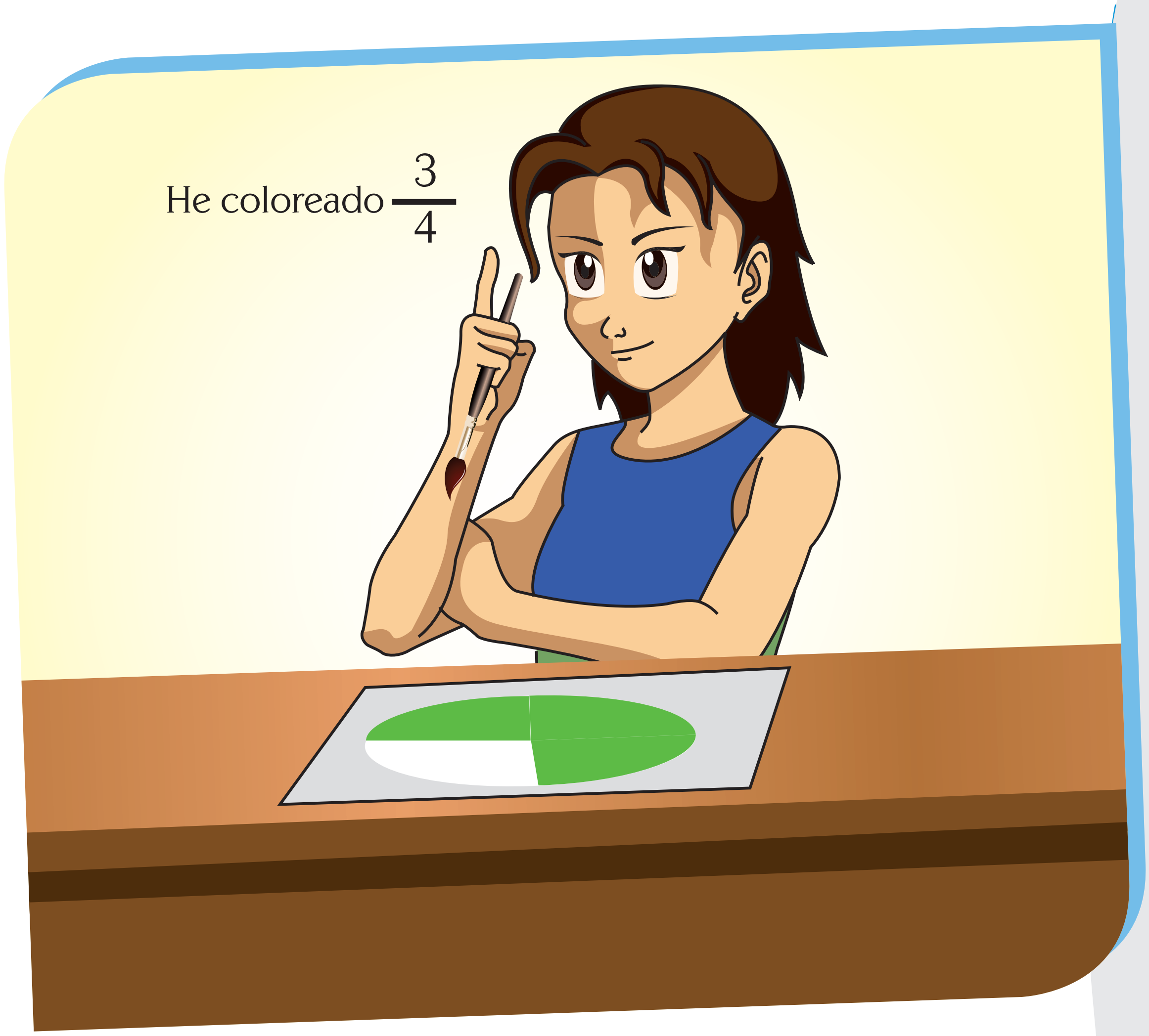
Guía 5

Operaciones con los números racionales positivos



Indicadores de Desempeño

Conceptual
Identifica operaciones de suma, resta, multiplicación y división en la resolución de problemas con números racionales.

Procedimental
Resuelve problemas que requieran de operaciones básicas con racionales positivos.

Actitudinal
Participa activamente en la solución de situaciones matemáticas.

