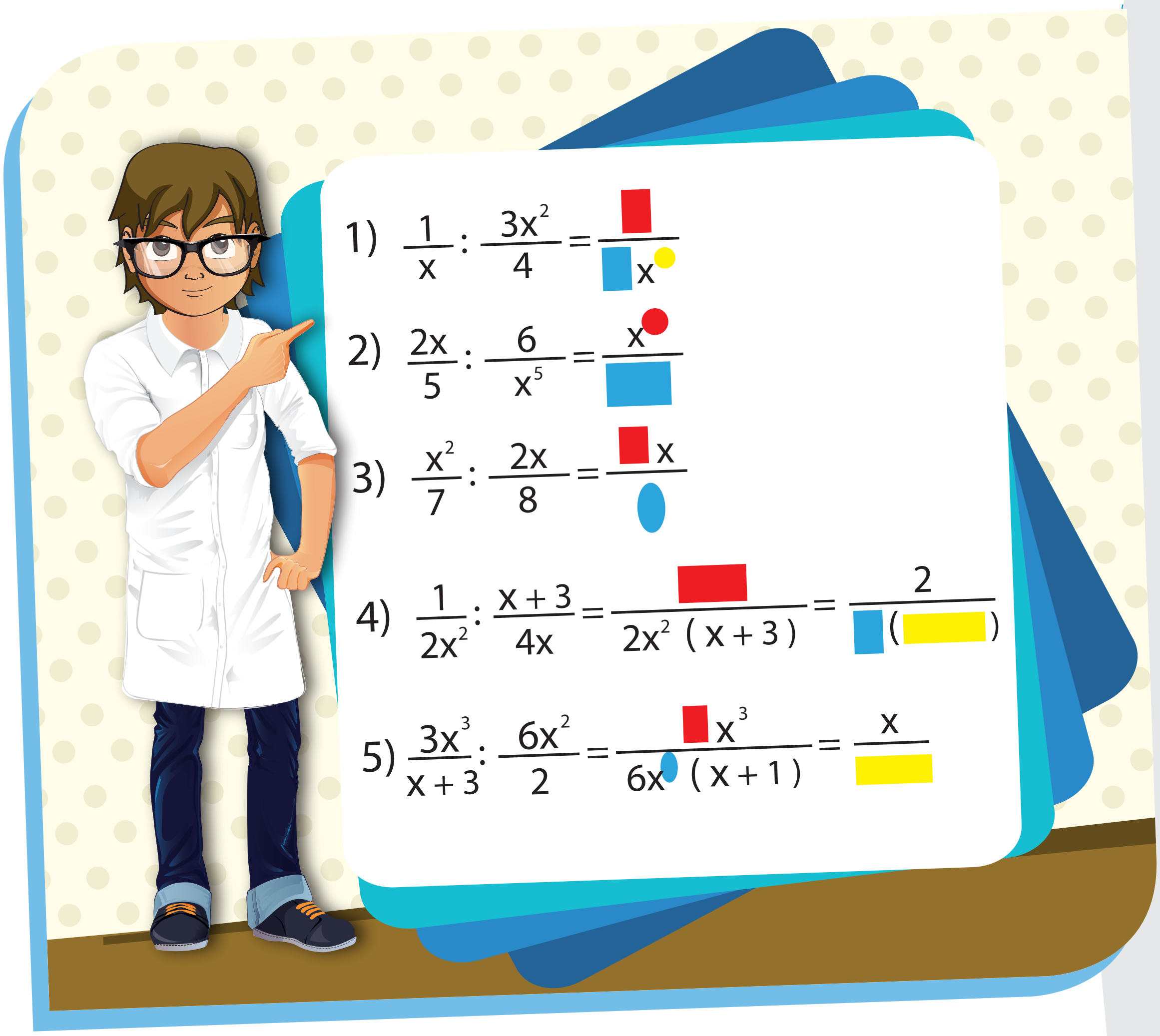
Guía 3

Multipliquemos con fracciones algebraicas



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Identifica las reglas para realizar operaciones multiplicativas con fracciones algebraicas.

Procedimental

- Ejercita las operaciones multiplicativas con fracciones algebraicas.

Actitudinal

- Reconoce el aporte de las matemáticas en la resolución de situaciones que generen equidad, justicia y solidaridad.

