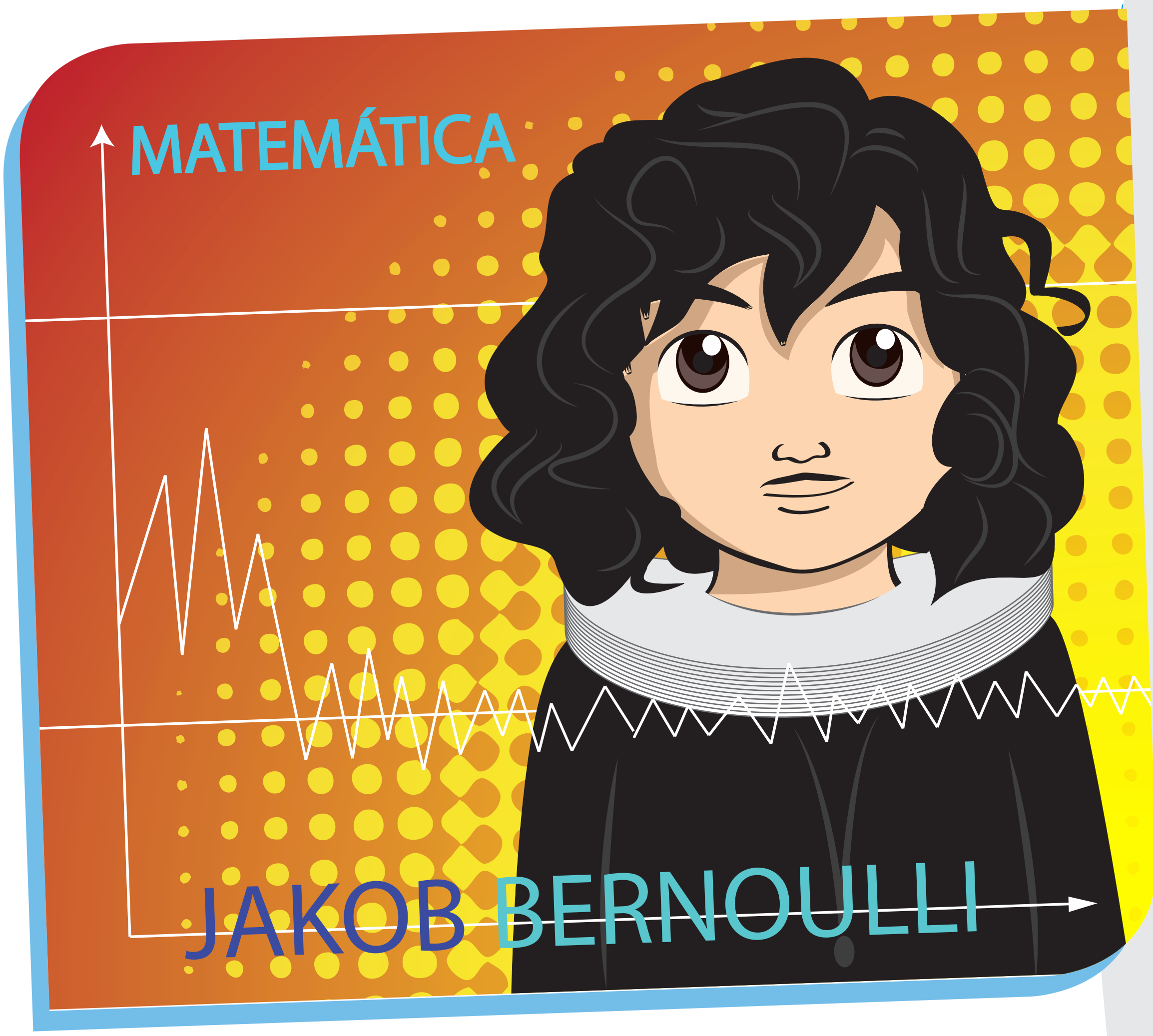
Guía 5



Aprendamos algo más sobre la distribución de datos

Indicadores de desempeño

Conceptual

- Define las características de la distribución binomial.

Procedimental

- Modela situaciones con la distribución binomial.