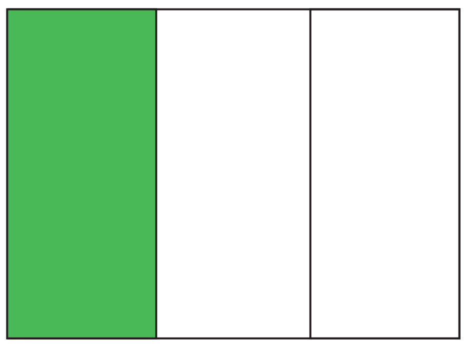
A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo las siguientes situaciones elaborando el dibujo de lo que representan:

   a. En una fiesta de cumpleaños, repartieron $\frac{8}{12}$ de la torta. ¿Qué parte de la torta quedó sin repartir?

   b. En una finca hay un terreno sembrado que tiene la siguiente forma rectangular. Si la parte pintada corresponde al sembrado de café, ¿a qué fraccionario corresponde el sembrado de café con respecto a la totalidad del terreno para sembrar?



   c. En una granja, de cada 10 animales, 5 son aves, 3 son vacas y 2 ovejas. Represento la fracción de la relación correspondiente de cada grupo de animales con respecto a la totalidad.

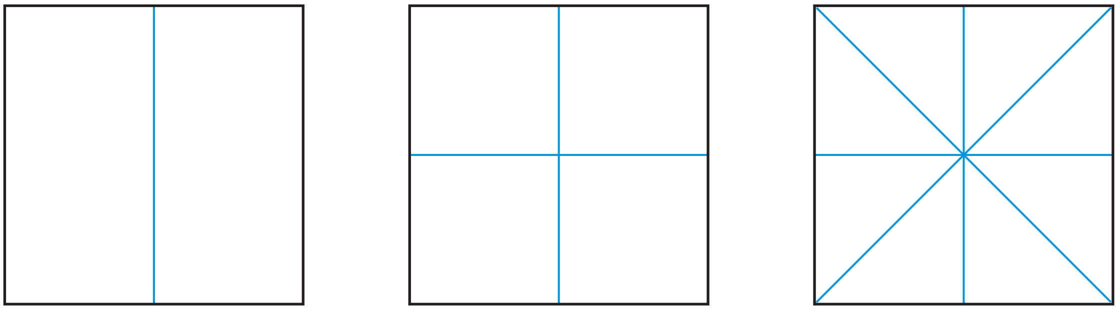
TRABAJO EN PAREJAS

2. Realizamos las siguientes acciones usando material real y luego lo representamos en el cuaderno:

   a. Tres estudiantes cuentan con dos hojas de papel tamaño carta. ¿De qué manera se pueden repartir el papel para que cada uno reciba la misma cantidad?

   b. Se quiere pintar una hoja cuadrada de tal forma que las partes queden del mismo tamaño y cada una con un color distinto. ¿De cuántas maneras distintas puede pintarla con dos colores?, ¿de cuántas maneras distintas si fueran cuatro colores?, ¿y si fueran ocho colores?

c. Hacemos los dibujos en el cuaderno y escribimos en cuántas partes está dividido cada cuadrado.



d. Escribimos el número racional correspondiente en cada uno de los casos:

- ✓ Si en cada cuadrado se sombrea una de las partes.
- ✓ Si en cada cuadrado se sombrea dos de las partes.

TRABAJO EN EQUIPO

3. Respondemos las siguientes preguntas.

a. Si tenemos $\frac{2}{3}$ de chocolatina ¿qué cantidad nos hace falta para tener una unidad?

b. Si tenemos $\frac{7}{5}$ de chocolatina ¿qué le sobra para tener una unidad?

c. En un grupo de seis estudiantes de la mesa hay dos niñas. Escribimos las fracciones que representan a los niños, a las niñas con respecto al número total de integrantes de la mesa. Escribo la fracción correspondiente.

B Fundamentación Científica

TRABAJO EN EQUIPO

1. Leemos acerca de las *operaciones con racionales positivos* y elaboramos un mapa conceptual con las ideas principales:

En la primera guía de esta unidad se abordó algo de los números racionales positivos, que son aquellos que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$. Cada operación con números racionales requiere de procedimientos con sus propias reglas.

