

# Guía 3

## LA CIRCUNFERENCIA ES UNA FIGURA PERFECTA



Monumental de ventas

### Indicadores de logros

- ✓ Define la circunferencia, sus elementos y los representa gráficamente.
- ✓ Deduce y grafica, como lugar geométrico, las circunferencias dadas por:  
 $\{(x, y): (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$
- ✓ Aplica los conceptos en situaciones de la vida real en los cuales se involucran circunferencias.
- ✓ Demuestra interés por actualizar su información de manera constante (**GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN**).
- ✓ Identifica la información requerida para ampliar sus conocimientos de una situación o problema.
- ✓ Ubica las distintas fuentes de información disponibles.
- ✓ Recoge organizadamente la información.
- ✓ Analiza la información recolectada.
- ✓ Utiliza la información para tomar decisiones y emprender acciones.
- ✓ Reconoce la información resultante de la experiencia de otros.
- ✓ Organiza y archiva la información recolectada.

## ¿Usamos adecuadamente la información?

Con los compañeros de subgrupo, leemos y analizamos el siguiente contenido.

La competencia que se trabajará en esta guía es GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN definida como la capacidad de recolectar información pertinente con el fin de procesarla, interpretarla y utilizarla para resolver situaciones.

En el mundo actual es cada vez mayor el flujo de información, de allí la necesidad de establecer nuevos canales de comunicación y aprendizaje que faciliten el acceso a la información disponible y permitan una mejor apropiación de la misma.

Con mis compañeros de subgrupo analizamos cuales son los canales de comunicación más utilizados por nosotros y los clasificamos en orden de importancia.

¿Estaremos usando adecuadamente la **información** que nos llega por medio de esos canales de comunicación?



Biblioteca Nacional de Paris

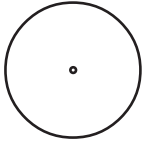

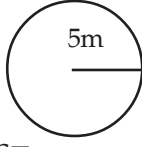

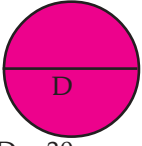
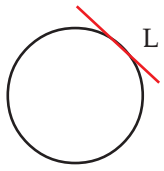

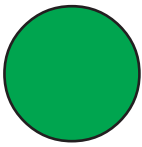
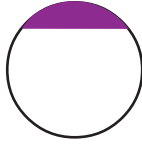
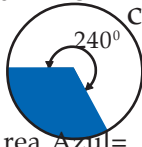
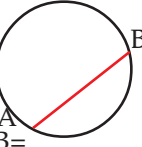
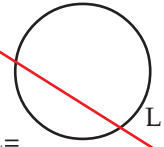
Se entiende la **información** como parte de la cultura, es decir, el conjunto de conocimientos, comportamientos, rituales y signos propios de los órdenes comunicativo, religioso, ideológico, artístico, ético y otros similares que caracterizan una sociedad.

Compartimos las respuestas con el profesor.



## LA CIRCUNFERENCIA ES UNA FIGURA PERFECTA

Tomo del CRA un juego de PIÉNSALO y busco la información requerida para resolver el siguiente ejercicio. Lo presento al profesor.

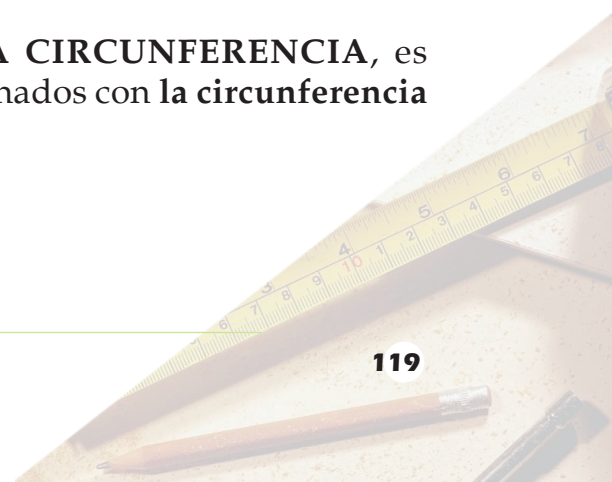
1 	2  Si $A = 200\text{m}^2$ $r =$	3  $C =$	4  Si $r = 3\text{m}$ $P =$ $P =$ perimetro	5  Si $D = 30\text{ cm}$ $A =$	6  $L =$
7 	8 	9 	10  Si $r = 100\text{ cm}$ $240^\circ$ Área Azul =	11  $AB =$	12  $L =$
A 706.86cm <sup>2</sup>	B SEGMENTO CIRCULAR	C CIRCUNFERENCIA	D SECTOR CIRCULAR	E 10472cm <sup>2</sup>	F 15.42m
G 31.42 cm	H CUERDA	I CÍRCULO	J 11.28 m	K TANGENTE	L SECANTE

Para realizar el ejercicio anterior, es posible que se hayan consultado diferentes fuentes de información para recordar algunos conceptos. Consigno en mi cuaderno las siguientes definiciones y ubico la fuente de información utilizada.

