

## **Instituciones participantes del proyecto**

FUNDACIÓN LUKER  
COMITÉ DE CAFETEROS DE CALDAS  
CORPOEDUCACIÓN  
ALCALDÍA DE MANIZALES -SECRETARÍA DE EDUCACIÓN  
INSTITUTO CALDENSE PARA EL LIDERAZGO  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

## **Educación Media con Énfasis en Educación para el Trabajo**

### **MÓDULO DE**

# **TRIGONOMETRÍA GRADO 10°**

## **UNIDADES 3 - 4 y 5**



# Presentación

---

La alianza por la Educación Rural de Antioquia ERA tiene el propósito de fortalecer la educación rural en todos los niveles, aportando en términos de cobertura, calidad y pertinencia, con el fin de contribuir significativamente al desarrollo social y económico de las comunidades en sus territorios. Para lograrlo, está implementando un programa de acompañamiento a las instituciones y sus sedes educativas, basado en los principios de las pedagogías activas, que articula todos los niveles educativos hasta llegar a la Universidad en el Campo.

Los principios de las pedagogías activas parten del ser: la persona como centro de un aprendizaje activo y significativo. Pretenden brindar una educación que facilite al individuo desempeñarse en los diferentes aspectos de la vida, ser feliz, proyectarse y ser útil a su comunidad.

El material de interaprendizaje es fundamental para el desarrollo de las pedagogías activas. Este centra el aprendizaje en el estudiante, responde de manera significativa a cada uno de los principios y favorece sustancialmente el desarrollo de competencias. Está compuesto por módulos que contienen guías con las que los estudiantes interactúan, dialogan, y en las que se promueven diferentes formas de trabajo como: trabajo individual, en equipo o en grupo. El trabajo con guías de interaprendizaje propicia la reflexión, el trabajo colaborativo y el desarrollo de la autonomía, a través de momentos que se relacionan y dan significado a los aprendizajes.

Además, los módulos son herramientas que le facilitan al docente su labor como mediador en el proceso de aprendizaje y posibilitan el trabajo en aulas multigrado (varios grados en una misma aula), donde el maestro debe acompañar las diferentes áreas del currículo.

Agradecemos al área de educación del Comité de Cafeteros de Caldas por compartir con las comunidades de Antioquia su experiencia y el material desarrollado; un material diseñado teniendo en cuenta las pautas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional y las necesidades del contexto rural.

Este material no pretende reemplazar al maestro y, por el contrario, es una oportunidad para fortalecer su rol dentro del aula de clase y en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Invitamos a los directivos docentes, maestros y estudiantes a utilizar de manera responsable este material, a adoptarlo y adaptarlo como apoyo al desarrollo del plan curricular. Hacerlo, dará mayores oportunidades al desarrollo rural de nuestra región.



**MÓDULO DE**

# **TRIGONOMETRÍA**

## **GRADO 10°**

**Autor**  
**Trigonometría**

Hernando Acevedo Ríos  
Licenciado en Educación Matemáticas - Física

**Asesoría y coordinación**

Mg. Rubiel Trujillo Arias  
Licenciado José Raúl Ospina O.



## Presentación

El presente módulo de autoinstrucción para grado 10<sup>o</sup> hace parte de la estrategia de ampliación de cobertura en educación media para el área rural del departamento de Caldas. Este material pedagógico, el cual sigue los principios y fundamentos del Programa Escuela Nueva, ofrece los contenidos generales del área de Trigonometría de acuerdo con los estándares curriculares y promueve en los estudiantes el desarrollo de competencias laborales generales, las cuales les permitirán desempeñarse exitosamente en su vida productiva futura.

El diseño de este material se realizó en el marco del Proyecto de **EDUCACIÓN MEDIA CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO** adelantado por el Comité de Cafeteros de Caldas, con el importante concurso de la FUNDACIÓN LUKER, quien aportó el capital semilla para el diseño y puesta en marcha de la propuesta de educación media para el área rural del departamento de Caldas, Corpoeducación, el Instituto Caldense para el Liderazgo, la Universidad Autónoma y la Secretaría de Educación de Manizales, estas últimas instituciones pusieron a disposición del proyecto su experiencia en el desarrollo de proyectos educativos, orientados hacia la educación para el trabajo.

Esta primera versión de módulos para grado 10<sup>o</sup> debe considerarse como material de prueba y por lo tanto estará sujeto a las modificaciones que se requieran, tanto en contenido como en presentación.

Agradecemos al autor por sus conocimientos, dedicación y esfuerzo puesto en el diseño del presente módulo de autoinstrucción con Metodología Escuela Nueva.

**ELSA INÉS RAMÍREZ MURCIA**  
Coordinadora Programas de Formación y Educación  
Comité de Cafeteros de Caldas

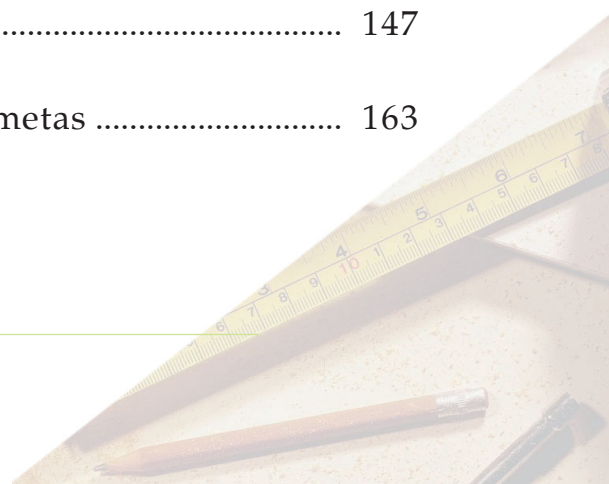




# CONTENIDO

## TRIGONOMETRÍA

	Pág.
<b>UNIDAD 3 ¿CÓMO SE RESUELVE UN TRIÁNGULO? .....</b>	<b>1</b>
Guía 1 Un triángulo rectángulo es mucho más que tener un ángulo de $90^\circ$ .....	3
Guía 2 Todo triángulo equilátero es isósceles. ¿Se resuelven lo mismo? .....	21
Guía 3 Los senos y cosenos tienen sus leyes .....	37
Guía 4 Los triángulos están en todas partes .....	57
<b>UNIDAD 4 EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA ESTÁN MUY RELACIONADAS .....</b>	<b>75</b>
Guía 1 ¿La línea recta es una realidad o una ilusión? .....	77
Guía 2 Líneas paralelas y perpendiculares .....	95
Guía 3 La circunferencia es una figura perfecta .....	117
Guía 4 Lo maravilloso de las parábolas .....	133
Guía 5 La elipse: Así giran los planetas .....	147
Guía 6 La hipérbola: Así se mueven los cometas .....	163



