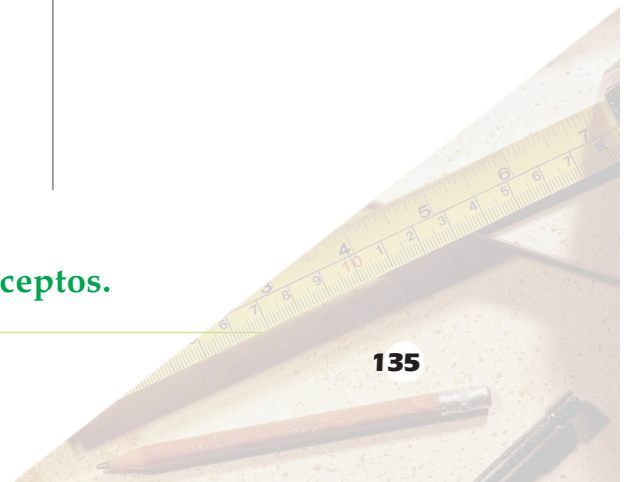
Para afianzar el concepto de **Parábola**, tomo lápiz, regla y compás y realizo el siguiente ejercicio.

Trazar la parábola de directriz AB y foco F.

Sobre el eje horizontal CD, perpendicular a la directriz AB, tomo una serie de puntos por los cuales trazo líneas paralelas a la directriz. Hago centro en F y con radios C1, C2, C3,... respectivamente corto las paralelas a lado y lado del eje principal. Uno los puntos a mano alzada obteniendo la parábola pedida.



**Presento la gráfica al profesor para afianzar conceptos.**



Visite la Sala Virtual, utilice el CD “PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS” y siga el siguiente derrotero:

- \* Saltar introducción
- \* Descartes
- \* Segundo ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria.
- \* Las cónicas como lugares geométricos. Trazado.
- \* ÍNDICE
- \* Parábola

Mueva el punto  $P$  y verifique que la distancia del *foco* a la *Parábola* sea igual a las distancias de la *Parábola* a la *directriz*.

¿Qué puedo concluir comparando los dos ejercicios realizados?

Comparto la conclusión con mis compañeros y el profesor.

¿Qué otro significado tiene la palabra PARÁBOLA?

Exploremos algunos ejemplos:

### La parábola de la oveja pérdida

*“No desprecien a ninguno de estos pequeños. Pues les digo que en el cielo los ángeles de ellos están siempre en presencia de mi Padre Celestial. ¿Qué les parece? Si un hombre tiene 100 ovejas y se le extravía una de ellas, ¿Acaso no dejará las otras noventa y nueve en el monte, para ir a buscar la oveja extraviada? Y si logra encontrarla, de seguro se alegrará más por esa oveja que por las noventa y nueve que no se extraviaron. Así también, el Padre de ustedes que está en el cielo no quiere que se pierda ninguno de esos pequeños”.* SAN MATEO 18.

### La parábola de la semilla de mostaza.

*También dijo Jesús, “¿A qué se parece el reino de Dios, o con qué podremos compararlo? Es como una semilla de mostaza que se siembra en la tierra. Es la más pequeña de todas las semillas del mundo, pero una vez sembrada, crece y se hace mayor que todas las plantas del huerto, con ramas tan grandes que hasta las aves pueden anidar bajo su sombra”.* SAN MARCOS 4, 5.

De esta manera les enseñaba Jesús el mensaje, por medio de muchas parábolas como las anteriores y hasta donde podían entender. Pero no les decía nada sin parábolas, aunque a sus discípulos se los explicaba todo aparte.

Desde el punto de vista AXIOLÓGICO, ¿qué enseñanza nos dejan estas parábolas?



## LA PARÁBOLA

Organicémonos por subgrupos para realizar el siguiente trabajo. Durante su desarrollo y al final del mismo, debemos evidenciar que fuimos capaces de trabajar con responsabilidad y autodisciplina.

Analizo con mis compañeros las siguientes definiciones, sus gráficas y sus relaciones matemáticas.