1. Circunferencia.
2. Círculo.
3. Sector circular.
4. Segmento circular.
5. Tangente.
6. Secante.
7. Cuerda.

Solicito la asesoría al profesor para revisar las definiciones.

Antes de abordar el tema **ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA**, es necesario tener muy seguros los conceptos relacionados con **la circunferencia y sus elementos** y sus teoremas.



Con los compañeros de subgrupo, analicemos los siguientes contenidos y realicemos muy atentamente los ejercicios que se nos proponen.

## LA CIRCUNFERENCIA Y SUS ELEMENTOS

Para repasar los conocimientos que tiene sobre circunferencias debe **utilizar** la información que aparece a continuación y **decidir** qué conceptos consigna en el cuaderno y qué ejercicios realiza.

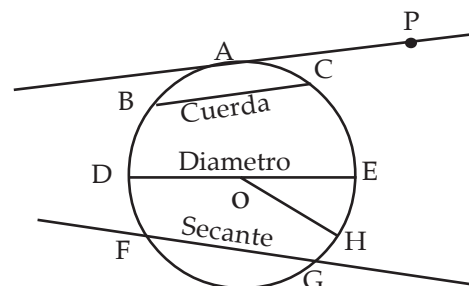
**CIRCUNFERENCIA:** es el conjunto de puntos en un plano que están a una distancia dada de un punto dado en ese plano. El punto dado es el centro de la circunferencia y la distancia dada es el **radio**. Cualquier segmento que una el centro con un punto de la circunferencia es llamado radio. Todos los radios de una circunferencia son congruentes.

**CUERDA:** es un segmento que une dos puntos de una circunferencia.

**SECANTE:** es una línea que contiene una cuerda.

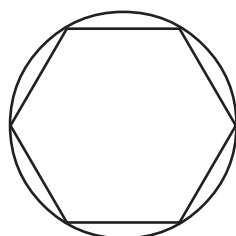
**DIÁMETRO:** es la cuerda que contiene el centro de la circunferencia.

**TANGENTE:** es una línea en el plano de la circunferencia que intersecta la circunferencia en exactamente un punto, llamado el **punto de tangencia**.

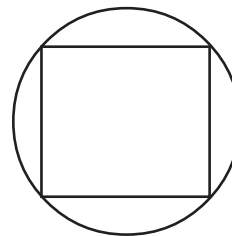


BC= Cuerda  
FG= Secante  
DE= Diámetro  
AP= Tangente  
OH=OD= OE= radios  
A=Punto de tangencia.

Un polígono está **INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA** y la circunferencia está **CIRCUNSCRITA** al polígono si cada vértice del polígono toca la circunferencia.



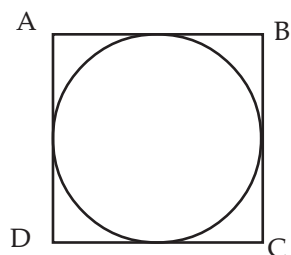
Hexágono inscrito en la circunferencia



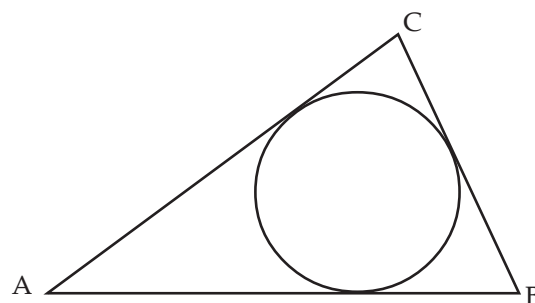
Circunferencia circunscrita al cuadrado



Un polígono está **CIRCUNSCRITO** a una circunferencia si cada lado del polígono **es tangente** a la circunferencia. En otras palabras la circunferencia está **INSCRITA** en el polígono.



Circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD.