	Pág.
<b>UNIDAD 5 ESTADÍSTICA, PROCESOS MATEMÁTICOS Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS .....</b>	<b>183</b>
Guía 1 Podemos aprender mucho sobre permutaciones y combinaciones .....	185
Guía 2 ¿Cuál es la probabilidad de tener éxito? .....	199
Guía 3 ¿Qué son las medidas de dispersión? .....	217
Guía 4 Existen muchas maneras de mirar un objeto .....	233
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>253</b>



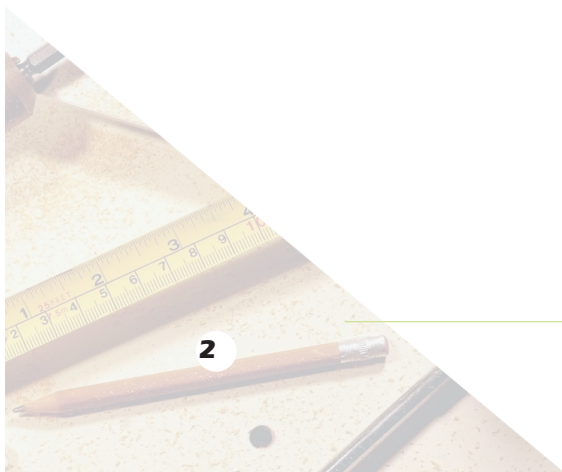
# UNIDAD 3

## ¿CÓMO SE RESUELVE UN TRIÁNGULO?



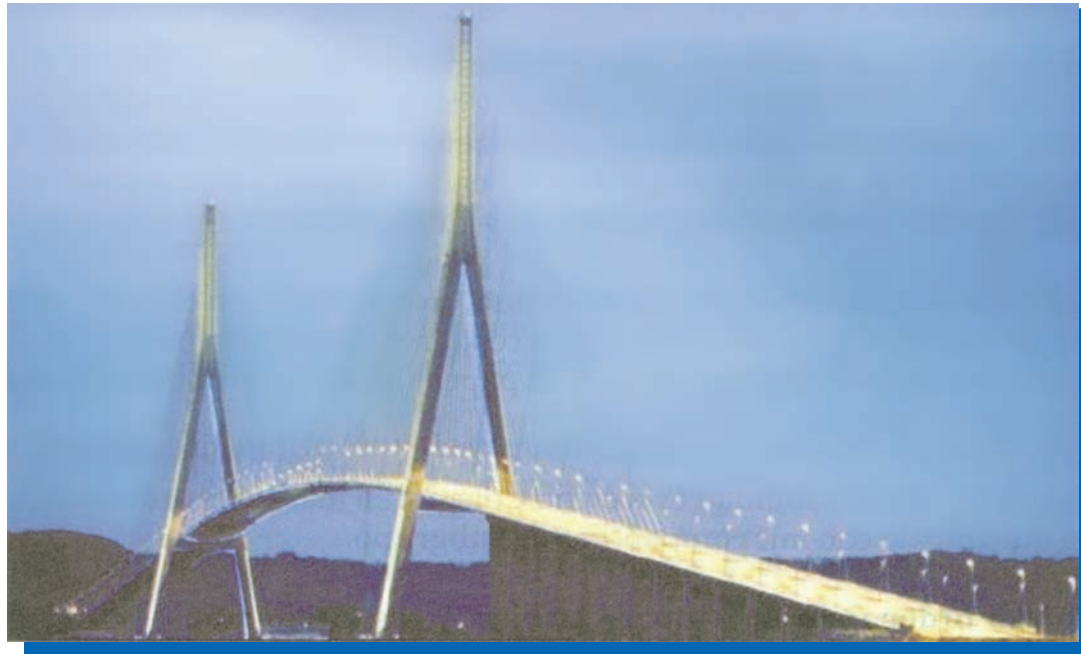
### LOGROS

- ✓ Interpreta y resuelve problemas de la vida cotidiana que requieren la solución de un triángulo rectángulo.
- ✓ Resuelve triángulos isósceles y equiláteros haciendo uso de los elementos y propiedades de los triángulos rectángulos.
- ✓ Identifica y aplica las leyes del seno y coseno en la resolución de triángulos.
- ✓ Aplica los métodos de solución de un triángulo cualquiera para interpretar y resolver problemas de la vida real.
- ✓ Contribuye con su actitud y comportamiento a mejorar el ambiente (**RESPONSABILIDAD AMBIENTAL**).
- ✓ Maneja acertadamente el conflicto y contribuye positivamente a su solución (**MANEJO DEL CONFLICTO**).
- ✓ Resuelve problemas en forma acertada y oportuna (**SOLUCIÓN DE PROBLEMAS**).
- ✓ Reconoce y valora sus potencialidades y limitaciones, emocionales, afectivas e intelectuales (**COMPETENCIA PERSONAL**).