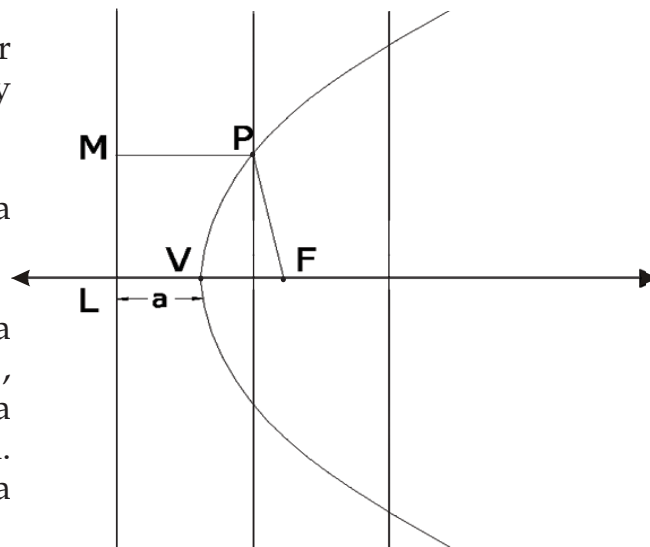
### PARÁBOLA

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo llamado **foco** y de una recta fija llamada **directriz**.

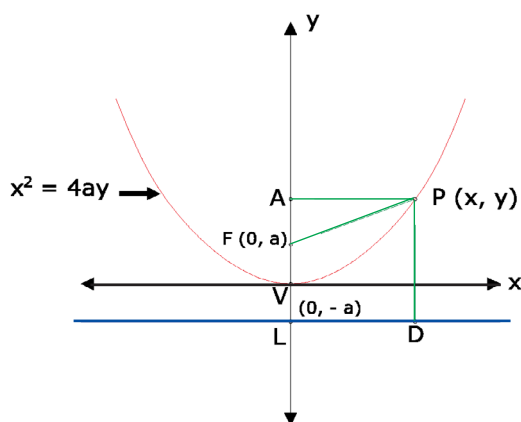
De la definición, es fácil construir puntos de una parábola con regla y compás.

Sean  $\overleftrightarrow{LM}$  la directriz y F el foco de una parábola.

Si trazamos por F una perpendicular a  $\overleftrightarrow{LM}$ , el punto medio de LF es, evidentemente, un punto de la parábola, de acuerdo con la definición. A la recta  $\overleftrightarrow{LF}$  se le llama **eje** de la parábola y al punto V, **vértice**.

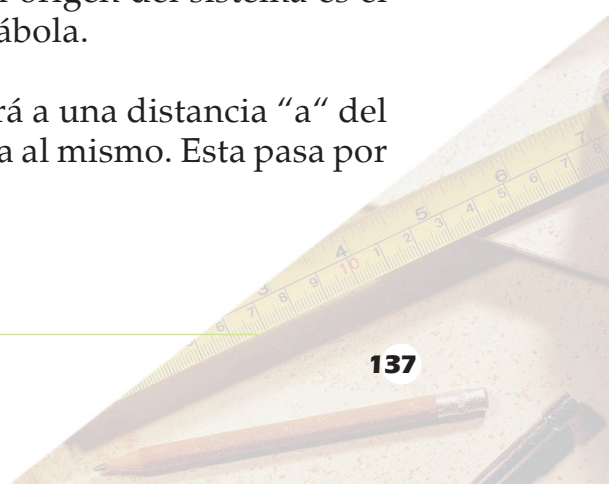


Los demás puntos se pueden localizar como se explicó en el primer ejercicio de la **vivencia**.



Por conveniencia, tomemos el eje de la parábola de tal manera que coincida con el eje Y de un sistema cartesiano de coordenadas y el origen del sistema es el vértice de la parábola.

La directriz estará a una distancia "a" del eje X y es paralela al mismo. Esta pasa por el punto (0, - a).



Supongamos que  $P(x, y)$  es un punto variable que está sobre la parábola.