Triángulo ABC circunscrito a la circunferencia

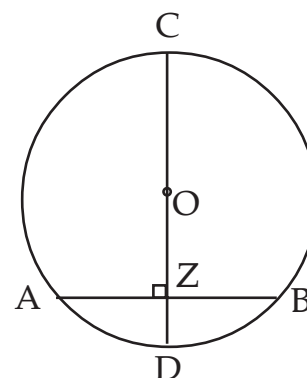
## TEOREMAS SOBRE CIRCUNFERENCIAS Y SUS ELEMENTOS

Analizo los siguientes teoremas, sin demostraciones, las que se dejan para la complementación (E). Los consigno en mi cuaderno, si lo considero necesario.

### Teorema 1

Un diámetro que es perpendicular a una cuerda, bisecta la cuerda y su arco.

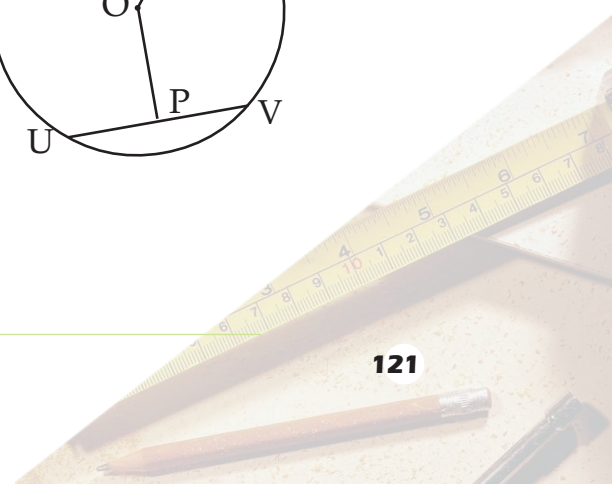
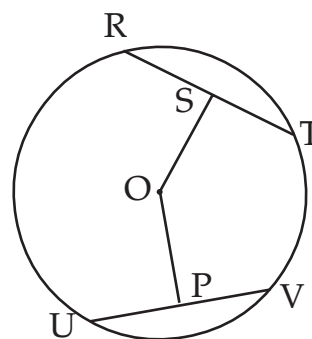
Si  $CD \perp AB$ , entonces,  
 $AZ \cong BZ \wedge \text{Arco } AD \cong \text{Arco } BD$



### Teorema 2

- Cuerdas a igual distancia del centro son congruentes.
- Cuerdas congruentes están a la misma distancia del centro.

Si  $OS = OP$ , entonces,  $RT \cong UV$   
 Si  $RT \cong UV$ , entonces  $OS \cong OP$

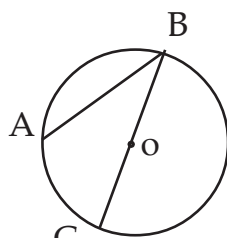


### Teorema 3

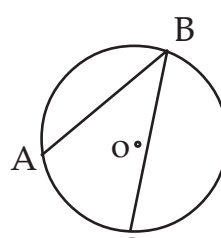
La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida de su arco interceptado.

Si  $\angle ABC$  está inscrito en la circunferencia entonces,

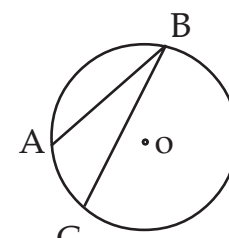
$$m \angle ABC = \frac{1}{2} m (\text{Arco AC})$$



CASO 1:  
Un lado del ángulo pasa por el centro.



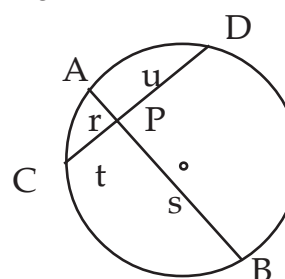
CASO 2:  
El centro está en el interior del ángulo.



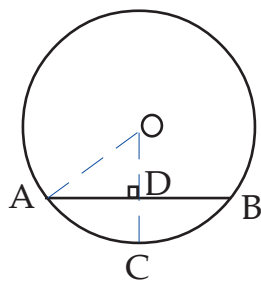
CASO 3:  
El centro queda fuera del ángulo.

TEOREMA 4. Cuando dos cuerdas se cortan, el producto de los segmentos de una cuerda es igual al producto de los segmentos de la otra cuerda.

Si AB intersecta CD, entonces  $r \times s = t \times u$



EJEMPLO 1. Estudio los siguientes ejemplos que aplican los teoremas anteriores. Servirán de base para resolver los ejercicios propuestos.