Actitudinal

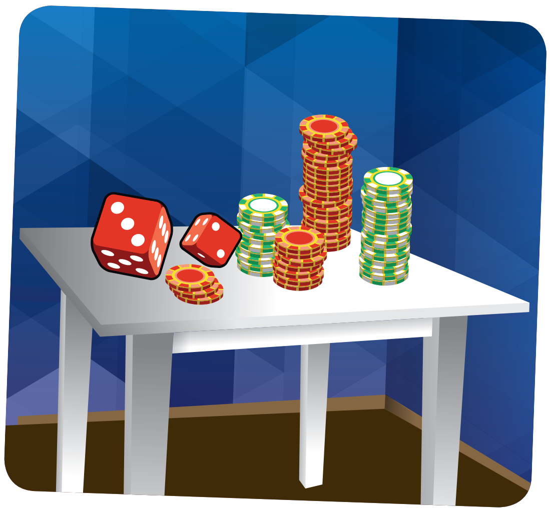
- Muestra responsabilidad en las decisiones que toma con respecto a la información derivada de procedimientos estadísticos.

A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Me dirijo al CRA para conseguir los siguientes materiales: Tres monedas y dos dados que me ayudarán a desarrollar las actividades que se enumeran a continuación; tengo en cuenta consignarlas en el cuaderno:

   a. Describo el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:



✓ Lanzar una moneda.

✓ Lanzar un dado.

✓ Lanzar dos dados.

✓ Lanzar una moneda y un dado simultáneamente.

✓ Lanzar tres monedas.

TRABAJO EN PAREJAS

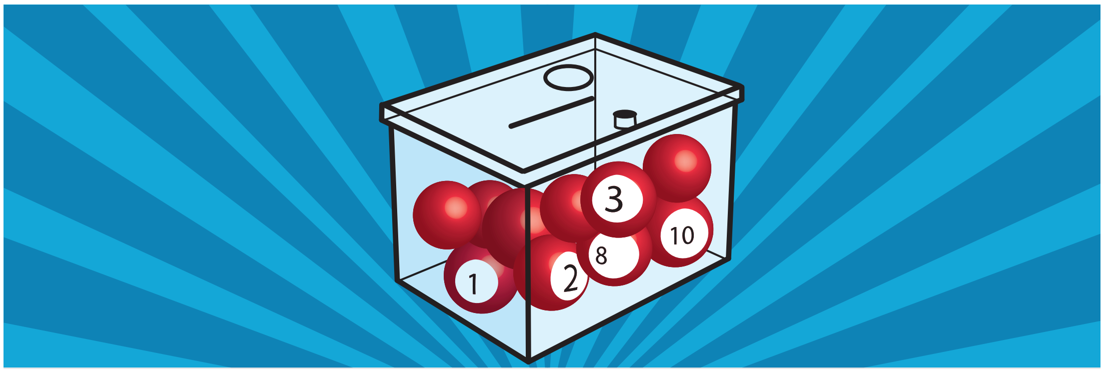
b. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado dos veces seguidas, y llamemos A al suceso de salir par en el primer lanzamiento e impar en el segundo, así mismo llamemos B al suceso de sumar los puntos de los dos dados para que salga número primo en ambos lanzamientos.

En esta situación:

✓ Describimos el espacio muestral del suceso A y del suceso B.

✓ Describimos los conjuntos: $A \cup B$, $A \cap B$, A^C, $A^C \cup B$, $A - B$. Donde A^C es el complemento de los resultados que no son del espacio muestral A.

c. Tenemos una urna con diez bolas numeradas del 1 al 10. Realizando extracciones con remplazamiento, consideremos los siguientes sucesos:



A = {Salir un número primo} y B = {Salir un cuadrado perfecto}

d. Verificamos las leyes de Morgan para los sucesos A y B:

$$(A \cup B)^c = (\ A^C \cap\ \ B^C)$$
$$(A \cap B)^c = \ \ (A^C \cup\ \ B^C)$$

✓ ¿Son los mismos resultados?

TRABAJO EN EQUIPO

2. En plenaria, exponemos ante el grupo de clase el trabajo realizado, resaltamos las conclusiones de los ejercicios y respondemos a las inquietudes de nuestros compañeros de clase y de nuestro docente.