La parábola es el conjunto de puntos:  $\{P(x, y): PF = PD\}$  (1)

De la gráfica:  $PD = AV + VL$   
 $PD = y + a$  (2)

La distancia PF se obtiene aplicando la fórmula:

$$PF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{en la que } (x_1, y_1) = (0, a) \text{ y } (x_2, y_2) = (x, y)$$

$$PF = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - a)^2}$$

$$PF = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \quad (3)$$

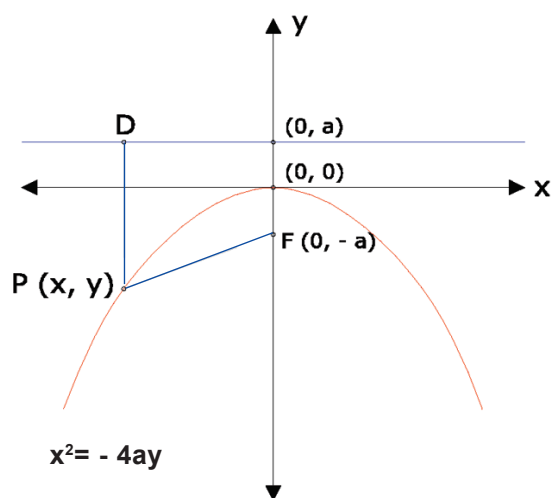
Reemplazando los valores de PD y PF, dados por (2) y (3), en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Parábola} &= \{P(x, y): PF = PD\} \\ &= \{P(x, y): \sqrt{x^2 + (y - a)^2} = y + a\} \end{aligned}$$

Elevando los dos miembros de la igualdad al cuadrado, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Parábola} &= \{P(x, y): x^2 + (y - a)^2 = (y + a)^2\} \\ &= \{P(x, y): x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2\} \\ &= \{P(x, y): x^2 = 4ay\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de una parábola con vértice en el origen, con su eje sobre el eje Y y el foco a una distancia "a" del vértice es:



$$\{(x, y): x^2 = 4ay\}$$

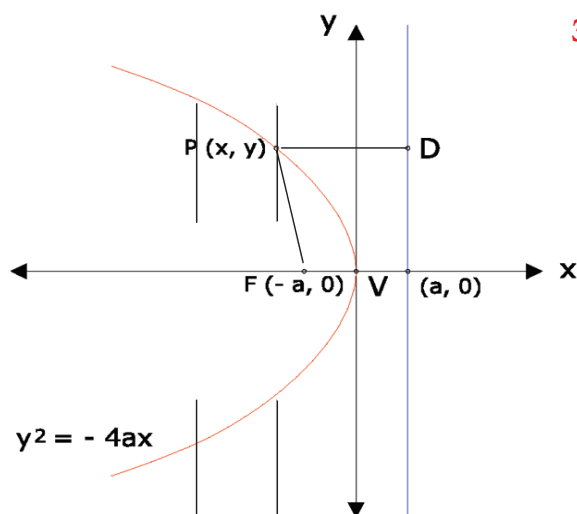
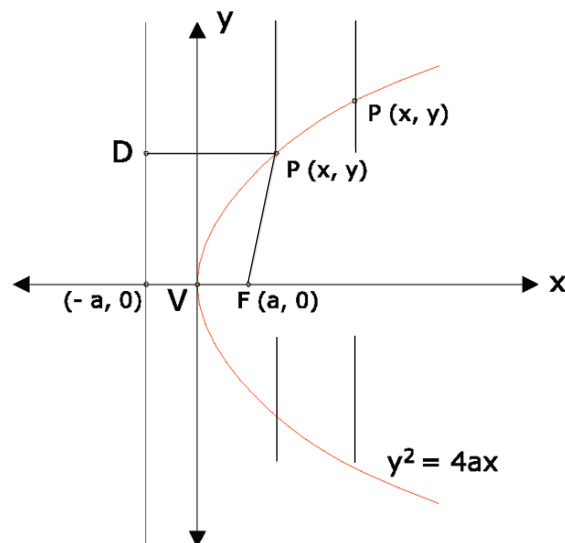
Se presentan tres casos más:

$$1. \{(x, y): x^2 = -4ay\}$$

La directriz es  $y = a$   
 El eje de la parábola es el eje Y.  
 El foco es el punto  $F(0, -a)$   
 $PF = PD$  para todo punto  $P(x, y)$   
 de la parábola.