# Guía 1

## UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ES MUCHO MÁS QUE TENER UN ÁNGULO DE $90^\circ$



### Indicadores de logros

- ✓ Reconoce los elementos de un triángulo rectángulo en un problema dado.
- ✓ Resuelve triángulos rectángulos conociendo un ángulo agudo y la hipotenusa, un cateto y un ángulo agudo, la hipotenusa y un cateto y los dos catetos.
- ✓ Aplica los conceptos de ángulos de inclinación y depresión en la solución de problemas cotidianos.
- ✓ Hace uso racional de los recursos naturales (**RESPONSABILIDAD AMBIENTAL**).
- ✓ Mantiene ordenado su sitio de trabajo.
- ✓ Participa activamente en los proyectos de mejoramiento ambiental, que permiten su vinculación.
- ✓ Se compromete positivamente en la solución de los problemas que afectan al medio ambiente.
- ✓ Reconoce y analiza diferentes problemas del medio ambiente.

## Los problemas ambientales son mis problemas y los de mi comunidad

Con los compañeros de subgrupo, leemos y comentamos el siguiente contenido.

En esta guía tendremos en cuenta la RESPONSABILIDAD AMBIENTAL, definida como la capacidad para relacionarse de una manera racional y armónica con el ambiente.

La responsabilidad ambiental debe constituirse en un valor que trasciende de lo individual a lo comunitario y se enriquece con su reflexión permanente desde el ámbito escolar, constituyéndose en un factor decisivo para el éxito de la vida institucional y de la comunidad. Basado en lo anterior, debo pensar en cómo puedo contribuir en el aprovechamiento y cuidado del medio ambiente.

Mi primera responsabilidad está en mi casa, en colaborar con el aseo y orden de las cosas (un lugar para cada cosa y cada cosa en su lugar) y en hacer uso racional de los servicios (no malgastar el agua, el papel higiénico, no abusar del teléfono, la televisión, etc.).

Mi segunda responsabilidad está en mi Colegio, en mantener ordenada la mesa en la que trabajo con mis compañeros de subgrupo.

### Empiezo ordenando mi sitio de trabajo y los alrededores.

Mi tercera responsabilidad es participar activamente en un proyecto de mejoramiento ambiental en el entorno en que vivo, que será definido más adelante.



## UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ES MUCHO MÁS QUE TENER UN ÁNGULO DE 90°

En esta Unidad nos daremos cuenta de la importancia de los triángulos, especialmente de los triángulos rectángulos.

Bajo la coordinación del ayudante de subgrupo, realizo las siguientes actividades:

1. Respondo oralmente las siguientes preguntas:
  - a. ¿Qué es un triángulo rectángulo?



- b. ¿Cuánto suman los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?
- c. ¿Cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo?
- d. ¿Cuál es el teorema más importante sobre triángulos rectángulos?
- e. ¿Qué dice ese teorema?

2. Dibujo en mi cuaderno:

- a. Un triángulo rectángulo con todos sus elementos.
- b. Un triángulo rectángulo isósceles y coloco las medidas de sus lados en centímetros.
- c. Un triángulo rectángulo con un ángulo de  $37^\circ$ . ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo? y ¿Cuánto miden sus lados?

3. Aplico el Teorema de Pitágoras para comprobar la exactitud de las medidas del triángulo anterior.

4. Si un lado de un triángulo rectángulo mide 5 cm. y la hipotenusa mide 13 cm. ¿Cuánto mide el otro lado? Compruebo mi respuesta.

5. Los conceptos matemáticos y de geometría son básicos para el desarrollo de la ingeniería. ¿Qué aplicación tendrían estos conceptos en el Medio Ambiente?

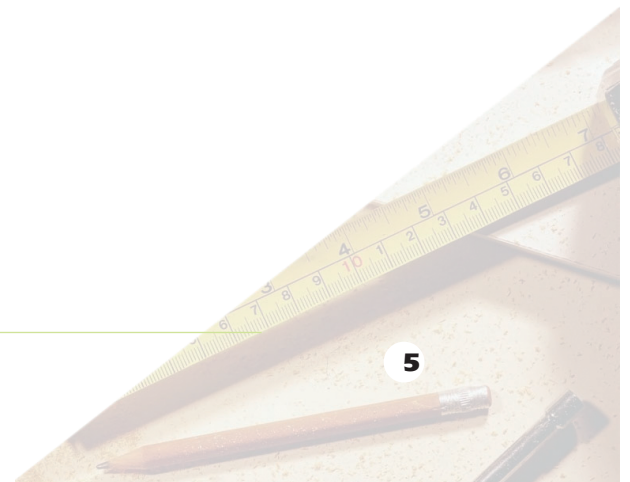
**Socializo mis respuestas ante mis compañeros y el profesor.**



## SOLUCIONEMOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

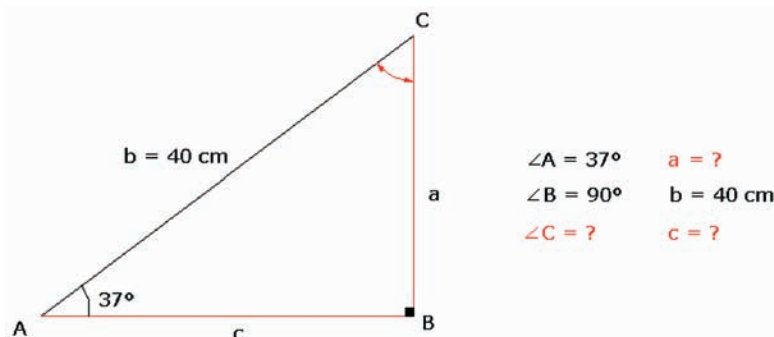
Analizo los siguientes ejemplos donde se resuelven solamente triángulos rectángulos. Resuelvo en mi cuaderno los ejercicios propuestos.

Resolver un triángulo consiste en calcular los lados y ángulos de un triángulo, cuando se conocen algunos de ellos.



### EJEMPLO 1. Se conoce un ángulo agudo y la hipotenusa.

Resuelvo un triángulo ABC rectángulo en B, si la longitud de su hipotenusa es 40 cm. y el ángulo en A tiene  $37^\circ$ .