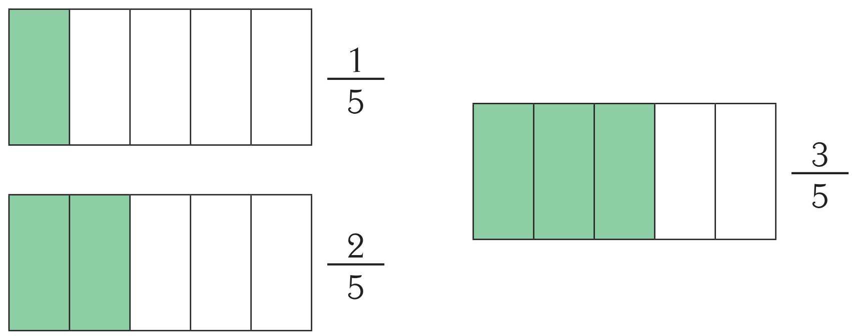
Sumar números racionales positivos:

Requiere que los sumandos tengan el mismo denominador y se suman los numeradores como los números enteros.

Ejemplo 1

Se pretende sumar $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$

Se puede representar



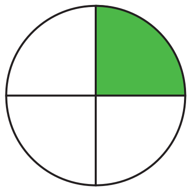
$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{(1+2)}{5} = \frac{3}{5}$$

En caso de que los denominadores sean diferentes, se realiza el proceso de buscar racionales equivalentes a los sumandos para que tengan el mismo denominador y efectuar la suma.

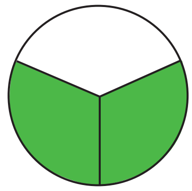
Ejemplo 2

$\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$	Tienen diferente denominador los sumandos
$\frac{3}{12} + \frac{8}{12}$	Se busca un denominador común de ambos sumandos a través del mínimo común múltiplo de 3 y 4 es 12. Se amplifica cada racional para obtener los racionales equivalentes a los dados, así: $\frac{1}{4} = \frac{(1 \times 3)}{(4 \times 3)} = \frac{3}{12}$ $\frac{2}{3} = \frac{(2 \times 4)}{(3 \times 4)} = \frac{8}{12}$
$\frac{(3+8)}{12} = \frac{11}{12}$	Se realiza la suma de los numeradores como los enteros.

Se puede representar:

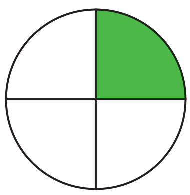


$\frac{1}{4}$

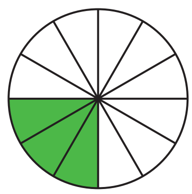


$\frac{2}{3}$

Como no poseen el mismo denominador se busca el denominador $\frac{1}{4}$. Al multiplicar el numerador y el denominador por 3 queda como resultado un fraccionario equivalente así:

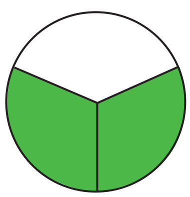


$$\frac{(1 \times 3)}{(4 \times 3)} = \frac{3}{12}$$

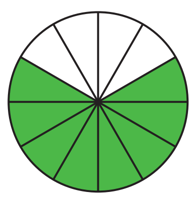


$\frac{3}{12}$

De igual manera, se realiza el mismo procedimiento con el segundo fraccionario:



$$\frac{(2 \times 4)}{(3 \times 4)} = \frac{8}{12}$$



$\frac{8}{12}$

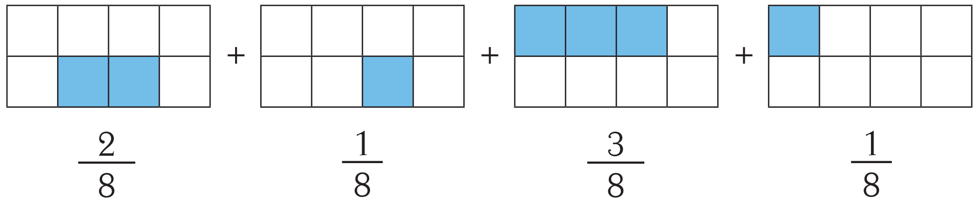
Ya se tienen los dos fraccionarios con el mismo denominador, quedando así:

$$\frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

Ejemplo 3

Un grupo de amigos para celebrar el cumpleaños de Mateo, compraron una torta que está partida en 8 pedazos, si Mateo se come $\frac{3}{8}$, Manuela $\frac{1}{8}$, Andrés $\frac{2}{8}$, Fernanda $\frac{1}{8}$. ¿Cuánto sobró de torta?

a. Representamos cada una de las cantidades que se comieron así:



Si observamos cada gráfica, cada pedazo sombreado es un octavo y si los contamos nos daría un total de siete octavos.