B Fundamentación Científica

TRABAJO EN EQUIPO

1. En grupos de tres estudiantes, distribuimos los roles y hacemos la lectura correspondiente, teniendo en cuenta consignar en el cuaderno los aspectos más importantes:

Distribución binomial:

Cuando tenemos un experimento en donde solo hay dos posibilidades, de éxito o de fracaso, estamos hablando de una distribución binomial.

Las características de esta distribución son:

a. En los experimentos que tienen este tipo de distribución, siempre se esperan dos tipos de resultados.

Ejemplo: Defectuoso, no defectuoso, pasa, no pasa, resultados que podemos llamar "éxito" (que es lo que se espera que ocurra) o "fracaso" (lo contrario del éxito).

b. Las probabilidades asociadas a cada uno de estos resultados son constantes, es decir, no cambian.

c. Cada uno de los ensayos o repeticiones del experimento son independientes entre sí.

d. El número de ensayos o repeticiones del experimento (n) es constante.

Ejemplo 1:

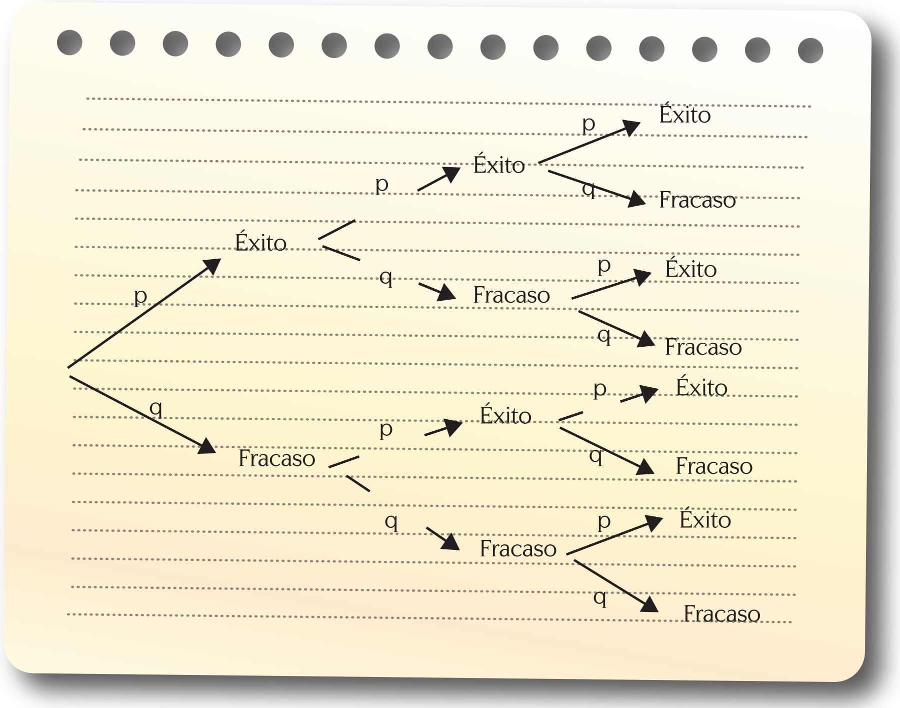
Se lanza al aire una moneda 3 veces, determinamos la probabilidad de que aparezcan 2 caras.

Para solucionarlo, debemos tener en cuenta:

- Identificar si se trata de una distribución binomial. Podemos decir que sí, ya que se trata de un experimento en donde solo se pueden esperar dos tipos de resultados al lanzar la moneda: Cara o sello.

- También se identifica que las probabilidades de ocurrencia de cara o sello son constantes y cada uno de los lanzamientos es independiente de los demás.

- Recurrimos a realizar un diagrama de árbol, en donde representamos los tres lanzamientos, para obtener el espacio muestral y posteriormente la probabilidad que nos están solicitando:



n = Número de lanzamientos de la moneda, que en este caso fueron 3.

k = Número de "éxitos" requeridos = Número de caras = 2

p = Probabilidad de "éxito"= p (aparezca cara) = $\frac{1}{2}$

q = Probabilidad de "fracaso"= p (aparezca sello) = $\frac{1}{2}$

Entonces el número de ramas en donde aparecen dos caras se puede obtener:

Enumerando las ramas de interés, estas serían: CCS, CSC, SCC.

