

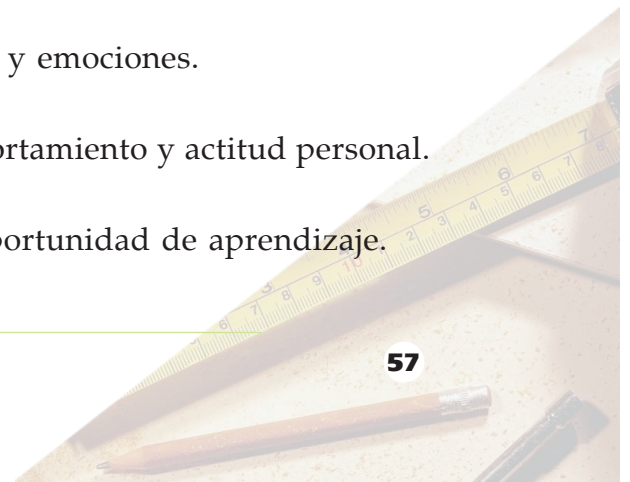
# Guía 4

## LOS TRIÁNGULOS ESTÁN EN TODAS PARTES



### Indicadores de logros

- ✓ Demuestra y aplica la Ley de las Tangentes.
- ✓ Halla los lados y ángulos de un triángulo cualquiera.
- ✓ Aplica los métodos para resolver triángulos en problemas de la vida diaria.
- ✓ Comprende algunas de sus emociones y sentimientos. (COMPETENCIA PERSONAL)
- ✓ Reconoce sus factores motivacionales.
- ✓ Manifiesta en forma apropiada sus sentimientos y emociones.
- ✓ Identifica algunas emociones de los demás.
- ✓ Identifica qué cambios debe realizar en su comportamiento y actitud personal.
- ✓ Inicia la formulación de su proyecto de vida.
- ✓ Asume la adversidad y sus errores como una oportunidad de aprendizaje.



## ¿Quién soy yo?

Además del estudio sobre triángulos encontramos en esta guía elementos para desarrollar nuestra personalidad. Leamos y analicemos el siguiente contenido.

La **COMPETENCIA PERSONAL** es la capacidad que tiene el individuo para reconocer y valorar sus potencialidades e identificar sus limitaciones emocionales, afectivas e intelectuales.

Esta competencia busca motivar a los estudiantes para que comiencen a comprender algunas de sus emociones y sentimientos contribuyendo a su bienestar emocional y personal.

¿Quién soy yo? Pienso la respuesta y la comparto con mis compañeros de subgrupo. Todos tenemos respuestas diferentes, pero no todos reconocemos que tenemos muchas potencialidades y que lo que pensamos se refleja en nuestra personalidad. "Pensar es el trabajo más duro que existe; probablemente por eso tan pocos lo emprenden"

Henry Ford.

"Si crees que estás derrotado es que lo estás,  
Si crees que no, no lo estarás.  
Si te gusta ganar, pero crees que no puedes,  
Es casi seguro que no ganarás.  
Si crees que perderás estás perdido  
Pues en el mundo se ha de encontrar  
que el éxito se inicia en la voluntad  
y que todo es un estado mental.  
Las luchas de la vida se ganan,  
no por el hombre más fuerte o más rápido  
sino que más pronto o más tarde  
aquel que gana es aquel que **PIENSA** ganar".



Es muy común ver estudiantes inseguros, que **piensan** que no son capaces de realizar determinado ejercicio, trabajo o tarea.

Así como el **pensamiento** es la fuente original de todo éxito, toda prosperidad y toda felicidad en el mundo, también el **pensamiento** es la fuente de todo fracaso, toda pobreza y toda desdicha en el mundo. "La mente es su propio lugar, y en sí misma puede hacer un paraíso del infierno y un infierno del paraíso".

John Milton



## LOS TRIÁNGULOS ESTÁN EN TODAS PARTES

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, el acto de “PENSAR” es permanente.

A. Con mis compañeros de subgrupo respondemos oralmente FALSO o VERDADERO, a los siguientes enunciados. Con esta actividad buscamos reconocer nuestros conocimientos en relación con los triángulos. Si acertamos, reconozcamos nuestras habilidades, si no lo logramos, reconozcamos nuestras limitaciones, no para frustrarnos sino para aplicar correctivos que nos permitan superar la dificultad.

1. Todo triángulo equilátero es isósceles.
2. Algunos triángulos rectángulos son isósceles.
3. Todos los triángulos rectángulos son escalenos.
4. Ningún triángulo acutángulo es obtusángulo.
5. Ningún triángulo escaleno es obtusángulo.
6. Todos los triángulos acutángulos son equiláteros.
7. Todos los triángulos equiláteros son acutángulos.
8. Algunos triángulos isósceles son obtusángulos.
9. Ningún triángulo rectángulo es isósceles.
10. Los tres ángulos de todos los triángulos suman  $180^\circ$ .