1. Encuentro la longitud de una cuerda que está a una distancia de 5 m del centro de una circunferencia de radio 8 m.

Trazo un radio perpendicular a la cuerda:  
Si  $OC \perp AB$ , entonces  $AD \cong DB$  (Teorema 1)  
Aplico el Teorema de Pitágoras en el  $\triangle OAD$ :  
Si  $OD = 5$  m y  $OA = 8$  m, entonces:

$$AD^2 = AO^2 - OD^2$$

$$AD^2 = 8^2 - 5^2$$

$$AD^2 = 64 - 25$$

$$AD^2 = \sqrt{39}$$

$$\text{Como } DB = AD = \sqrt{39},$$

$$AB = AD + DB = 2\sqrt{39} \text{ m}$$

EJEMPLO 2. Encuentro el valor de "x" y "y" en la circunferencia.

$$m \angle ADE = \frac{1}{2} m (\text{Arco AE}) \quad (\text{Teorema 3}).$$

$$x = \frac{1}{2} \times 40^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

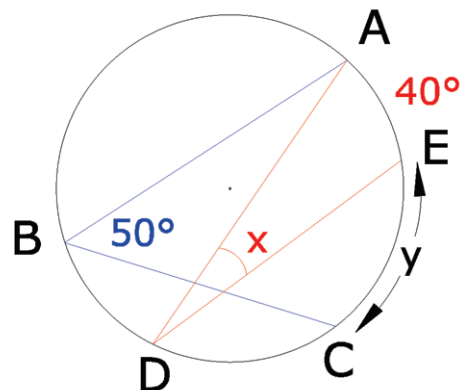
$$m \angle ABC = \frac{1}{2} m (\text{Arco AC}) = 50^\circ$$

$$m \text{Arco AC} = 100^\circ$$

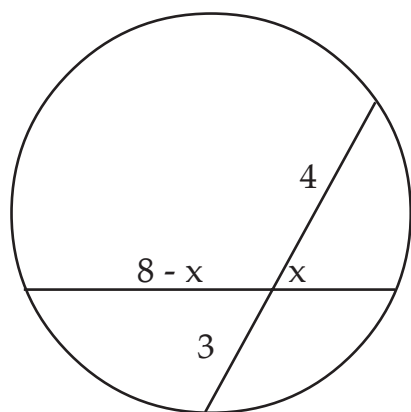
$$y = \text{Arco AC} - \text{Arco AE}$$

$$y = 100^\circ - 40^\circ$$

$$y = 60^\circ$$



EJEMPLO 3. Encuentro el valor de x.