## 2. $\{(x, y): y^2 = 4ax\}$

La directriz es la recta  $x = -a$   
El eje de la parábola es el eje X.  
El foco es el punto  $F(a, 0)$   
 $PF = PD$  para todo punto  $P(x, y)$   
de la parábola



## 3. $\{(x, y): y^2 = -4ax\}$

La directriz es la recta  $x = a$   
El eje de la parábola es el eje X.  
El foco es el punto  $F(-a, 0)$   
 $PF = PD$  para todo punto  $P(x, y)$  de la  
parábola.  
 $a > 0$ , también en los otros casos

De las gráficas anteriores podemos sacar varias conclusiones:

- \* Las ecuaciones que definen los conjuntos son de segundo grado en una de las variables y de primer grado en la otra.
- \* El signo menos que aparece en cada una de las ecuaciones que definen los conjuntos puede indicarnos la forma de la parábola correspondiente: Parábolas situadas encima del eje X y a la derecha del eje Y tienen signo positivo. Parábolas situadas debajo del eje X y a la izquierda del eje Y tienen signo negativo.
- \* Las relaciones que definen los dos últimos casos no son funciones porque existen dos valores de "y" para cada valor de "x".

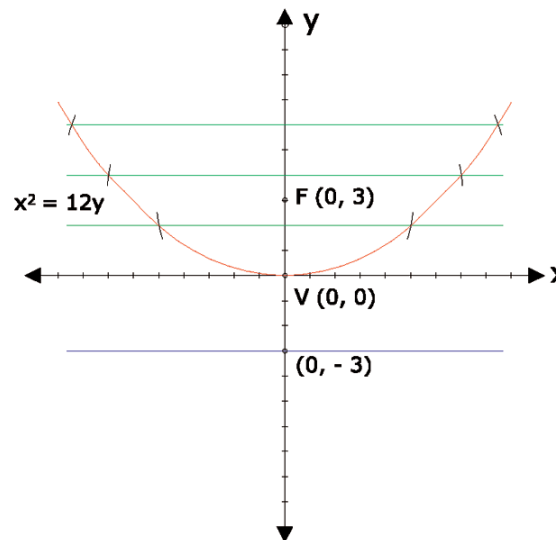
$$\text{Si } y^2 = 4ax, y = \pm\sqrt{4ax} \text{ y si } y^2 = -4ax, y = \pm\sqrt{-4ax}$$

**Analizo, con mis compañeros, los siguientes ejemplos, consignando en mi cuaderno los que considere necesarios.**

EJEMPLO 1. Encuentro la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto  $F(0, 3)$  y la directriz es paralela al eje  $X$  y pasa por  $(0, -3)$ .

Como el foco está sobre el eje  $Y$  y el vértice está en el origen, entonces la parábola tiene la forma dada por la ecuación  $x^2 = 4ay$ , donde  $a = 3$ .

**Parábola =  $\{(x, y): x^2 = 12y\}$**



EJEMPLO 2. Encuentro el foco y la directriz de la parábola  $\{(x, y): x^2 - 16y = 0\}$ .

El conjunto dado se puede llevar a la forma  $x^2 = 4ay$ .

$\{(x, y): x^2 = 16y\}$  donde  $4a = 16$ , luego  $a = 16/4 = 4$ .

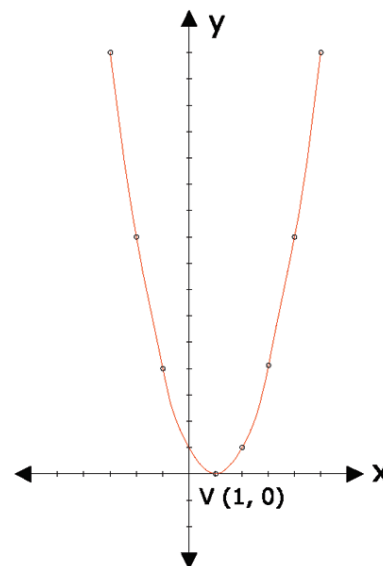
El foco es el punto  $(0, 4)$  y la directriz es paralela al eje  $X$ , su ecuación es  $y = -4$  y pasa por el punto  $(0, -4)$ .