B. Hago una gráfica para justificar las respuestas:

11. De la pregunta 2.
12. De la pregunta 5.
13. De la pregunta 8.
14. De la pregunta 9

C. Tomo del CRA una caja de “EL ÁLGEBRA ES UN JUEGO” y resuelvo los siguientes sistemas. Más adelante, al aplicar la Ley de Tangentes, debemos plantear y resolver sistemas como estos.

$$15. \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$$





## PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Además de las Leyes del Seno y Coseno, los triángulos cumplen la Ley de Tangentes, la cual se presenta sin demostración.

Analizo el enunciado de la Ley de Tangentes y lo consigno en mi cuaderno.

### LEY DE TANGENTES

Para cualquier triángulo ABC, donde a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los ángulos A, B y C respectivamente, se cumple:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)} \quad (1)$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan \frac{1}{2}(C-A)}{\tan \frac{1}{2}(C+A)} \quad (2)$$

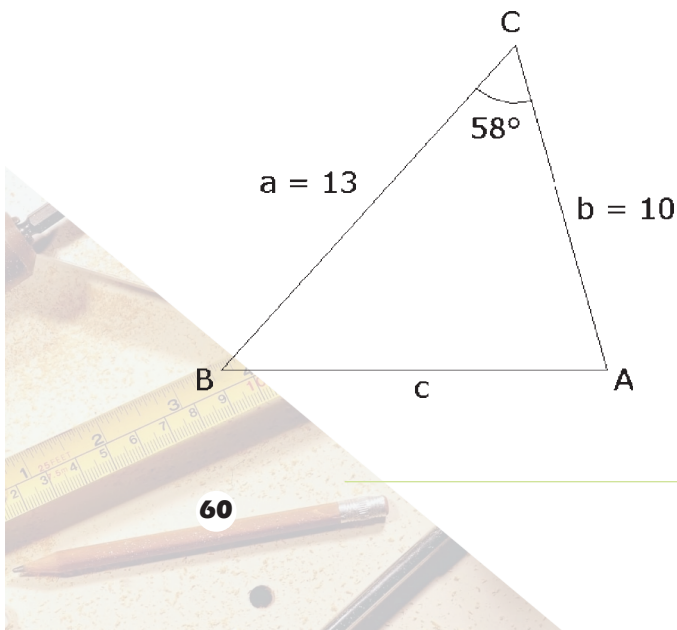
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B-C)}{\tan \frac{1}{2}(B+C)} \quad (3)$$

NO SE SALGA  
POR LA TANGENTE  
Empiece a formular desde  
ya su proyecto de vida.

Imagine qué tipo de  
persona le gustaría ser y  
qué es lo que quiere  
lograr.

La Ley de Tangentes se usa para determinar los otros ángulos cuando se conocen dos lados y el ángulo incluido. Se genera un sistema de dos ecuaciones con dos variables, que se resuelve para encontrar los ángulos desconocidos.

Analizo los siguientes ejemplos y los consigno en mi cuaderno.



EJEMPLO 1. Encuentro las medidas de los otros dos ángulos de un triángulo en el cual  $a = 13$ ,  $b = 10$  y  $\angle C = 58^\circ$ . Luego busco la medida del lado c.

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \angle A + \angle B + 58^\circ &= 180^\circ \\ \angle A + \angle B &= 180^\circ - 58^\circ \\ A + B &= 122^\circ \end{aligned}$$

Uso la fórmula (1) de la Ley de Tangentes:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{13-10}{13+10} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(122^\circ)}$$

$$\frac{3}{23} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan 61^\circ}$$

$$\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{3 \cdot \tan 61^\circ}{23} = 0.2353$$

$$\frac{1}{2}(A-B) = 13.24^\circ$$

$$(A-B) = 26.48^\circ$$

Con la ecuación obtenida al principio, formo un sistema de dos ecuaciones con dos variables, que resuelvo por reducción.

$$A + B = 122^\circ$$

$$\frac{A - B = 26.48^\circ}{2A = 148.48^\circ}$$

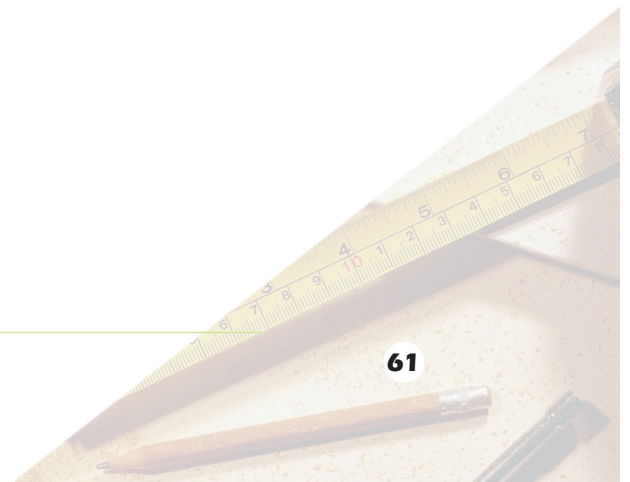
$$\boxed{\angle A = 74.24^\circ}$$

$$\angle B = 122^\circ - \angle A = 122^\circ - 74.24^\circ$$

$$\boxed{\angle B = 47.76^\circ}$$

Para calcular el lado  $c$ , aplico la Ley de Senos.