$$x(8-x) = 3 \times 4$$

$$8x - x^2 = 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

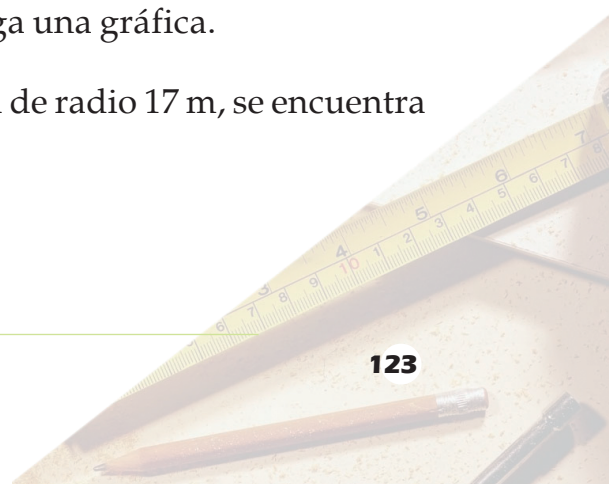
$$(x-6)(x-2) = 0$$

$$x-6=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

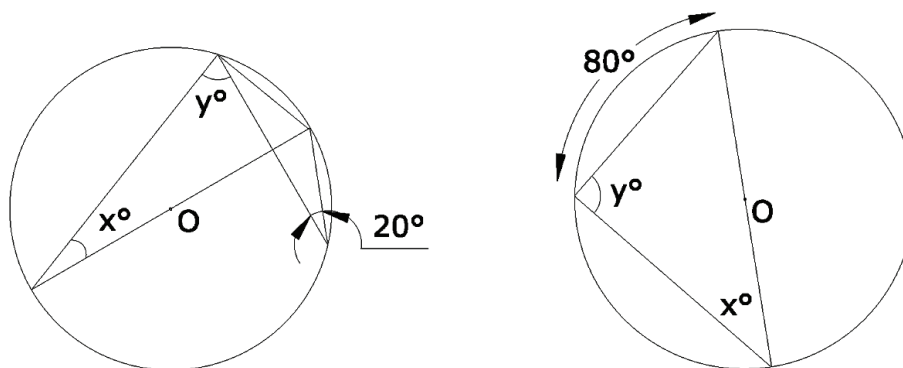
$$x=6 \quad \vee \quad x=2$$

**EJERCICIOS.** Analice los ejemplos anteriores y utilice los teoremas vistos para resolver los siguientes ejercicios.

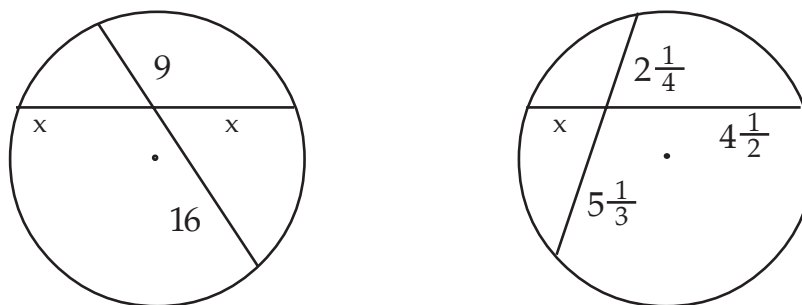
- Encuentre la longitud de una cuerda que está a una distancia de 5 cm del centro de una circunferencia de radio 13 cm. Haga una gráfica.
- ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de radio 17 m, se encuentra una cuerda de 30 m? Haga una gráfica.



3. Encuentre los valores de "x" y "y" en las gráficas.



4. Encuentre el valor de x.



Presento, en forma organizada, las respuestas al profesor.



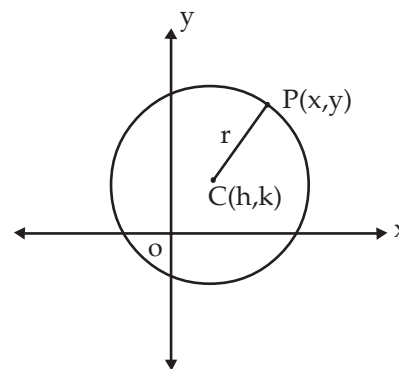
## ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Recordemos que una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la **misma distancia** de un punto fijo llamado el **centro**.

Con base en la definición, podemos encontrar una ecuación que nos determine una circunferencia con centro en  $C(h, k)$  y radio  $r$ .

Si  $P(x, y)$  es un punto variable sobre la circunferencia, entonces el conjunto:  $\{(x, y): d(PC) = r\}$  define la circunferencia. Aplicando la fórmula de distancia:

$$\{(x, y): \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r\}$$





Si elevamos al cuadrado se obtiene que

$$\{(x, y): (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

Por lo tanto, la relación que define una circunferencia de radio  $r$  y centro  $C(h, k)$  es:

$$\{(x, y): (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

Si tiene interés en actualizar su información, visite la Sala Virtual y consulte la siguiente dirección:

[http://www.Cnice.mecd.es/Descartes/4b\\_eso/la\\_circunferencia](http://www.Cnice.mecd.es/Descartes/4b_eso/la_circunferencia).

Cuando esté navegando consulte la definición, la gráfica, la ecuación y practique los juegos.

A continuación analizo con mis compañeros de subgrupo los ejemplos y resuelvo los ejercicios correspondientes, los cuales consigno en mi cuaderno.

**EJEMPLO 4.** Encuentro la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

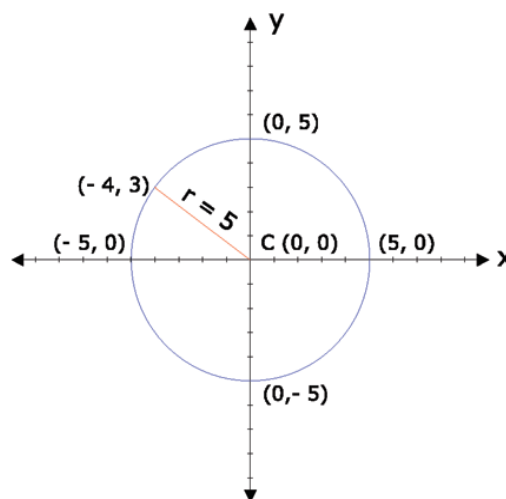
En este caso el centro es  $C(0, 0)$

$$\begin{cases} h=0 \\ k=0 \\ r=5 \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de la circunferencia:

$$\{(x, y): (x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2\}$$

$\{(x, y): x^2 + y^2 = 25\}$  es la Ecuación pedida.