Simbólicamente sería:

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{(3 + 1 + 2 + 1)}{8} = \frac{7}{8}$$

Realmente sobró un octavo, simbólicamente:

$$1 - \frac{7}{8} = \frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Restar números racionales positivos:

Se requiere que tanto el minuendo como el sustraendo tengan el mismo denominador. Si no es así, se procede a amplificar o simplificar el racional hasta tanto se obtenga el mismo denominador.

Ejemplo 4

$$\frac{4}{7} - \frac{2}{11}$$

Se procede a amplificar las dos cantidades de tal manera que tengan el mismo denominador para ser restadas:

Para que ambos racionales queden con el denominador 77:

$$\frac{(4 \text{ x } 11)}{(7 \text{ x } 11)} \quad \text{da como resultado:} \quad \frac{44}{77}$$

$$\frac{(2 \text{ x } 7)}{(11 \text{ x } 7)} \quad \text{da como resultado:} \quad \frac{14}{77}$$

Luego, la sustracción $\frac{44}{77} - \frac{14}{77}$ da como resultado: $\frac{30}{77}$

Multiplicación de números racionales positivos:

La regla es multiplicar tanto numeradores como los denominadores entre sí. El producto obtenido se expresa con un racional irreductible que se obtiene a través del proceso de simplificación.

Ejemplo 5

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{(2 \times 4)}{(3 \times 5)} = \frac{8}{15}$$

$\frac{8}{15}$ es un racional irreductible porque 8 y 15 no tienen ningún factor en común.

Dividir dos números racionales:

La regla es multiplicar al dividendo por el inverso del divisor. Así como sucede en la multiplicación la respuesta requiere ser un racional irreductible.

Ejemplo 6

recíproco

$$\frac{1}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{(1 \times 4)}{(5 \times 3)} = \frac{4}{15}$$

cambia

C Ejercitación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. *Resuelvo los siguientes ejercicios, realizando el procedimiento en el cuaderno:*

a. $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{3} =$

b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$

c. $\frac{5}{16} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$

d. $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$

e. $\frac{7}{12} + \frac{4}{5} =$

f. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{9} =$

g. $\frac{2}{15} \div \frac{4}{3} =$

h. $\frac{13}{6} \div \frac{9}{4} =$

i. $\frac{6}{7} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} =$

j. $\frac{16}{9} \div \frac{5}{2} =$

k. $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} =$

l. $\frac{6}{14} + \frac{5}{28} + \frac{2}{7} =$

m. $\frac{20}{50} - \frac{4}{50} =$

n. $\frac{9}{24} \times \frac{5}{7} =$

o. $\frac{13}{20} \times \frac{4}{9} =$

p. $\frac{18}{25} \div \frac{3}{10} =$

q. $\frac{3}{5} \times \frac{9}{20} \times \frac{4}{9} =$

r. $\frac{4}{9} - \frac{5}{18} =$

2. Invito a mi profesor para que revise el procedimiento realizado.

D Aplicación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Resolvemos los siguientes problemas, consignando en el cuaderno el procedimiento correspondiente:

   a. Queremos preparar una torta y mi mamá nos solicita los siguientes ingredientes:

      ✓ $\frac{1}{3}$ de un paquete de 750 g de azúcar.

      ✓ $\frac{3}{4}$ de un paquete de un kilo de harina

      ✓ $\frac{3}{5}$ de una barra de 200 g de mantequilla.

      ¿Cuántos gramos en total pesa la torta con esos ingredientes?

   b. Dos automóviles A y B hacen un trayecto de 572 Km. El automóvil A lleva recorrido los $\frac{5}{11}$ del trayecto cuando el B ha recorrido los $\frac{6}{13}$ del mismo. ¿Cuál de los dos va primero?, ¿cuántos kilómetros llevan recorridos cada uno?

   c. En las elecciones locales celebradas en un pueblo, $\frac{3}{11}$ de los votos fueron para el partido A, $\frac{3}{10}$ para el partido B, $\frac{5}{14}$ para C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15.400.