$$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } C}{c}$$



$$c = \frac{a \cdot \text{Sen } C}{\text{Sen } A} = \frac{13 \cdot \text{Sen } 58^\circ}{\text{Sen } 74.24^\circ}$$

$$c = 11.46 \approx 11$$

$$\boxed{c = 11}$$

Por lo tanto,  $\angle A = 74^\circ$ ,  $\angle B = 48^\circ$  y  $c = 11$ .

EJERCICIOS. Uso la Ley de Tangentes para encontrar las medidas de los ángulos desconocidos del  $\triangle ABC$ . Luego uso la Ley de Senos para encontrar la longitud del lado desconocido.

1.  $\angle C = 47^\circ$ ,  $a = 46$ ,  $b = 19$
2.  $\angle B = 26^\circ$ ,  $a = 45$ ,  $c = 34$
3.  $\angle A = 123^\circ$ ,  $b = 15$ ,  $c = 13$

### Reviso con mi profesor los ejercicios resueltos.

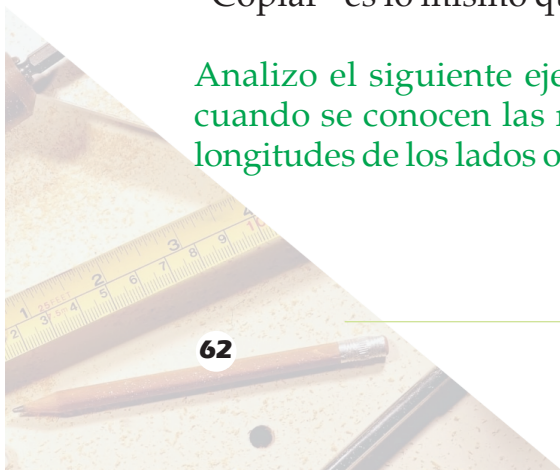
Es posible que alguien no haya resuelto los ejercicios anteriores sino que los haya copiado de un compañero sin hacer esfuerzo mental. Si es frecuente ese comportamiento debe pensar en cambiar y tener en cuenta que inconscientemente está haciendo trampa y hacer trampa es lo mismo que mentir. Simplemente está dando una imagen falsa de su trabajo, presentando el de otra persona como si fuera propio. Eso es deshonesto y debe cambiar su actitud. Recuerde que debe ser responsable.

**Responsabilidad** contiene dos palabras – responder y habilidad. Para triunfar, una persona necesita la **habilidad** o capacidad de **responder** a los desafíos que se le presentan.



“Copiar” es lo mismo que mentir y a nadie le gusta que le digan mentiroso.

Analizo el siguiente ejemplo, donde también se aplica la Ley de Tangentes, cuando se conocen las medidas de dos ángulos y la suma o diferencia de las longitudes de los lados opuestos a esos dos ángulos. Lo consigno en mi cuaderno.



EJEMPLO 2. En el triángulo ABC, la suma de los lados **a** y **b** es 142, el  $\angle A = 48^\circ$ , y  $\angle B = 32^\circ$ . Encuentro la medida de los tres lados y el  $\angle C$ .

$$a + b = 142$$

$$\angle A = 48^\circ$$

$$\angle B = 32^\circ$$

### Cálculo de **a** y **b**

Aplico la fórmula (1) de la Ley de Tangentes:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\tan \frac{1}{2}(A + B)}$$

$$\frac{a - b}{142} = \frac{\tan \frac{1}{2}(48^\circ - 32^\circ)}{\tan \frac{1}{2}(48^\circ + 32^\circ)}$$

$$\frac{a - b}{142} = \frac{\tan 8^\circ}{\tan 40^\circ}$$

$$a - b = \frac{142 \cdot \tan 8^\circ}{\tan 40^\circ}$$

$$a - b = 23.7836 \approx 24$$

$a - b = 24$  y  $a + b = 142$  forman un sistema  $2 \times 2$ , que resuelvo por reducción.

$$\begin{array}{r} a - b = 24 \\ a + b = 142 \\ \hline 2a = 166 \end{array}$$

$$a = 83$$

$$b = 142 - a = 142 - 83$$

$$b = 59$$



## Cálculo del $\angle C$

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \angle C &= 180^\circ - (\angle A + \angle B) \\ \angle C &= 180^\circ - (48^\circ + 32^\circ) = 100^\circ \\ \angle C &= 100^\circ\end{aligned}$$

## Cálculo de $c$

Aplico la Ley de Senos:

$$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } C}{c}$$
$$\frac{\text{Sen } 48^\circ}{83} = \frac{\text{Sen } 100^\circ}{c}$$

$$c = \frac{83 \cdot \text{Sen } 100^\circ}{\text{Sen } 48^\circ} = 109.99$$

$$c = 110$$

Realizo los siguientes ejercicios, los consigno en el cuaderno y los comparto con el profesor.