EJEMPLO 3. Represento la función cuadrática  $\{(x, y): y = x^2 - 2x + 1\}$ .

Hago una tabla de valores, dándole a "x" valores arbitrarios y calculando los valores de "y".

|   |    |    |    |   |   |   |   |   |    |
|---|----|----|----|---|---|---|---|---|----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| y | 16 | 9  | 4  | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

Localizo estos puntos en un plano cartesiano de coordenadas.



**De la gráfica se puede concluir que la función cuadrática de la forma  $\{(x, y): y = f(x) = ax^2 + bx + c\}$  es una PARÁBOLA, cuyo EJE es una recta**



paralela al eje Y ( $x = 1$ , en este ejemplo). El VÉRTICE y el FOCO están sobre dicha recta, aunque el VÉRTICE no está, necesariamente, localizado en el origen de coordenadas.

Si transformo la función  $y = x^2 - 2x + 1$  en la forma  $x^2 = 4ay$  puedo obtener el valor de "a" y la localización del FOCO.

$$x^2 - 2x + 1 = y$$
$$(x - 1)^2 = 1(y - 0)$$

Puedo concluir que si  $4a = 1$  y  $a = 1/4$ , entonces el foco está en el punto F (1, 1/4) y la ecuación de la directriz es  $y = -1/4$ . Además, la última ecuación tiene la forma:  $(x - h)^2 = (y - k)$ , donde el punto  $(h, k) = (1, 0)$  coincide con el VÉRTICE DE LA PARÁBOLA.

### Ahora si, a resolver ejercicios

Analizo detalladamente los ejemplos anteriores y sus gráficas para resolver los siguientes ejercicios. Los consigno en mi cuaderno.

- Haga la gráfica correspondiente al ejemplo 2.
- Encuentre el foco, la directriz y dibuje la parábola definida por los siguientes conjuntos de puntos del plano:
  - $\{(x, y): 3x^2 - y = 0\}$
  - $\{(x, y): 3x - 2y^2 = 0\}$
  - $\{(x, y): 3x^2 - y/2 = 0\}$
- Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen y su directriz es una recta paralela al eje X que pasa por el punto (4, 2). ¿Cuál es el foco?
- ¿Cuál es el valor de "a" si la parábola  $\{(x, y): y^2 = -4ax\}$  pasa por el punto (1, 1)? Haga la gráfica.
- Dibuje las siguientes parábolas correspondientes a la función cuadrática dada:
  - $\{(x, y): y = f(x) = -x^2 - 4x - 4\}$
  - $\{(x, y): y = f(x) = 2x^2 - x - 3\}$

6. Encuentre la longitud del **latus rectum** de las parábolas. Compruebe las respuestas por medio de gráficas.

- a.  $y^2 = -8x$
- b.  $x^2 = -2y$

El **LATUS RECTUM** (lado recto) de una parábola es el segmento perpendicular al eje de la parábola, que pasa por el foco y une dos puntos de la parábola. La longitud del **LATUS RECTUM** es igual al valor absoluto de  $4a$ :

$$\text{Latus rectum} = |4a|$$

EJEMPLO. Encuentro el **LATUS RECTUM** de la parábola  $y^2 = -6x$ .