A Vivencia

TRABAJO EN PAREJAS

1. En la siguiente tabla se listan el largo, el ancho y el área de un terreno rectangular, completamos la información realizando las operaciones correspondientes:

LARGO	ANCHO	ÁREA
$x+3$	$x-3$	
	$x-5$	$3x^2-75$
$x+2$		$4x^2+20x+24$
$4x-1$	$3x-2$	

2. Realizamos la operación indicada y simplificamos el resultado:

a. $\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{15}$

b. $\frac{10}{21}\div\frac{15}{14}$

c. $\frac{66}{65}\cdot\frac{10}{11}$

d. $\frac{25}{21}\div\frac{45}{62}$

e. $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$

f. $5\cdot\left(\frac{8}{25}\right)$

g. $\frac{8}{9}\div\left(-\frac{3}{7}\right)$

h. $\left(-\frac{5}{3}\right)\div\frac{7}{4}$

i. $\frac{10}{9}\cdot\left(-\frac{11}{6}\right)$

j. $\left(-\frac{5}{12}\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)$

3. Sustentamos el trabajo realizado y pedimos al profesor que valore los resultados obtenidos.

BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Reunidos en equipos asignamos roles y simplificamos las siguientes expresiones. Debemos recordar que nos tenemos que apoyar en la factorización para realizar la simplificación:

   a. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$

   b. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

   c. $\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$

2. Realizamos la siguiente lectura y anotamos en nuestros cuadernos los aspectos más importantes de la misma:

Multiplicación de fracciones algebraicas

Como las fracciones algebraicas representan números reales, especialmente los racionales, para realizar su multiplicación se emplea un procedimiento en el que se multiplican numeradores y denominadores entre sí. El símbolo que representa la multiplicación es el punto o paréntesis entre cada expresión.

Ejemplo 1:

Multiplicar las siguientes fracciones $\frac{ab}{4} \cdot \frac{3a^3}{5}$

El procedimiento puede hacerse de dos maneras, en este caso, se multiplican los numeradores entre sí y se hace lo mismo con los denominadores y luego se simplifican, si es posible:

$$\frac{ab \cdot 3a^3}{4 \cdot 5} = \frac{3a^4b}{20}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{3a^3b^3c}{12x^4y^2} \cdot \frac{36x^3yz^4}{9a^2b^3c}$$

En este caso, emplearemos el segundo procedimiento que consiste en simplificar hasta donde sea posible y luego multiplicar los factores que se obtienen como fracciones irreductibles.

Se toma cada fracción algebraica y se realiza la simplificación, si es posible:

$$\frac{3a^3b^3c}{12x^4y^2} \cdot \frac{36x^3yz^4}{9a^2b^3c}$$

$$\frac{36x^3yz^4}{9a^2b^3c} = \frac{4x^3yz^4}{a^2b^3c}$$

Con las nuevas expresiones de cada factor se realiza de nuevo una simplificación entre los numeradores y denominadores de las fracciones algebraicas.

Vamos a simplificar las variables a, b, c y x que están tanto en los numeradores y denominadores de ambas expresiones, aplicando las propiedades de las potencias en la parte literal; así mismo se realiza con la parte numérica de cada término:

$$\frac{\cancel{a^3}\,\cancel{b^3}\,\cancel{c}}{\cancel{4}\,\cancel{x^4}\,\cancel{y^2}} \cdot \frac{\cancel{4}\,\cancel{x^3}\,\cancel{y}z^4}{\cancel{a^2}\,\cancel{b^3}\,\cancel{c}} =$$

De nuevo quedan los siguientes factores y realizamos la correspondiente multiplicación:

$$\frac{a^1}{1x^1y^1} \cdot \frac{1z^4}{1} = \frac{az^4}{xy}$$

Ejemplo 3:

Multiplicar las siguientes fracciones: $\dfrac{x-3}{x+1} \cdot \dfrac{x+3}{x-3}$

Se multiplican los numeradores y los denominadores:

$$\frac{(x-3)}{(x+1)} \cdot \frac{(x+3)}{(x-3)} = \frac{x^2 + 3x - 3x - 9}{x^2 - 3x + x - 3}$$

$$\frac{x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y finalmente se simplifica:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x+3}{x+1}$$

Otra forma, simplificando antes las expresiones:

$$\frac{\cancel{(x-3)}}{(x+1)} \cdot \frac{(x+3)}{\cancel{(x-3)}} = \frac{x+3}{x+1}$$