Resuelvo cada triángulo ABC, con los datos dados.

- |                               |                           |                |
|-------------------------------|---------------------------|----------------|
| 1. $\angle A = 47^\circ$ ,    | $\angle B = 29^\circ$ ,   | $a + b = 49$   |
| 2. $\angle B = 103.4^\circ$ , | $\angle C = 21.8^\circ$ , | $b + c = 67.5$ |
| 3. $\angle A = 42^\circ$ ,    | $\angle C = 101^\circ$ ,  | $a + b = 213$  |

El trabajo académico y otras circunstancias pueden generar situaciones como las siguientes:

- \* Frecuente tristeza, llanto, ira o irritabilidad.
- \* Pérdida de interés en la escuela u otras actividades.
- \* Sentimiento de culpa o una sensación de inutilidad.
- \* Falta de energía.
- \* Pérdida o disminución del apetito; pérdida de peso.
- \* Dificultad para concentrarse.
- \* Comunicación deficiente.
- \* Pasa más tiempo solo(a).



- \* Frecuentes dolores de cabeza o de estómago.



**Reconozco mis emociones y sentimientos** y reflexiono si una o más situaciones como las anteriores persisten en mí por más de un mes. Si es así, debo buscar ayuda lo antes posible. El primer paso es comentar mi situación al director de grupo y juntos **identificar qué cambios debo realizar en mi comportamiento y actitud personal.**

## El área de un triángulo

En la vida diaria, con alguna frecuencia, se necesita buscar el área de un lote, un patio o una finca que a veces tienen forma triangular.

Analizo y consigno en mi cuaderno la siguiente definición, su demostración y los dos ejemplos.

La fórmula convencional  $A = \frac{1}{2}bh$  puede ser transformada en otras 3 fórmulas, en función del seno.

Se asume que se conocen los lados "a" y "b" y el ángulo C comprendido por esos dos lados.

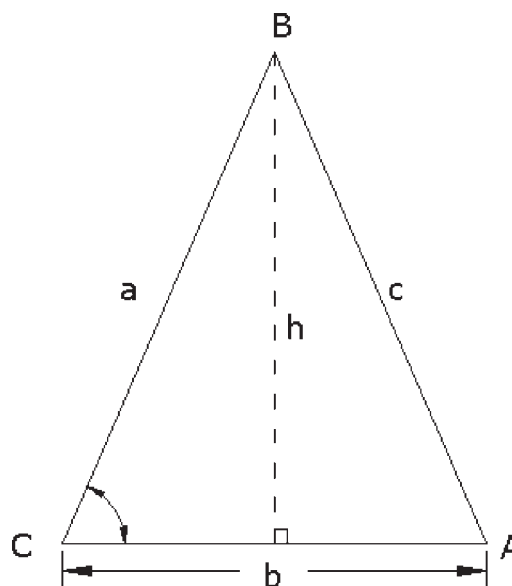
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Si  $\text{Sen } C = \frac{h}{a}$ , entonces  $h = a \text{ Sen } C$

Por lo tanto,  $A = \frac{1}{2}ab \text{ Sen } C$

En forma similar se puede demostrar que el área de **cualquier triángulo** está dada por las fórmulas:

$$A = \frac{1}{2}bc \text{ Sen } A \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{2}ac \text{ Sen } B$$

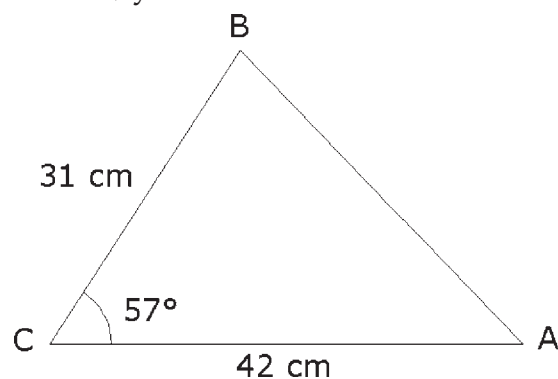


EJEMPLO 3. En el  $\Delta ABC$ ,  $\angle C = 57^\circ$ ,  $a = 31$  cm., y  $b = 42$  cm. Encuentro el área del triángulo.