### Cálculo de $\angle C$

Por ser el  $\Delta ABC$  rectángulo, los ángulos A y C son complementarios.

$$\angle C = 90 - \angle A = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

### Cálculo de a

La función **seno** me permite escribir:

$$\text{sen } A = \frac{a}{b}$$

Despejo a:

$$a = b \text{ sen } A$$

$$a = 40 \text{ cm.} \times \text{sen } 37^\circ$$

$$a = 40 \text{ cm.} \times 0.6$$

$$a = 24 \text{ cm.}$$

### Cálculo de c

Si relaciono a c con los datos conocidos A y b.

$$\text{cos } A = \frac{c}{b}$$

### Despejo c

$$c = b \text{ cos } A$$

$$c = 40 \text{ cm} \times \text{cos } 37^\circ$$

$$c = 40 \text{ cm} \times 0.8$$

$$c = 32 \text{ cm.}$$

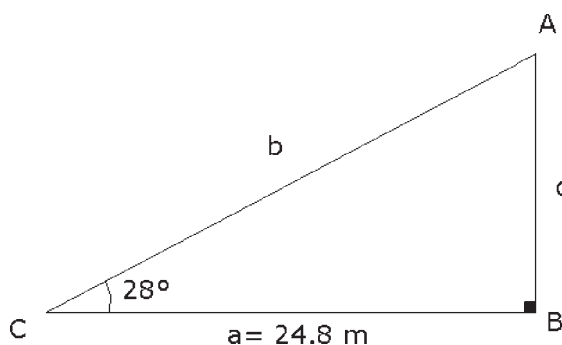


## EJERCICIOS.

Resuelvo el triángulo ABC, rectángulo en B, con los datos dados.

1.  $A = 34^\circ$ ,  $b = 12.7$  cm.
2.  $A = 41^\circ 27'$ ,  $b = 18.83$  cm.
3.  $A = 27^\circ 15' 10''$ ,  $b = 24.75$  cm.
4.  $A = \pi/3$ ,  $b = 1/2$  ft.
5.  $A = \pi/12$ ,  $b = 0.4$  m.

EJEMPLO 2. Se conoce un cateto y un ángulo agudo.



Resuelvo el triángulo ABC de la figura, si  $a = 24.8$  m y  $\angle C = 28^\circ$ .

Debo averiguar:  
 $\angle A$ , "b" y "c".

### Cálculo de $\angle A$

$$\angle A = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$$

### Cálculo de "b"

Debo relacionar a "b" con los datos conocidos "a" y  $\angle C$ . La función coseno me permite hacerlo.

$$\cos C = \frac{a}{b}$$

Despejo "b":

$$b = \frac{a}{\cos C}$$

$$b = \frac{24.8 \text{ m}}{\cos 28^\circ} = \frac{24.8 \text{ m}}{0.883} = 28.1 \text{ m} \approx 28 \text{ m}$$



## Cálculo de "c"

La función tangente me relaciona el valor de "c" con los valores conocidos.

$$\tan C = \frac{c}{a}$$

Despejo c:

$$c = a \tan C$$

$$c = 24.8 \text{ m} \times \tan 28^\circ$$

$$c = 24.8 \text{ m} \times 0.532$$

$$c \approx 13.2 \text{ m.}$$

## EJERCICIOS.

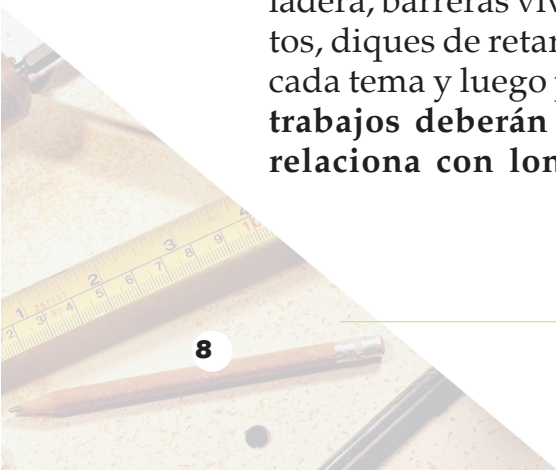
Resuelva el triángulo ABC rectángulo en B, con los datos dados.

1.  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $\angle C = 57^\circ$
2.  $\angle C = 72^\circ 46'$ ,  $a = 75 \text{ cm}$
3.  $a = 0.036 \text{ Km}$ ,  $\angle C = 40^\circ 20'10''$ .
4.  $a = \sqrt{3} \text{ m.}$ ,  $\angle C = \frac{\pi}{15}$

Pensemos un poco en el proyecto de mejoramiento ambiental. Uno de los problemas ambientales se genera con las prácticas que agotan y empobrecen los suelos como el monocultivo, el pastoreo libre o excesivo, las quemadas de sabanas y matorrales; todo esto deja las tierras expuestas al peligro de la erosión.

Podemos pensar en dos soluciones:

- a) Hacer un proyecto de investigación sobre prácticas para evitar la erosión: rotación de cultivos, cultivos en contornos, cultivos en franjas, zanjas de ladera, barreras vivas, terrazas, cultivos de cobertura, cortinas rompevientos, diques de retardación y revegetación. Por subgrupos investigarán cada tema y luego pueden socializar los trabajos con la comunidad. **Los trabajos deberán tener aplicaciones trigonométricas en lo que se relaciona con longitudes, perímetros, pendientes, áreas.**





b) Preparar abono orgánico (compost) para crear un ambiente propicio para el desarrollo de los microorganismos encargados de la degradación de la materia orgánica y controlar parámetros físicos, químicos y biológicos; para obtener un **compost** de buena calidad, deben tenerse en cuenta las siguientes indicaciones:

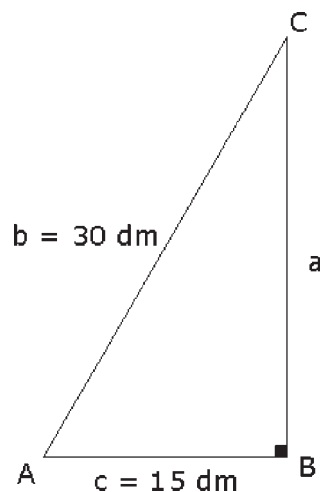
- \* Construcción de la fosa o cerca.
- \* Selección y localización de material para cargar la fosa.
- \* Relleno por capas.