La probabilidad de que el evento E ocurra n veces y el evento E´ ocurra (n - k):

$$P_{(k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{(n-k)}$$

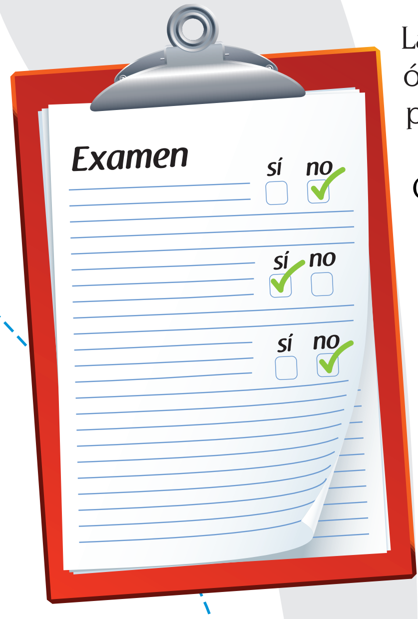
Teniendo en cuenta los datos del problema, los reemplazamos en la fórmula, así:

$$\frac{3!}{2!\,(3-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)}$$

$$\frac{6}{2(1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$P_{(2)} = \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P_{(2)} = \frac{6}{16} = 0.375$$



Ejemplo 2:

La evaluación de sociales contiene 10 preguntas en las que hay que contestar Sí ó No. Suponiendo que los estudiantes no supieron contestar a ninguna de las preguntas y contestan al azar.

Cuál es la probabilidad de obtener 5 aciertos?

Es una distribución binomial porque los estudiantes sólo pueden acertar o fallar la pregunta.

Suceso A = Éxito (acertar la pregunta).

Suceso $\bar{A}$= Fracaso (no acertar la pregunta).

Aplicando la fórmula

$$P(x = k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k} \Rightarrow \begin{matrix} k = 5 \\ n = 10 \\ p = 0.5 \\ q = 0.5 \end{matrix} \Rightarrow P(x=5)=\binom{10}{5}\cdot(0.5)^{5}\cdot(0.5)^{10-5}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ Números combinatorios } \Rightarrow \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,(10-5)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot \cancel{5!}} = 252$$

$$P(x = 5) = \binom{10}{5}\cdot(0.5)^{5}\cdot(0.5)^{10-5} \Rightarrow P(x = 5) = 252\cdot(0.5)^{5}\cdot(0.5)^{5} = 0.2461$$

Ejemplo 3:

Una universidad se encuentra muy preocupada porque los estudiantes no terminan sus estudios. Hallamos la probabilidad de que 7 estudiantes matriculados en primer semestre se gradúen.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos terminen la carrera?:

Identificamos que es una distribución binomial porque sólo hay dos opciones, que terminen la carrera o que se retiren.

A = Obtener el título.

$\bar{A}$= No obtener el título.

Calculamos primero la probabilidad de que ninguno termine la carrera más la probabilidad de que uno termine:

$$P(x \geq 2) = 1 - [P(x=0) + P(x=1)]$$

- Calculamos la probabilidad de que no termine ninguno:

$$P(x=U) = \binom{7}{0}\cdot(0.3)\cdot(0.7)^{7} = 0.824$$

- Probabilidad de que termine uno: $P(x=1)=\binom{7}{1}\cdot(0{,}3)^1\cdot(0{,}7)^6=0.2471$

$P(x \geq 2) = 1-[P(x=0)+P(x=1)] \Rightarrow p\,(x \geq 2) = 1-[0.0824+0.02471] = 0.6705$

C Ejercitación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Con un compañero, resolvemos los siguientes ejercicios de probabilidad, teniendo en cuenta analizar muy bien la información:

   a. La evaluación de Ética y valores consta de 30 preguntas en las que hay que responder SÍ ó NO. Suponiendo que los estudiantes no se hayan preparado para el examen y no sepan contestar ninguna de las preguntas, qué probabilidad hay que obtengan:

   ✓ 5 aciertos.