$$A = \frac{1}{2} ab \text{sen } C$$

$$A = \frac{1}{2} (31 \text{ cm})(42 \text{ cm}) \text{sen } 57^\circ$$

$$A = 546 \text{ cm}^2$$



EJEMPLO 4. Encuentro el área del triángulo ABC, en el que se conocen al menos dos ángulos y un lado:  $\angle A = 61^\circ$ ,  $\angle B = 78^\circ$ , y  $c = 37$  m.

$$\angle C = 180^\circ - (61^\circ + 78^\circ)$$

$$\angle C = 41^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} bc \text{sen } A$$

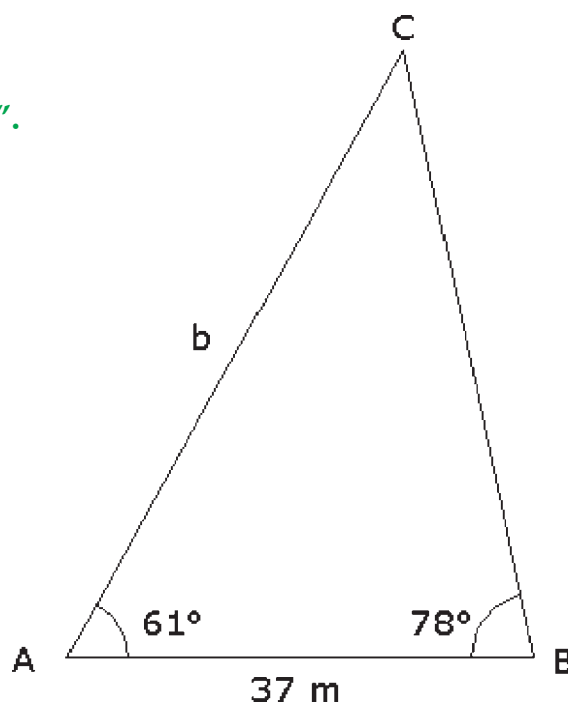
Aplico la Ley de Senos para hallar "b".

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

$$b = \frac{c \cdot \text{sen } B}{\text{sen } C} = \frac{37 \text{ m} \cdot \text{sen } 78^\circ}{\text{sen } 41^\circ} = 55.16 \text{ m}$$

$$A = \frac{1}{2} bc \text{sen } A$$

$$A = \frac{1}{2} (55.16 \text{ m})(37 \text{ m}) \text{sen } 61^\circ = 892.5 \text{ m}^2$$



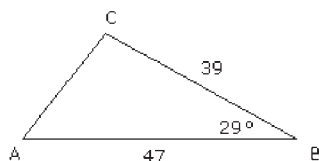
El área es aproximadamente 893 m<sup>2</sup>.



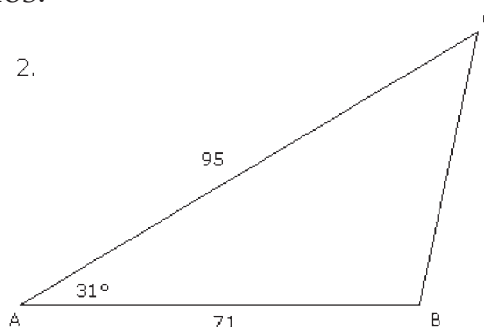
EJERCICIOS. Realizo y consigno en mi cuaderno los siguientes ejercicios.

Encuentro el área de los triángulos dados.

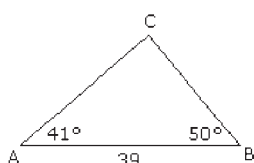
1.



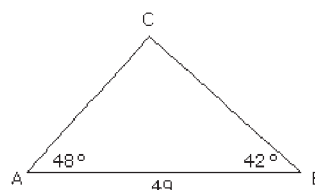
2.



3.



4.



5.  $\Delta ABC$  donde  $\angle B = 113.9^\circ$ ,  $\angle C = 43.9^\circ$ ,  $a = 57.9$  m.

**Comparto los resultados con mis compañeros y el profesor.**

Generalmente, en Escuela Nueva, se le da gran importancia al trabajo en equipo. Al trabajar en equipo, surgen dificultades de relación entre las personas que lo conforman. La competencia que estamos adquiriendo nos propone estrategias para formarnos con una conciencia moral autónoma, para fortalecer las relaciones humanas. El siguiente abecedario nos proporciona elementos que nos ayudan a este respecto. Leámoslo y comentémoslo grupalmente. Si me parece interesante lo copio en mis apuntes personales.