Si comparo la ecuación dada con la forma  $y^2 = -4ax$

$$y^2 = -6x \quad ; \quad y^2 = -4ax$$

$$4a = 6$$

$$|4a| = |6| = 6$$

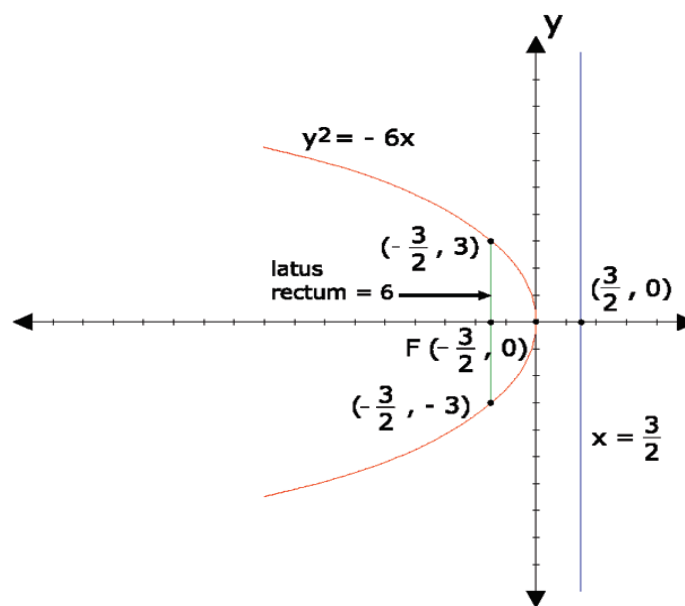
Por lo tanto, **LATUS RECTUM** = 6

Además, si  $4a = 6$ ,  $a = \frac{3}{2}$

El foco está situado en el punto

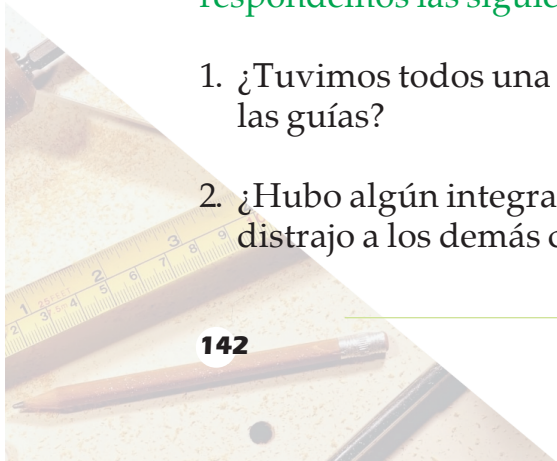
$$F(-a, 0) = F\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ y}$$

la directriz es la recta  $x = a = \frac{3}{2}$



Concluidos los ejercicios, es hora de analizar y reflexionar sobre mi comportamiento y el de mis compañeros de subgrupo y de grupo. Discutimos y respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Tuvimos todos una actitud positiva y responsable frente al desarrollo de las guías?
2. ¿Hubo algún integrante del subgrupo que casi no trabajó y por el contrario distrajo a los demás con charlas salidas del tema?



3. ¿Aplicamos el Manual de Convivencia, especialmente lo relacionado con el trato hacia los demás y el cuidado de los bienes ajenos y del Colegio?

**Compartimos las respuestas con los demás subgrupos y también los acuerdos a los que hemos llegado por consenso.**

**Presento los ejercicios al profesor para la revisión correspondiente.**



## APLICACIÓN

La competencia AXIOLÓGICA se evidencia en las actividades desarrolladas en las mesas de trabajo. Si las actividades son de aplicación y se desarrollan en la casa, se evidenciará mucho más la responsabilidad, la toma de decisiones y la autodisciplina.

**1. Utilice otro procedimiento para hacer la gráfica de una parábola con regla y compás.**

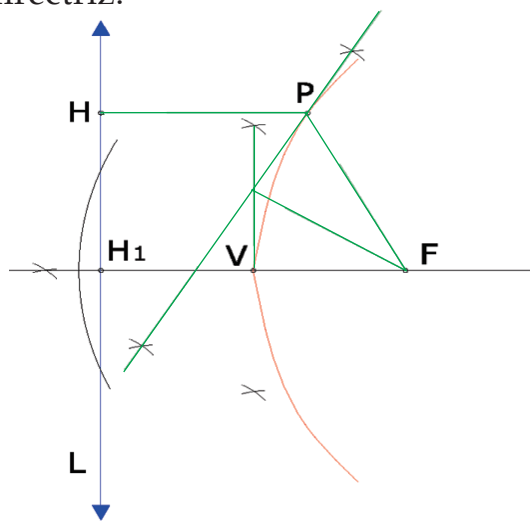
**Puede utilizar el siguiente método:**

Sea  $L$  la directriz y  $F$  el foco. Un punto  $P$  está sobre la parábola, si la distancia de  $P$  al foco es igual a la distancia de  $P$  a la directriz.