En la construcción de la fosa se recomienda una medida de 9 m de largo por 4 m de ancho y 90 cm. de profundidad. La fosa debe hacerse con una ligera pendiente. **Utilice los conocimientos de trigonometría para los cálculos correspondientes.**

Volvemos a la trigonometría para seguir analizando los ejemplos. Consigno los ejercicios resueltos en el cuaderno.

### EJEMPLO 3. Se conoce la hipotenusa y un cateto

Resuelvo un triángulo ABC, rectángulo en B, si el cateto c mide 15 dm y la hipotenusa b = 30 dm. Además, encuentro su área.



Valores conocidos:

$$\begin{aligned} \angle B &= 90^\circ \\ c &= 15 \text{ dm.} \\ b &= 30 \text{ dm.} \end{aligned}$$

Valores desconocidos

$$\begin{aligned} a &= ? \\ \angle A &= ? \\ \angle C &= ? \\ \text{Área} &= ? \end{aligned}$$

MANTENGA  
ORDENADO  
SU  
SITIO  
DE  
TRABAJO

### Cálculo de "a"

Aplico el Teorema de Pitágoras

$$a^2 + c^2 = b^2$$

$$a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{900 - 225} \approx 26 \text{ dm.}$$

### Cálculo de $\angle A$

$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{15 \text{ dm}}{30 \text{ dm}} = 0.5$$

$$\angle A = \boxed{60^\circ} \quad ( \boxed{0} \boxed{.} \boxed{5} \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{cos}} ).$$

### Cálculo de $\angle C$

$$\angle C = 90^\circ - 60^\circ = \boxed{30^\circ}$$

### Cálculo del Área

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{c \times a}{2} \quad (\text{base} \times \text{altura, dividido 2})$$

$$\text{Área} = \frac{15 \text{ dm} \times 26 \text{ dm}}{2} = 195 \text{ dm}^2$$

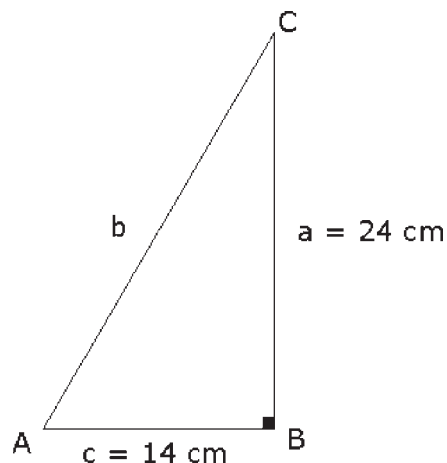
EJERCICIOS: Resuelva el triángulo ABC, rectángulo en B. Halle también el ÁREA.

1.  $b = 60 \text{ m}$ ,  $c = 43 \text{ m}$
2.  $c = 18.5 \text{ m}$ ,  $b = 37.9 \text{ m}$
3.  $c = 2\sqrt{3} \text{ km}$ ,  $b = 4000 \text{ m}$



#### EJEMPLO 4. Se conocen los dos catetos

Resuelvo un triángulo rectángulo ABC del que se conocen los catetos  $a = 24$  cm. y  $c = 14$  cm. Calculo también su área y perímetro.



Datos:  
 $a = 24$  cm  
 $c = 14$  cm  
 $\angle B = 90^\circ$

Incógnitas:  
 $\angle A = ?$   
 $\angle C = ?$   
 $b = ?$

Área = ?  
Perímetro = ?

#### Cálculo de "b"

Aplico el Teorema de Pitágoras

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{24^2 + 14^2} = 27.7848$$

$$b \approx 28 \text{ cm.}$$

#### Cálculo del ángulo A

La función tangente me relaciona el ángulo A con los dos catetos.

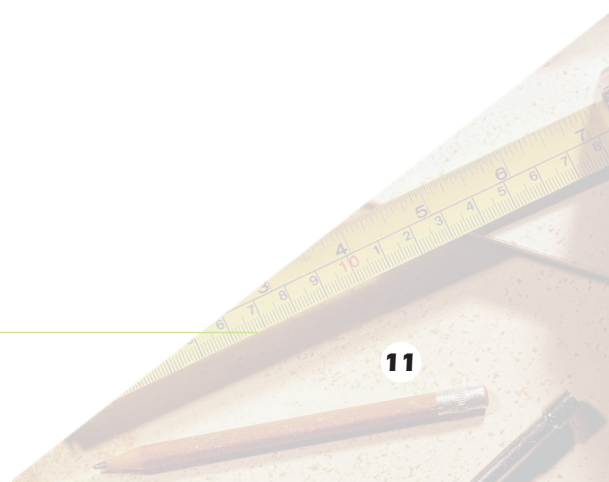
$$\tan A = \frac{a}{c} = \frac{24 \text{ cm}}{14 \text{ cm}} = 1.71428$$

$$\angle A = 59^\circ 44' 36.8'' \quad ( \boxed{1} \boxed{.} \boxed{7} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{2} \boxed{8} \boxed{\text{INV}} \boxed{\tan} ).$$

$$\angle A \approx 59^\circ 44' 37''$$

#### Cálculo de $\angle C$

$$\angle C = 90^\circ - A = 90^\circ - (59^\circ 44' 37'') = 30^\circ 15' 23''$$



## Cálculo del Área

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{c \times a}{2} = \frac{14 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}}{2} = \boxed{168 \text{ cm}^2}$$

## Cálculo del Perímetro

$$\text{Perímetro} = a + b + c$$

$$\text{Perímetro} = 24 \text{ cm.} + 28 \text{ cm.} + 14 \text{ cm.} = \boxed{66 \text{ cm.}}$$