## **ABECEDARIO BÁSICO DE RELACIONES HUMANAS**

**A**me su vida y trabajo (estudio) para contagiar positivamente a los demás.

**B**usque las mejores formas de agradar a otros.

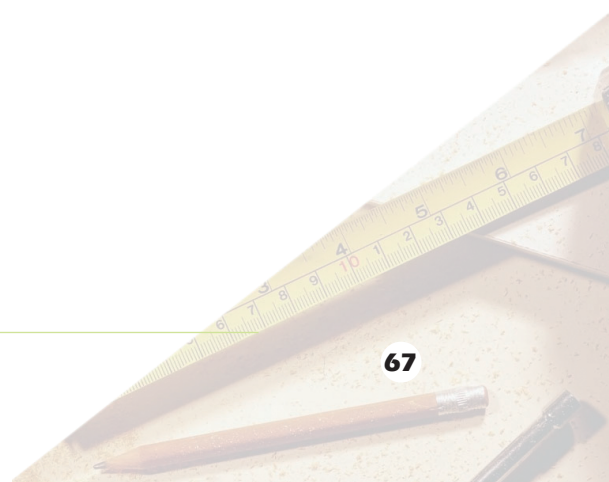
**C**onserve siempre un buen estado de ánimo.

**D**é a toda persona importancia y reconocimiento.

**E**scuche siempre con atención y simpatía.

**F**rene los impulsos de hablar sin pensar.

**G**oce con el éxito ajeno y reconózcalo.



- H**uya del chisme, la crítica destructiva y el rumor falso.
- I**rradie buena salud, comprensión y entusiasmo.
- J**amás odie a nadie, ni muestre deseos de venganza.
- L**lame a toda persona por su nombre.
- M**antenga siempre un gran deseo de colaborar.
- N**o haga esperar a nadie, sea cumplido y puntual.
- O**culte sus penas y problemas personales sólo en su corazón.
- P**rocuere siempre ser amable y sonreír a todo el mundo.
- Q**uédese callado cuando se trata de algo íntimo de otro.
- R**espete profundamente la dignidad de todo ser.
- S**alude con enorme entusiasmo y cariño a todo el mundo.
- T**ome con seriedad sus responsabilidades.
- U**tilice el agradecimiento como prueba de amistad.
- V**alore el trabajo ajeno y reconozca las acciones en equipo.
- Z**alamería y adulación no son propias de personas serias.

Continuemos desarrollando el tema de esta guía.

### Fórmula de herón

La siguiente fórmula se usa para hallar el área de un triángulo cualquiera cuando se conocen los tres lados.

Consigno en mi cuaderno el enunciado, los ejemplos y los ejercicios.

FÓRMULA DE HERÓN. Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las medidas de los lados de un triángulo, entonces el área  $A$  del triángulo está dada por:

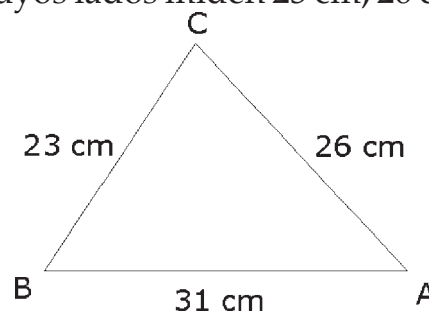
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ donde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

La cantidad  $s$  es llamada **semiperímetro** de un triángulo.

EJEMPLO 5. Encuentro el área de un triángulo cuyos lados miden 23 cm, 26 cm y 31cm.

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{23 \text{ cm} + 26 \text{ cm} + 31 \text{ cm}}{2} = 40 \text{ cm}$$



$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{40(40-23)(40-26)(40-31)}$$

$$A = \sqrt{40(17)(14)(9)}$$

$$A = 293 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO 6. La fórmula de Herón también puede ser usada para encontrar la altura de un triángulo, si se conocen los tres lados. Halla la altura de un triángulo que se traza desde el vértice A al lado BC, si  $a = 24 \text{ ft}$ ,  $b = 14 \text{ ft}$  y  $c = 18 \text{ ft}$ .

$$s = \frac{24 + 14 + 18}{2} = 28 \text{ ft}$$

$$A = \sqrt{28(28-24)(28-14)(28-18)}$$

$$A = \sqrt{28(4)(14)(10)}$$

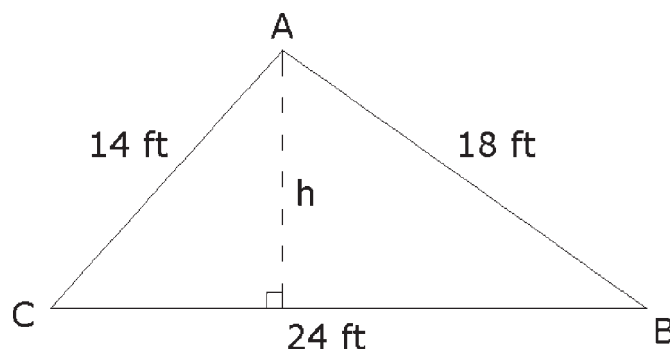
$$A = 125.2 \text{ ft}^2$$

Usa la fórmula  $A = \frac{1}{2}ah$ , donde  $A = 125.2 \text{ ft}^2$  y la base  $a = 24 \text{ ft}$ .