- Tome un punto arbitrario  $H$ , sobre la directriz, unimos  $H$  con  $F$ .
- Levante una perpendicular en el punto medio de  $HF$ , con regla y compás.
- Por  $H$ , levante una perpendicular a  $L$ , con regla y compás.

Sea  $P$  el punto donde se cortan estas dos líneas auxiliares. El punto  $P$  está sobre la mediatriz de  $HF$ , luego  $PH = PF$ . Por tanto,  $P$  es un punto de la **parábola**.

**Se repite el procedimiento para muchos puntos sobre la directriz, obteniendo muchos puntos sobre la parábola con foco en  $F$  y cuya directriz es  $L$ .**

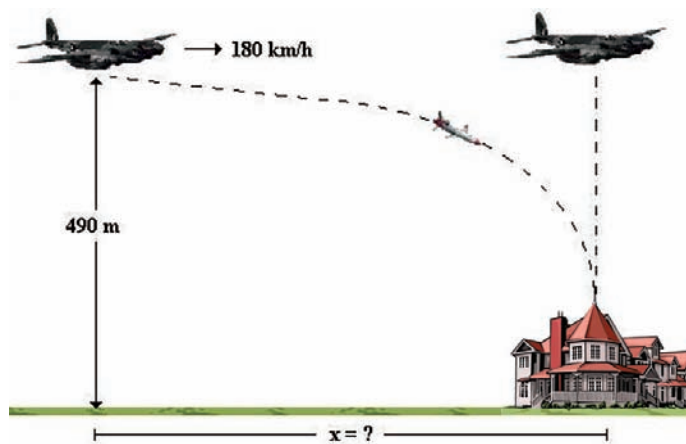


Si el punto  $H_1$  lo escoge tal que la línea  $H_1F$  sea perpendicular a la directriz  $L$ , la línea  $H_1F$  será el eje de la parábola y su punto medio  $V$  será el vértice de la parábola.

2. Encuentre el foco, la directriz y dibuje la parábola definida por el

$$\text{conjunto } \{(x, y): \frac{1}{2}x + y^2 = 0\}$$

3. Un avión vuela horizontalmente a 490 metros de altura, marchando a la velocidad de 180 Km./h. Si deja caer una bomba sobre un blanco. ¿En qué posición del avión debe soltarla para que de en el blanco?



Como el movimiento es parabólico, debo emplear la

fórmula física,  $h = \frac{gt^2}{2}$  que es de la forma  $x^2 = -4ay$  en la que se ha despejado

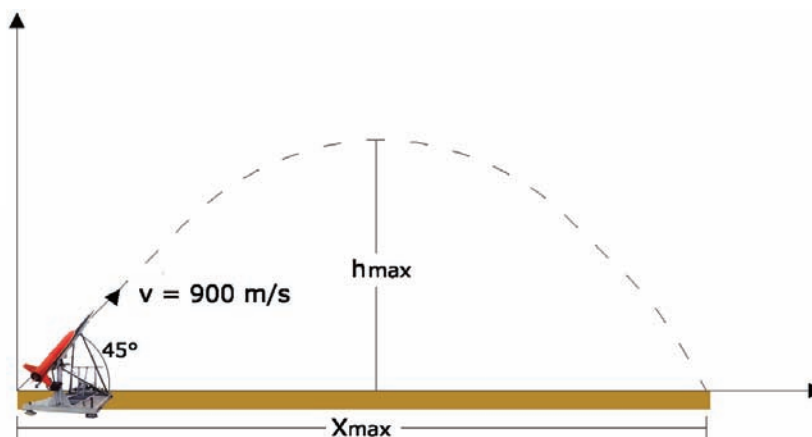
$$\text{la "y": } y = -\frac{x^2}{4a} \left\{ \frac{g}{2} = -\frac{1}{4a} \right\}$$

Luego utilice la fórmula del movimiento uniforme.