EJEMPLO 5. Encuentro la ecuación de la circunferencia con centro en  $(-3, 2)$  y radio 4.

Aplico la relación:

$$\{(x, y): (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

$$\begin{cases} h = -3 \\ k = 2 \\ r = 4 \end{cases}$$

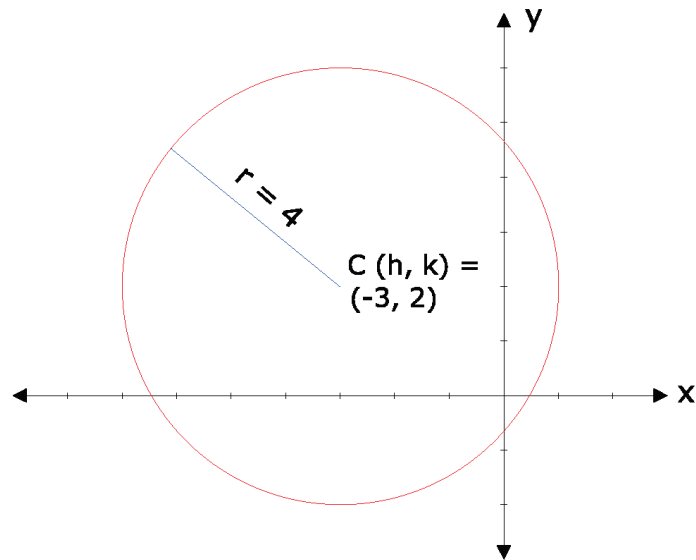
$$\{(x, y): (x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 16\}$$

$$\{(x, y): (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16\}$$

$$\{(x, y): x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 16\}$$

Reúno términos semejantes:

$\{(x, y): x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0\}$  es la ecuación pedida.



EJEMPLO 6. Encuentro el centro y el radio de la circunferencia definida por:

$$\{(x, y): x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2\}$$

Es necesario escribir la ecuación dada en la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

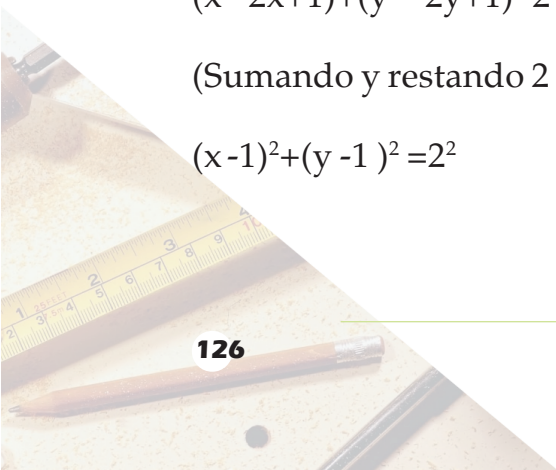
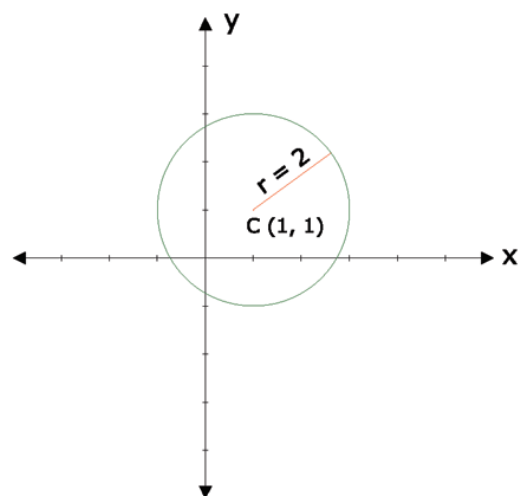
$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = 2$$

Completo un cuadrado en cada paréntesis así:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 2 = 2$$

(Sumando y restando 2 al primer miembro)

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$



Comparando esta última ecuación con la ecuación de la circunferencia, concluyo que el centro  $(h, k)$  queda en el punto  $C(1, 1)$  y el radio mide 2.

EJEMPLO 7. Encuentro el centro y el radio de la circunferencia definida por la relación  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 12$ .

Verifico si el punto  $(-2, -2)$  pertenece a la circunferencia.