   ✓ Algún acierto.

   ✓ Al menos 5 aciertos.

   b. Un hombre y una mujer, cada uno con un gen recesivo del color de ojos, la madre de ojos negros y el padre de ojos cafés, son padres de cinco hijos.

¿Cuál es la distribución de probabilidad para x, número de hijos con ojos negros?

c. La Prueba Saber para noveno consta de 150 preguntas, cada una de las cuales se acompaña de cuatro respuestas, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 50 preguntas? ¿Y menos de 30?

d. En una clínica oncológica, se han dado cuenta que un tratamiento que vienen realizando contra el cáncer produce una mejora en el 70% de los enfermos a los que se les aplica. Si se suministra a seis pacientes, calculo:

- ✓ La probabilidad de que mejoren los seis pacientes.
- ✓ La probabilidad de que al menos mejoren cuatro pacientes.
- ✓ ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

2. Invitamos al profesor para que revise y valore la realización de las situaciones anteriores y nos aclare las dudas, si es necesario.

D Aplicación

TRABAJO EN EQUIPO

En grupos de 4 estudiantes, y teniendo en cuenta que en mi institución se valora la diversidad, analizamos la siguiente situación aplicando la distribución binomial:

1. Los alumnos del grado octavo de un colegio indígena, se encuentran en una proporción del 76 % que son indígenas y el resto son mestizos.

Tomamos una muestra de 25 alumnos de la clase de octavo y calculamos:

a. Probabilidad de que al menos encontremos tres estudiantes indígenas.

b. Probabilidad de que los 110 estudiantes sean indígenas.

c. Probabilidad de que entre 7 y 10 estudiantes sean indígenas.

2. Para el gobierno escolar se pretende que quede una buena representación de estudiantes indígenas y estudiantes mestizos, ¿cuál es la probabilidad de que los estudiantes indígenas sean del 80% si el gobierno escolar lo conforman 10 estudiantes?

Encontramos la probabilidad de:

a. Tener 4 estudiantes indígenas.

b. No tener ninguno.

c. Tener alguno.

d. Tener entre 3 y 6 indígenas.

3. El 53% de los estudiantes del colegio son mujeres. Si elegimos 8 estudiantes al azar, calculamos la probabilidad de que haya:

a. Alguna mujer.

b. Más de 6 mujeres.

4. En plenaria, exponemos ante el grupo de clase el trabajo realizado, conversamos acerca de la importancia de la diversidad y el respeto por ella, a partir de los ejercicios resueltos.

E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Realizamos la siguiente lectura y consignamos los aspectos más importantes:

Distribución de Poisson

Esta distribución es una de las más importantes para la variable discreta. Sus principales aplicaciones hacen referencia a la modelización de situaciones en las que nos interesa determinar el número de hechos de cierto tipo que se pueden producir en un intervalo de tiempo o de espacio.

Ejemplo:

En la defensoría del pueblo se reciben en promedio 4 denuncias por hora, debido al aumento en el maltrato infantil. Calculamos las siguientes probabilidades:

a. Que en una hora se reciba una denuncia.

b. Que en una hora se reciban tres denuncias

Llamaremos X a la cantidad de denuncias recibidas por hora.

Podemos considerar que es una distribución de Poisson por las siguientes razones:

a. La variable aleatoria X posee un valor medio definido para un intervalo, en este caso, una hora.

b. La variable aleatoria X no posee límite superior.

c. Esta es llamada una constante positiva y representa el número de éxitos.

Fórmula de la distribución de Poisson:

$$P(x) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!}$$

Donde

n= Número de ensayos.

x= Número de éxitos esperados en n ensayos.

e= 2.71828…

λ = np= Constante igual a número de éxitos promedio por unidad de medida.

P= Probabilidad constante durante el proceso igual al número de éxito promedio por unidad de medida.

Si volvemos a las preguntas del problema podemos utilizar la fórmula, así:

a. Que en una hora se reciba una denuncia, reemplazando en la formula sería:

$$P(1) = \frac{4^1 * e^{-4}}{1!} = 0.073263$$

b. Que en una hora se reciban tres denuncias:

$$P(3) = \frac{4^3 * e^{-4}}{3!} = 0.195367$$

2. Teniendo en cuenta los datos anteriores, resolvemos los siguientes ejercicios:

   a. Que en una hora se reciban al menos 6 denuncias.

   b. Que en una hora se reciban máximo 4 denuncias.