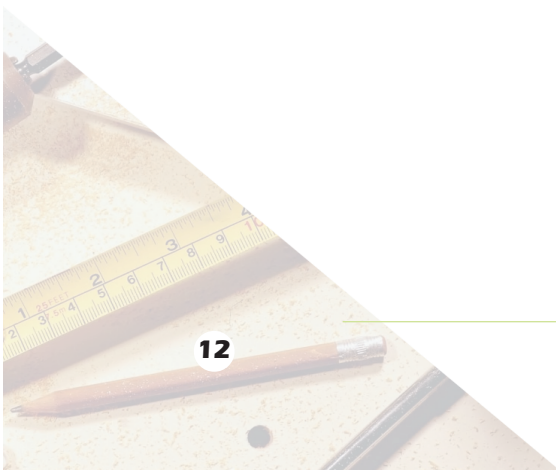
EJERCICIOS. Resuelva el triángulo ABC, rectángulo en B. Halle también su área y perímetro.

1.  $a = 200 \text{ Km.}$ ,  $b = 354 \text{ Km.}$
2.  $c = 31.6 \text{ cm.}$ ,  $a = 12.3 \text{ cm.}$

**Demostremos actitud positiva hacia los problemas que afectan el medio ambiente.** Analizo con mis compañeros de subgrupo algunos apartes del artículo "S.O.S POR LOS RECURSOS NATURALES" escrito por Guillermo Ceballos Espinosa en La Patria del domingo 21 de marzo de 2004.

"El problema fundamental que estamos percibiendo las generaciones actuales y cuyas funestas consecuencias constituyen las más graves amenazas para la posteridad, es el que se relaciona con el agotamiento de los recursos naturales renovables y no renovables, no sólo en Manizales sino a nivel nacional y mundial..."

"La forma acelerada como se agrava la situación, exige un desarme de consideraciones nacionalistas, ideológicas y políticas para establecer un frente común capaz de resolver esta tenebrosa problemática. Estamos convencidos de que es la puerta grande de la Educación, el mejor medio para entrar de una manera inmediata y decidida a formar la verdadera conciencia que conduzca a la obtención de las mejores condiciones para alcanzar el éxito..."





“De mi libro de fábulas, desgloso para el caso la siguiente:

### **El Hombre y la naturaleza**

Ha llegado el momento señores  
De pensar que el planeta se acaba,  
Pues si ayer medio mundo bastaba  
Hoy sufrimos zozobras y horrores

Criminal es el hombre que en vida,  
Desechando su innato talento,  
So pretexto de hacerse al sustento  
A Natura destruye y olvida

Si seguís ese afán destructor  
Sin recíproca acción renovable,  
Ya tendréis un planeta espantable  
Y a tus hijos con hambre y pavor.



Hay que caminar y sembrar árboles”



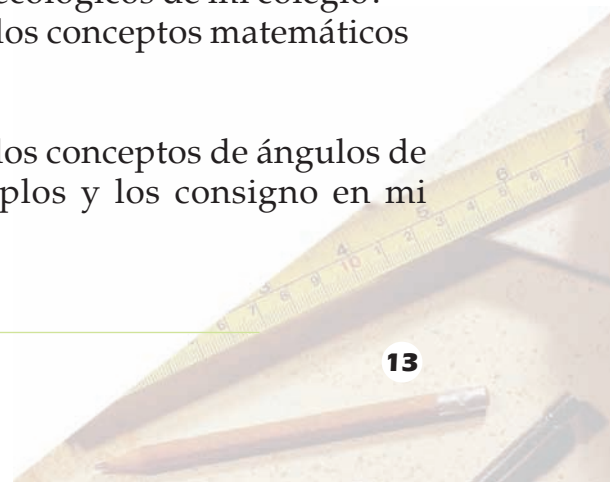
#### CÓMO SEMBRAR UN ÁRBOL

1. Seleccionar el sitio
2. Limpieza y plateo
3. Ahoyado
4. Preparación del terreno
5. Plantación
6. Apisonado
7. Riego
8. Cercado
9. Protección y manejo.

#### **Respondo en mi cuaderno las siguientes preguntas:**

1. ¿Qué puedo hacer para ayudar a resolver el problema de los **recursos naturales**?
2. ¿En qué proyecto de **mejoramiento ambiental** me gustaría participar? Propongo uno. (Prácticas para evitar la erosión, construcción de composteaderos, etc.).
3. ¿Cuál es mi compromiso, frente a los proyectos ecológicos de mi colegio?
4. ¿Al definir el proyecto, qué aplicación tendrían los conceptos matemáticos vistos, en el desarrollo del mismo?

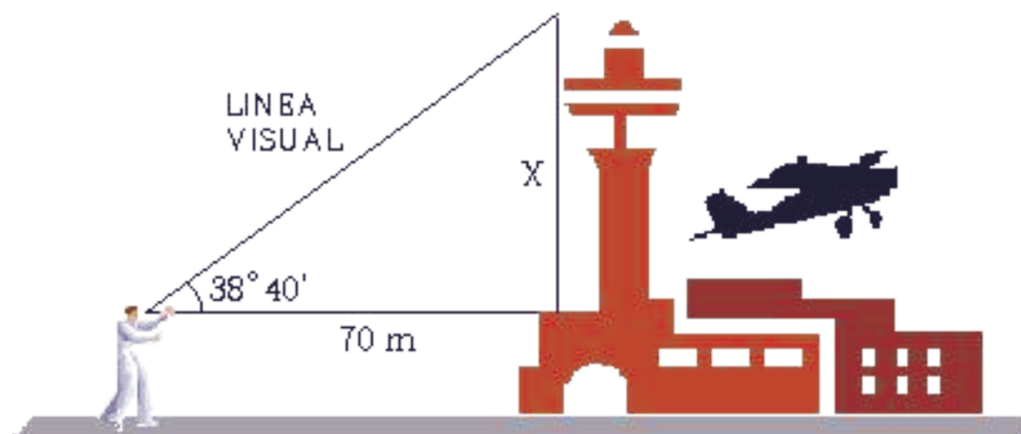
Regresemos de nuevo a la trigonometría. Analizo los conceptos de ángulos de elevación y depresión con sus respectivos ejemplos y los consigno en mi cuaderno.