Divido ambos miembros por 3:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$$

Completo los cuadrados de una diferencia y una suma, con los términos en "x" y los términos en "y".

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 4$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 = 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

Comparando con la ecuación de la circunferencia:  $h = 1$ ,  $k = -2$  y  $r = 3$ . Por lo tanto, **el centro es el punto  $C(1, -2)$  y el radio es 3.**

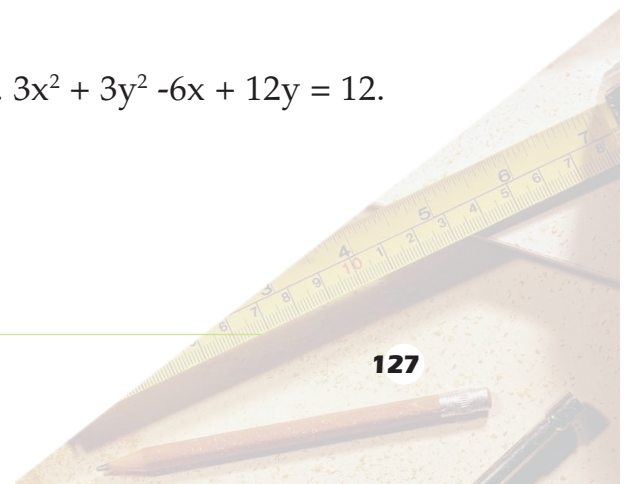
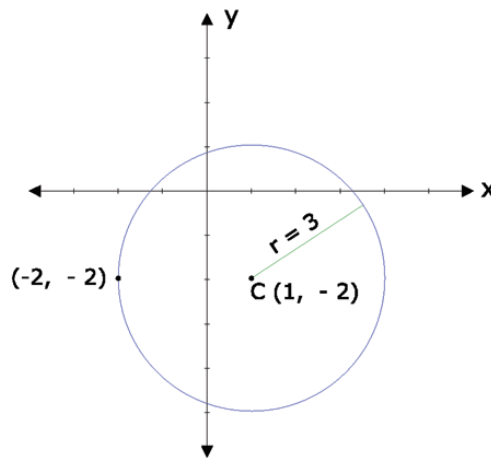
Para verificar si el punto  $(-2, -2)$  pertenece a la circunferencia, reemplazo  $x = -2$ ,  $y = -2$  en la ecuación original:

$$3(-2)^2 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 12(-2) = 12$$

$$12 + 12 + 12 - 24 = 12$$

$$12 = 12$$

**El punto  $(-2, -2)$  si pertenece a la circunferencia.  $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 12$ .**



**EJERCICIOS. Analice** cada ejercicio y recoja la información necesaria para resolverlos, repasando los ejemplos. Haga una gráfica de cada uno.

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en  $(0, 2)$  y radio  $\sqrt{2}$ .
2. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en  $(-3, -2)$  y radio 3.
3. Encuentre el radio de la circunferencia que pasa por  $(2, 3)$  y tiene por ecuación definidora:  $\{(x,y): (x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2\}$
4. Encuentre los puntos donde la circunferencia  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$  corta al eje X y al eje Y.
5. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:  
 $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$
6. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:  
 $3y^2 + 3x^2 - 12x + 6y - 12 = 0$

Presento los ejercicios al profesor **en forma organizada**.

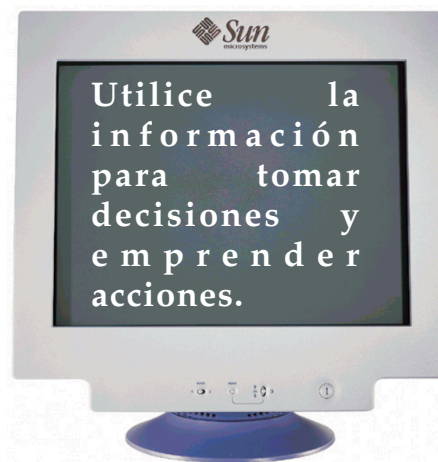


## APLICACIÓN

Para resolver los siguientes ejercicios, debemos buscar la información necesaria, teniendo en cuenta todas las fuentes a nuestro alcance. Demostremos nuestra habilidad para gestionar tal información.

La Gestión de la información se evidencia en la escuela desde las actividades de aplicación.