$$125.2 \text{ ft}^2 = \frac{1}{2}(24 \text{ ft})(h)$$

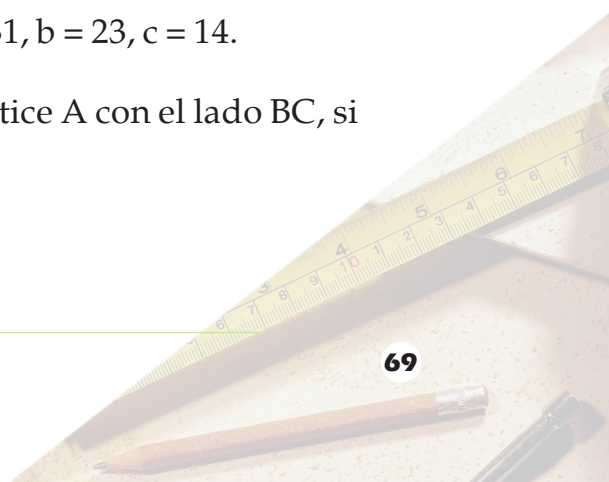
$$h = 10.4 \text{ ft}$$

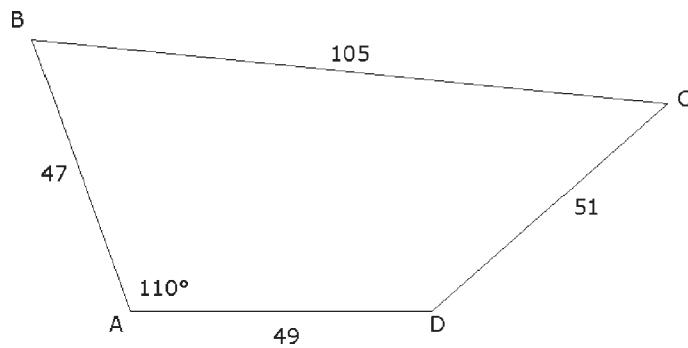
La altura desde A hasta el lado BC es de 10.4 ft.



EJERCICIOS. Resuelvo los siguientes ejercicios y los presento al profesor.

1. Encuentro el área del triángulo ABC, donde  $a = 31$ ,  $b = 23$ ,  $c = 14$ .
2. Encuentro la longitud de la altura que une el vértice A con el lado BC, si  $a = 38$ ,  $b = 42$ ,  $c = 16$ .
3. Encuentro el área del cuadrilátero ABCD.





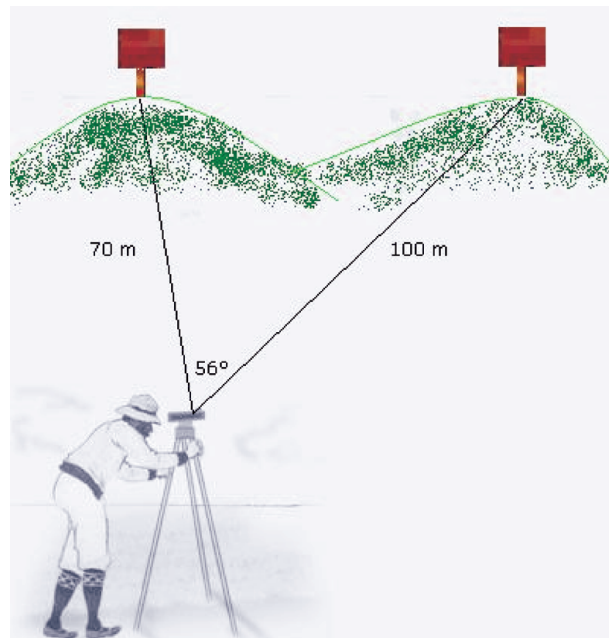
ALGUNAS PERSONAS HACEN DEL MUNDO UN LUGAR ESPECIAL,  
CON SÓLO ESTAR EN ÉL.



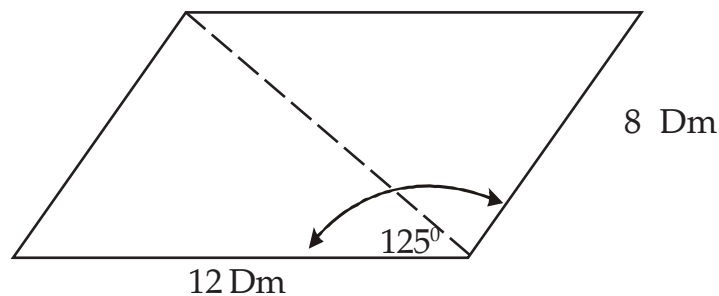
## ¿QUÉ APLICACIONES TIENEN LA LEY DE TANGENTES Y LAS FÓRMULAS PARA CALCULAR ÁREAS?