Con los datos que nos ofrece el problema, respondemos lo siguiente:

- ✓ El número de votos obtenidos por cada partido.
- ✓ El número de abstenciones sabiendo que el número de votantes representa $\frac{5}{8}$ del censo electoral.

d. Lucas está trabajando en la pastelería de sus padres. Hoy tiene que hacer un pedido. Estos son algunos de los problemas que se le plantearon.

- ✓ En la pastelería se cocinan 9 tortas por día. Para cada torta se necesita $\frac{3}{4}$ de litro de leche. ¿Cuántos litros de leche habrá que comprar hoy?
- ✓ Para cada torta se utilizan $\frac{1}{8}$ litros de crema y $\frac{2}{5}$ de kilogramo de harina. Si la crema y la harina se compran cada tres días. ¿Cuántos litros de crema y cuántos kilogramos de harina habrá que comprar para los próximos tres días?

e. Camilo tiene un terreno rectangular, del cual $\frac{2}{3}$ es para sembrar y lo que sobra es para ganado. Decide sembrar en la mitad arroz y en la cuarta parte de lo que queda café. ¿Cuántos metros cuadrados tiene para arroz y café si la finca tiene 1.800 m^2?

TRABAJO EN EQUIPO

2. Socializamos los procedimientos y respuestas de los problemas anteriores.

E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Leemos acerca del orden de los números racionales:

Cuando se tiene dos o más números racionales positivos y se desea saber el orden entre ellos, bien sea de mayor a menor o de menor a mayor, se requiere:

Ejemplo 1:
Que tengan el mismo denominador, para ello se halla el mínimo común múltiplo para que queden con el mismo denominador.

Cuando ya se tiene el mismo denominador, el racional mayor es aquel que tiene el numerador mayor.

$\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{8}$ son equivalentes a: $\frac{24}{40}$ y $\frac{15}{40}$ respectivamente.

Entonces $\frac{24}{40}$ es mayor de $\frac{15}{40}$, que es lo mismo que $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$.

2. *Usemos el signo >, < o = en cada una de las siguientes parejas de racionales:*

a. $\frac{3}{8}$ .... $\frac{5}{6}$

b. $\frac{4}{9}$ .... $\frac{1}{12}$

c. $\frac{5}{16}$ .... $\frac{6}{19}$

d. $\frac{2}{5}$ .... $\frac{7}{25}$

e. $\frac{9}{11}$ .... $\frac{4}{5}$

f. $\frac{3}{10}$ .... $\frac{7}{10}$

g. $\frac{1}{2}$ .... $\frac{2}{3}$

h. $\frac{7}{12}$ .... $\frac{1}{3}$

i. $\frac{11}{15}$ .... $\frac{1}{5}$

j. $\frac{4}{7}$ .... $\frac{8}{21}$

3. *Continuemos leyendo:*

Otra forma de visualizar el orden de los números racionales es ubicándolos en la recta numérica:

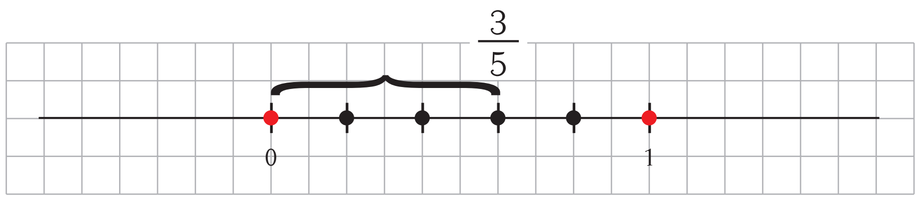
Ejemplo 2:
Representemos en una recta numérica, los siguientes racionales, tal como el siguiente ejemplo:

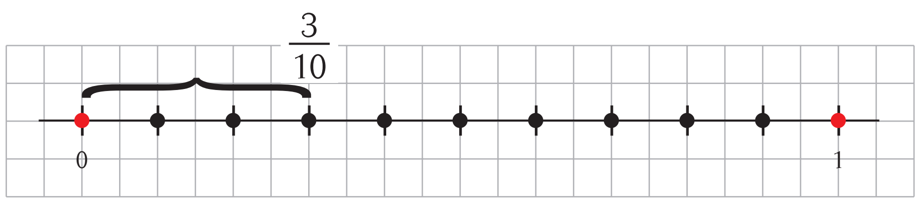
$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{3}{10}$$

La unidad determinada por el segmento del cero al uno, se divide en cinco partes iguales. Cada parte determina un punto que le corresponde un número racional, es así que el primero corresponde al número $\frac{1}{5}$, el siguiente a $\frac{2}{5}$ y el siguiente a $\frac{3}{5}$ que corresponde al racional solicitado.