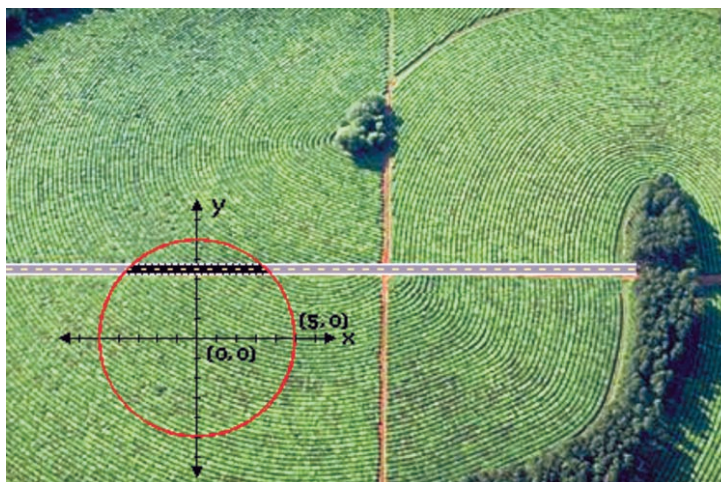
La **Gestión de la información** integra conocimientos y habilidades en las dimensiones teórico-prácticas.



1. Halle la longitud de la cuerda que determina los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 23 = 0$  y la recta  $y - x + 1 = 0$ . Haga una gráfica exacta.

2. Una carretera pasa por un terreno circular de 5 km. de radio. La ecuación que define la carretera es:  $x - 7y + 25 = 0$ .

Encuentre la longitud de la carretera que atraviesa ese terreno.



3. Encuentre los puntos de intersección de dos "roundpoints" en una autopista cuyas ecuaciones son:  $(x + 1)^2 + y^2 = 16$  y  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ .

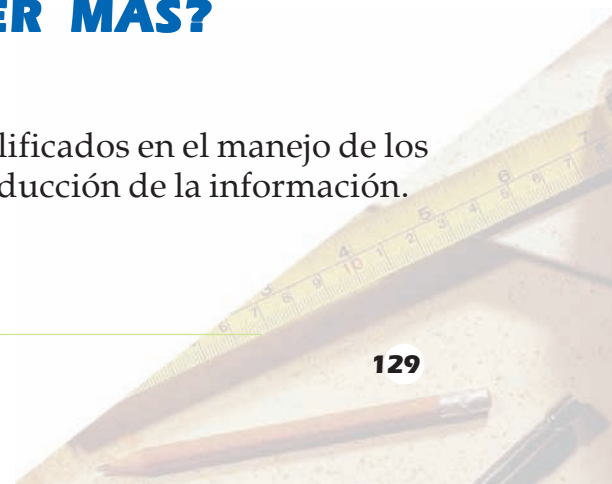


4. Pruebe por cualquier método que las circunferencias dadas por:  $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 29 = 0$  y  $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$  son tangentes.



## ¿QUIERE SABER MÁS?

La Gestión de la Información forma estudiantes calificados en el manejo de los procesos tecnológicos para el acceso, manejo y producción de la información.





1. Visite la Sala Virtual, utilice el CD "PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS" y busque en DESCARTES el tema "La Circunferencia". Luego estudie los subtemas:

- \* ECUACIÓN GENERAL
- \* PROGRESANDO EN EL CONOCIMIENTO DE LA CIRCUNFERENCIA
- \* CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS

Resuelva al menos dos ejercicios del último tema, recoja organizadamente las operaciones realizadas y preséntelas al profesor.

La Gestión de la Información se evidencia en la escuela utilizando la biblioteca o los CRA. A través de los textos de consulta se está llevando al estudiante a que resignifique el conocimiento obtenido desde la guía.

2. Demuestre los teoremas vistos en esta guía. Si tiene dificultades consulte sus demostraciones en libros de la biblioteca o el CRA.
3. Consulte otros teoremas y sus demostraciones sobre circunferencias, cuerdas, tangentes y secantes.



LA GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN SE OCUPA DEL ESTUDIO DE LOS **SISTEMAS** PARA LA ADQUISICIÓN, CONSERVACIÓN, TRANSMISIÓN, ORDENAMIENTO, APROVECHAMIENTO Y EVALUACIÓN DE LA INFORMACIÓN.

EUCLIDES, geómetra griego que actuó alrededor del año 300 A.D. Su obra más destacada, los **Elementos** está considerada entre las obras cumbres de la literatura universal. Su valor reside en haber **sistematizado** los conocimientos matemáticos de su época y en haber construido **un método científico** que sirvió de modelo a la matemática por más de 2000 años.

## ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