## ÁNGULO DE ELEVACIÓN

El **ángulo de elevación** es el ángulo formado por la horizontal y la línea visual del observador de un objeto situado encima de la horizontal.

EJEMPLO 5. La parte más alta de una torre de control de un aeropuerto se observa en un terreno horizontal desde un punto que dista 70 m. de su pie. El ángulo de elevación de dicho punto a la cúspide de la torre mide  $38^{\circ}40'$ . Encuentro la altura de la torre.



Se conoce un cateto y un ángulo agudo.

$$\tan (38^{\circ} 40') = \frac{x}{70}$$

$$x = 70 \tan 38^{\circ}40'$$

$$x = 70 \times 0.8002$$

$$x = 56 \text{ m}$$

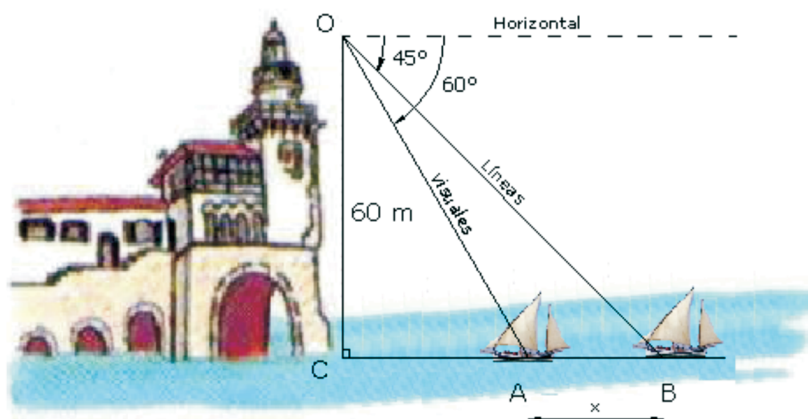
La torre de control tiene 56 m de altura (debo sumarle la altura del hombre)  
 $\approx 57.8 \text{ m}$

## ÁNGULO DE DEPRESIÓN

El **ángulo de depresión** es el ángulo formado por la horizontal y la línea visual del observador de un objeto situado por debajo de la horizontal.

EJEMPLO 6. Desde un punto de observación en un edificio frente al océano, los ángulos de depresión de dos botes alineados son  $45^{\circ}$  y  $60^{\circ}$ . Encuentro la distancia entre los botes si el punto de observación está a una altura de 60 metros.





Los ángulos de depresión están indicados en la figura, y "x" es la distancia entre los botes A y B.

Para calcular la distancia "x" entre los dos botes basta con restar CA de CB:

$$X = CB - CA$$

### **Cálculo de CB**

En  $\triangle OCB$ , el ángulo COB mide  $45^\circ$  (Complemento del ángulo de depresión de  $45^\circ$ ). Aplico la tangente del  $\angle COB$  ( $45^\circ$ ).

$$\tan 45^\circ = \frac{CB}{60 \text{ m}}$$

$$CB = 60 \tan 45^\circ = 60 \times 1 = 60 \text{ m}$$

### **Cálculo de CA**

En  $\triangle OCA$ , el ángulo COA mide  $30^\circ$  (Complemento del ángulo de depresión de  $60^\circ$ ). Aplico la tangente del  $\angle COA$  ( $30^\circ$ ).

$$\tan 30^\circ = \frac{CA}{60 \text{ m}}$$

$$CA = 60 \tan 30^\circ = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

$$x = CB - CA = 60 \text{ m} - 20\sqrt{3} \text{ m} = 20(3 - \sqrt{3}) \text{ m.}$$

$$x \approx 25 \text{ m}$$





## APLICACIÓN

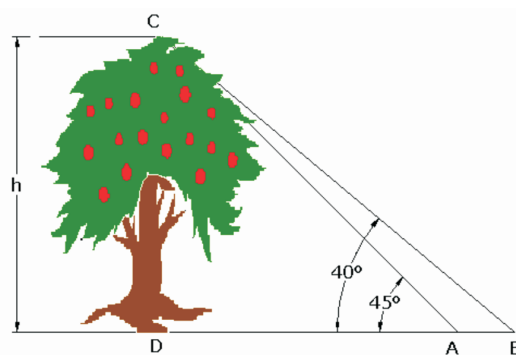
La responsabilidad ambiental es la capacidad para relacionarse de una manera racional y armónica con el ambiente. A partir de hoy, y como miembro participativo de la sociedad, me comprometo a poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- \* Cerrar la llave mientras me enjabono, lavo la loza, o me cepillo los dientes.
- \* Controlar goteras y escapes, una pequeña gotera desperdicia 90 litros de agua al día.
- \* Colocar una botella de 2 litros en el fondo del tanque del inodoro para ahorrar dos litros de agua en cada desocupada, pues el vaciado lo produce la presión y no la cantidad.
- \* No utilizar desodorantes, insecticidas, pinturas, aceites, ambientadores que vengan en presentación de aerosol.
- \* Sembrar árboles cerca de los nacimientos de agua.
- \* Evitar las quemadas, estas empobrecen el suelo, generan erosión primero y más tarde desierto.

La parte matemática también es muy importante y tiene mucha relación con problemas del medio ambiente.