En la segunda recta numérica, el segmento de la unidad que va de cero al uno, se divide en 10 partes. Cada parte es un décimo ($\frac{1}{10}$) que corresponde a un número racional.

Al comparar las dos rectas numéricas y la posición en la que se encuentran los dos racionales, se puede determinar cuál de ellos ocupa un mayor espacio en la recta y, de esta manera, se puede identificar el número racional mayor.





Respondemos: ¿cuál es mayor?

4. *Representemos en la recta numérica los siguientes números racionales y los ordenamos de mayor a menor:*

$$\frac{4}{10}, \frac{6}{8}, \frac{3}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{15}$$

Evaluación por competencias

En el Colegio Atanasio Girardot, se pretende hacer un festival para recoger fondos y poder construir unas gradas. Para ello el rector propuso a los estudiantes lo siguiente:

1. En cada salón $\frac{1}{4}$ de los estudiantes deben preparar una obra de teatro, $\frac{3}{5}$ deberán preparar un plato típico para vender en el festival y $\frac{2}{5}$ deben preparar un juego.

    a. Determinar el total de estudiantes que participan en el festival.

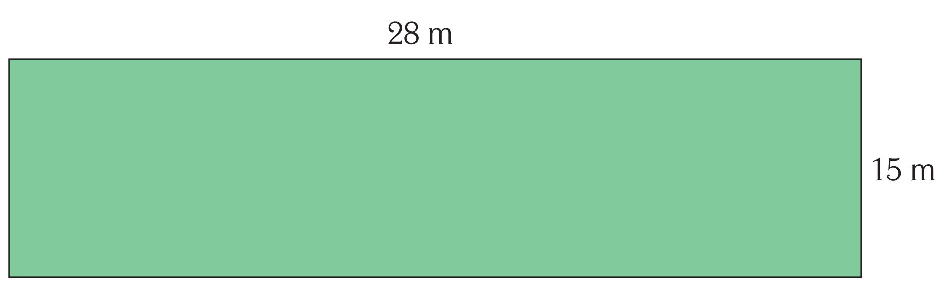
    b. Si en cada salón de clase hay 50 estudiantes, ¿cuántos estudiantes deben participar de cada actividad?

2. En cada grupo se han recogido $5.000 por cada estudiante y del valor recogido se dona $\frac{1}{5}$ para el festival. Tener en cuenta que cada salón de clase lo integran 50 estudiantes.

3. Se propone que la ubicación para el festival de los grados 6°, 7° y 8° será en el largo de la cancha de fútbol, y es la siguiente:

    $\frac{1}{3}$ se ubican los grados sexto, $\frac{5}{8}$ se ubican los grados séptimo, $\frac{7}{10}$ se ubican los grados octavo.

    Dibujo la ubicación correspondiente en el siguiente rectángulo:



4. Finalizado el festival se hizo el balance del dinero recogido y determinaron que de $\frac{1}{4}$ que fue el dinero recolectado, se deben pagar $\frac{2}{5}$ para el aseo del colegio. ¿Cuál es el racional que representa esta relación?

Glosario

- **Porción:** Cantidad que corresponde a cada partícipe en un reparto o distribución.
- **Positivos:** Que tiene valor mayor que cero o está precedido por el signo (+).
- **Procedimiento:** Modo de ejecutar ordenadamente las operaciones matemáticas.
- **Sembrado:** Tierra sembrada, hayan o no germinado y crecido las semillas.

Bibliografía

- Batanero, C. y Godino, J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino. Recuperado 2017

- Diccionario de la lengua española. Recuperado de http://www.rae.es. Recuperado 2017

- Ejercicios y problemas Fracciones y Porcentajes. Recuperado de http://amolasmates.es/Mates%20basicas/mates_basicas4.html. Recuperado 2017

- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2003). *Medida y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr. es/~jgodino. Recuperado 2017

- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2003). *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino. Recuperado 2017

- Pujadas M., Eguiluz L. (2000). Fracciones ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas. Recuperado 2017