4. Un proyectil es disparado con una velocidad de 900 m/s y un ángulo de  $45^\circ$ . Halle el máximo alcance horizontal y la máxima altura que alcanza el proyectil. Utilice las fórmulas:

$$x_{\max} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$h_{\max} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



5. Dibuje la parábola correspondiente a la función cuadrática  $\{(x, y): y = f(x) = x^2 - x + 1/4\}$ . Localice el foco, el vértice, dibuje la directriz y escriba su ecuación.

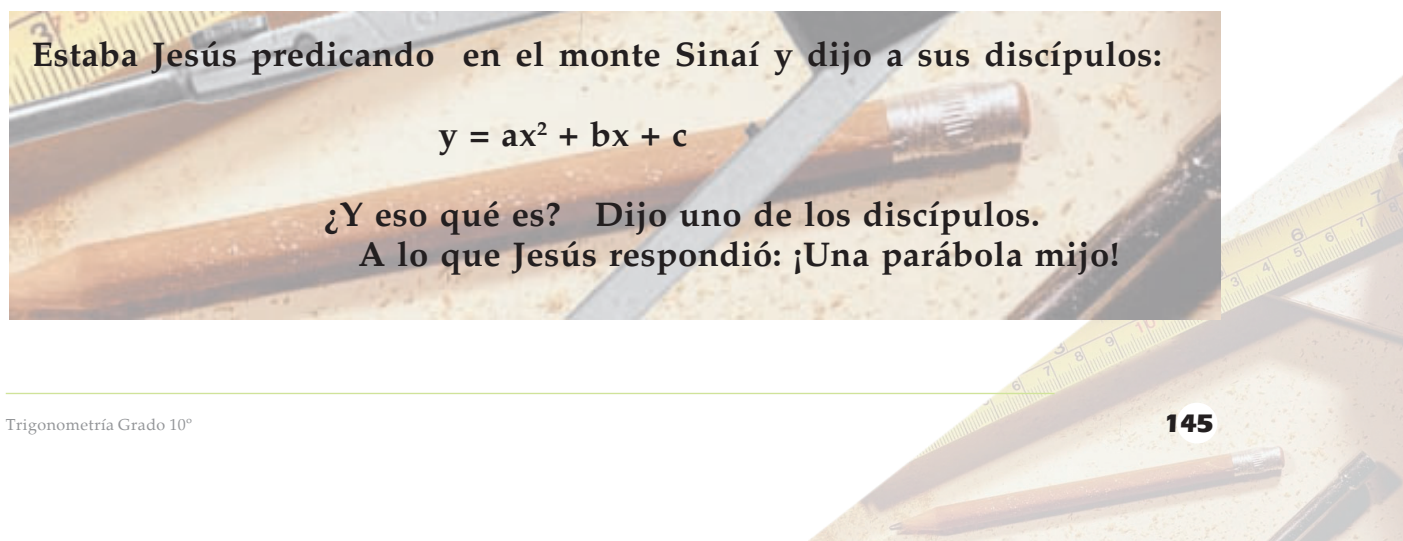


## ¿DESEA SABER MÁS?

1. Si desea saber más sobre la competencia **axiológica**, consulte **ÉTICA**, la ciencia que pretende dar explicación de las normas morales, su origen social e histórico, su validez y fundamentación dentro de un sistema filosófico o religioso.
2. Consulte en la fuente de información que desee (ENCARTA, INTERNET, LA BIBLIOTECA, EL CRA, ...) los siguientes conceptos:
  - a) Radio focal
  - b) Cuerda focal
  - c) Latus rectum
3. Demuestre las relaciones que definen las parábolas:
  - a)  $\{(x, y): x^2 = -4ay\}$
  - b)  $\{(x, y): y^2 = 4ax\}$
  - c)  $\{(x, y): y^2 = -4ax\}$
4. Visite la Sala Virtual, utilice el CD "PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS" y consulte en DESCARTES, SEGUNDO CICLO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA, 4º de ESO Opción B, el tema: La Función Cuadrática II

Representación de la función  $y = ax^2 + bx + c$

**Haga las prácticas sugeridas y presente un informe al Profesor.**



## ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA



146