En la vida real se presentan muchas situaciones donde se necesita averiguar una determinada medida, un cierto ángulo o el área de un terreno triangular o en forma de cuadrilátero. Veamos:

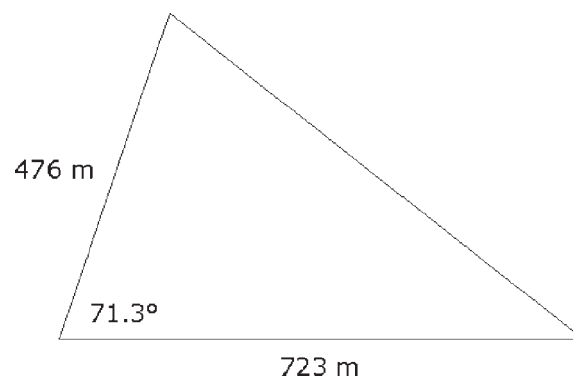
1. Un topógrafo desea calcular la distancia entre dos avisos. La distancia del topógrafo al primer aviso es de 70 m y la distancia hasta el segundo aviso es de 100 m. El ángulo entre las dos líneas visuales es de  $56^\circ$ . Encuentro la distancia entre los dos avisos.



2. Los lados de un terreno con forma de paralelogramo son de 12 Dm. y 8 Dm. y cada uno de los ángulos obtusos mide  $125^\circ$ . Encuentro la longitud de la diagonal menor, aplicando la ley de Tangentes.

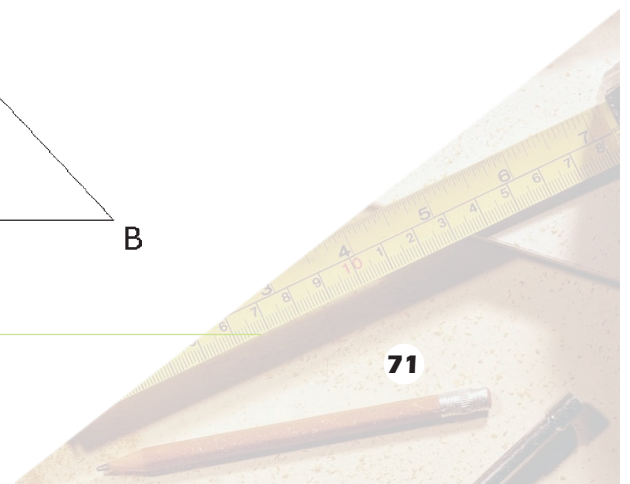
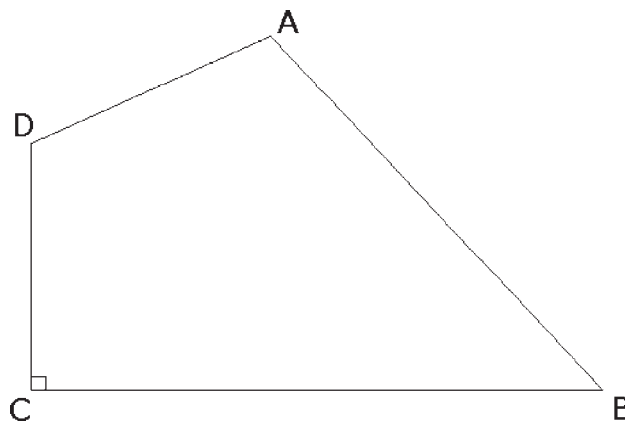


3. ¿Cuál es el área de un terreno triangular que mide 476 m en un lado y 723 m en otro, si el ángulo entre esos dos lados mide  $71.3^\circ$ ? (1 hectárea=10,000 m<sup>2</sup>). Doy la respuesta en hectáreas.



4. Encuentro el área de un patio triangular que mide 18 m, 20 m y 22 m.

5. ¿Cómo podría encontrar el área del polígono ABCD, con  $m\angle C=90^\circ$ ; conociendo las longitudes de los 4 lados?



Hemos concluido la guía y ya sé para qué sirve conocer las propiedades de los triángulos, aplicados en la cotidianidad de la vida. En las relaciones de trabajo con mis compañeros tuve la oportunidad de conocer mis cualidades personales, al mismo tiempo que mis deficiencias o debilidades, por consiguiente, me propongo hacer uso de: el diario, mis confidencias, sugerencias y compromisos, actividades de conjunto, que se diligencian en mi colegio, para registrar en ellos mi plan de mejoramiento personal, lo mismo que contribuir para que algunos de mis amigos, modifiquen sus comportamientos y mejoren su imagen personal.



## ¿DESEA APRENDER MÁS?

1. Consulto en cualquier fuente acerca de pregrados universitarios que me interesen para ir definiendo mi proyecto de vida.
2. Consulto la demostración del Teorema de Tangentes. Visito la sala virtual y utilizo el CD PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS para ampliar mis conocimientos sobre los temas vistos en esta guía.





## ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