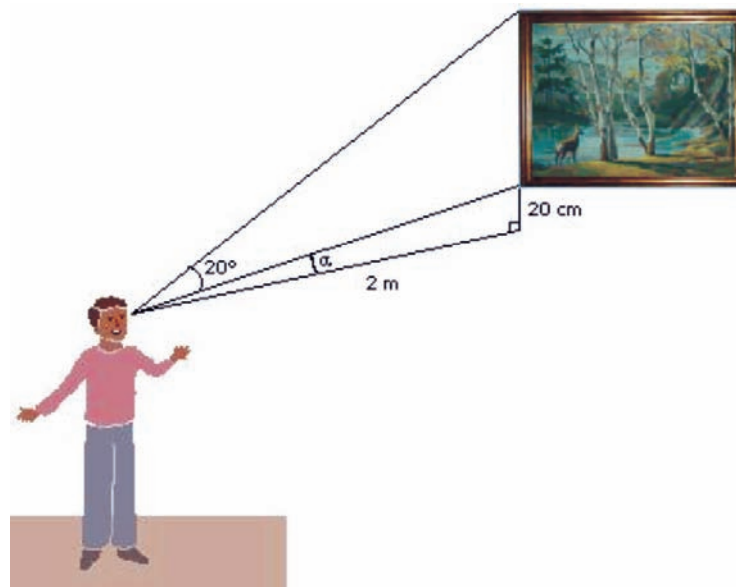
Resuelvo en mi cuaderno los siguientes problemas

1. Un árbol está en la orilla de un lago. Un observador está situado en dirección opuesta en la otra orilla y los separa el agua. Dispone de instrumentos para medir ángulos y pequeñas distancias. Sobre el piso plano mide una distancia de 3 m y los ángulos que forman las visuales que van de los extremos del segmento a la parte alta del árbol son  $45^\circ$  y  $40^\circ$  respectivamente. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿A qué distancia del árbol está el punto B?



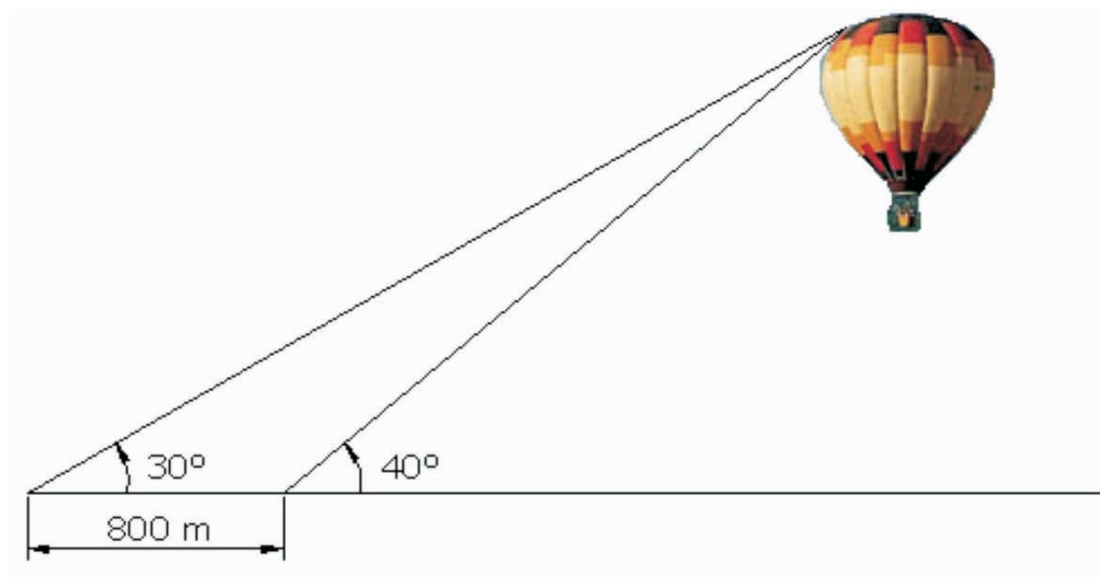
$h$  = altura del árbol.  
 $AB$  = distancia de 3 m.  
 $\angle A$  y  $\angle B$  = ángulos de elevación.  
 $DA$  = Ancho del lago.

2. Un cuadro localizado sobre una pared es tal que su borde inferior está a una distancia de 20 cm. sobre el nivel del ojo de un observador situado a 2 m de la pared. Si el ángulo que forman las visuales con los bordes inferior y superior del cuadro mide  $20^\circ$ . ¿Cuál es la altura del cuadro?



3. Se lanza un cohete espacial, a nivel del mar y sube en un ángulo constante de  $68^\circ 20'$  recorriendo 15.000 m. Determine la altura que lleva el cohete respecto al nivel del mar en ese momento. Haga el dibujo.

4. Hallar a qué altura se encuentra el globo sobre el plano del suelo.



5. Calcular el ancho de un río, si un observador situado en la parte alta de un terreno, a 90 m de altura, ve el otro lado del río bajo un ángulo de  $60^\circ$  con respecto a la horizontal. Haga una representación gráfica.



## ¿DESEA SABER MÁS?

Una manera de demostrar actitud positiva hacia los problemas que afectan el medio ambiente es ampliar la información recibida en esta guía.

1. Consulte en LA PATRIA del domingo 21 de marzo de 2004 el artículo "S.O.S por los recursos naturales" escrito por Guillermo Ceballos Espinosa. También puede hacerlo por Internet ([www.lapatria.com](http://www.lapatria.com)).
2. Consulte la cartilla EL SABER AMBIENTAL, propuesta de capacitación y sensibilización ambiental de las comunidades rurales y urbanas de la zona cafetera del departamento de Caldas, apoyada por el Fondo para la Acción Ambiental y el Comité Departamental de Cafeteros de Caldas.
3. Consulte el texto EDUCACIÓN AMBIENTAL 3 del Ministerio de Educación Nacional cuyos autores son Gladys Patiño de Santafé y Mariano Useche Mogollón, profesores de la Universidad de Pamplona.
4. Consulte el CD PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS de la Federación Nacional de Cafeteros y Gobernación de Caldas y amplíe sus conocimientos sobre Triángulos Rectángulos y el Teorema de Pitágoras. Puede solicitar otros temas al profesor.

Siga los siguientes pasos:

- \* Saltar introducción
- \* Descartes
- \* Unidades Didácticas
- \* Demostración del Teorema de Pitágoras

Analizo cada demostración y consigno en el cuaderno la que me parezca más interesante.

## ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