3. Realizamos una reflexión en torno al maltrato infantil aprovechando la situación sobre las causas de estos hechos.

Evaluación por competencias

INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 1, 2 Y 3

En una fábrica de tuberías, se produce un lote es de 100 piezas de tubería de polietileno y 200 unidades de tubería de otro material. Si seleccionáramos 4 tuberías al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean de polietileno?:

A. 0.0119

B. 0.1119

C. 0.1

D. 0.00010

1

2. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más tuberías fabricadas sean de polietileno?:

A. 0.011

B. 0.408

C. 0.1

D. 0.00010

2

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una tubería sea de polietileno?:

A. 0.011

B. 0.408

C. 0.1

D. 0.196

3

INFORMACION PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 3 Y 4

Teniendo en cuenta que la contaminación se ha convertido en una preocupación de las empresas, en una fábrica de discos ópticos, el número de partículas de contaminación por centímetro cuadrado es de 0,1.

El área de un disco óptico que se encuentra en estudio es 100 centímetros cuadrados.

4. Cuál es la probabilidad de que ocurran 12 partículas en el área del disco que se encuentra en estudio:

A. 0.011

B. 0.408

C. 0.095

D. 0.196

4

5. La probabilidad de que ocurran cero partículas en el área del disco que se presenta en estudio es:

A. 0.011

B. 0.408

C. 0.1

D. 4.54×10^{-5}

5

Glosario

- **Distribución de Poisson:** Es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

- **Distribución normal:** Es una distribución de variable continua, que fue descubierta por Gauss al estudiar la distribución de los errores en las observaciones astronómicas.

- **Espacio muestral:** Consiste en el conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio.

- **Experimentos aleatorios:** Es aquel que bajo el mismo conjunto aparente de condiciones iniciales, puede presentar resultados diferentes, es decir, no se puede predecir o reproducir el resultado exacto de cada experiencia particular.

- **Extracciones con reemplazamiento:** Son aquellas en las que, después de cada extracción, el elemento extraído se repone.

- **Extracciones sin reemplazamiento:** Las sucesivas extracciones se realizan sin devolver el elemento anteriormente extraído. Las condiciones de cada extracción son distintas y dependen de cuál o cuáles sean los elementos anteriormente extraídos.

- **Frecuencias relativas:** Se llama frecuencia a la cantidad de veces que se repite un determinado valor de la variable.

- **Histogramas:** Es una representación gráfica de una variable en forma de barras, donde la superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados, ya sea en forma diferencial o acumulada.

- **Probabilidad:** Es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables.

- **Variable discreta:** Es una variable que sólo puede tomar valores dentro de un conjunto numerable, es decir, no acepta cualquier valor sino sólo aquellos que pertenecen al conjunto. En estas variables se dan de modo inherente separaciones entre valores observables sucesivos. Dicho con más rigor, se define una variable discreta como la variable que hay entre dos valores observables (potencialmente) y hay por lo menos un valor no observable (potencialmente). Como ejemplo, el número de animales en una granja (0, 1, 2, 3...).

Bibliografía

Kendall Hunt (2008). Discovering geometric. Una guía para los padres. Kendall Hunt Publishing.

Villa-Ochoa A (2008). El concepto de función: Una mirada desde las matemáticas escolares. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.

Triola M.F(2009). Estadística. Décima Edición. Pearson Educación.

Márquez, Luisa. (2011). Estadística I. Unidades Curriculares Especializadas. [En línea].Recuperado de cesarguerra10.files.wordpress.com/2011/04/material-estadc3adstica-i.pdf

Funciones y gráficas. (S.f) [En línea]. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/funciones2/impresos/quincena9.pdf

Barreto, José Arturo. Precálculo - Ecuación de la recta-continuación. (2007) Caracas, Venezuela. [En línea]. Recuperado de http://www.abaco.com.ve/precalculo/EQUATIONSOFSTRAIGHTLINES.pdf