3. Resolvemos las siguientes multiplicaciones algebraicas:

a. $\frac{3x}{7y} \cdot \frac{2z}{w}$

b. $\frac{3x^2+2xy}{9x^2-4y^2}$

c. $\frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x}{x-1}$

d. $\frac{x-2}{x} \cdot \frac{x-1}{x-2}$

e. $\frac{2x}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{8}$

f. $\frac{x-y}{5a} \cdot \frac{3b}{x-y}$

g. $\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{1}{a+1}$

h. $\frac{a+x}{a^2-x^2} \cdot \frac{a-x}{x^2+a^2}$

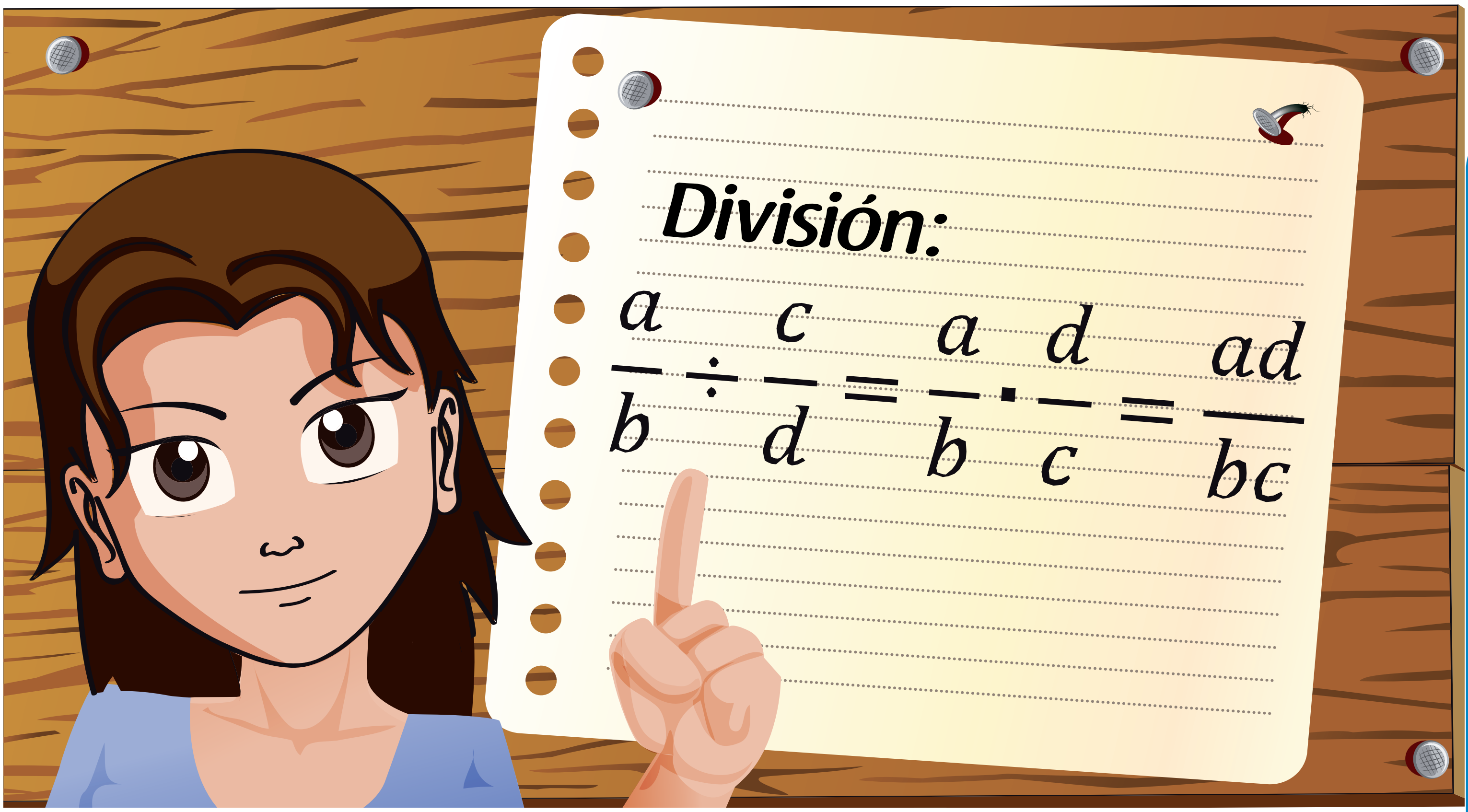
i. $\frac{a^2-4}{a+3} \cdot \frac{a^2-9}{a+2} \cdot \frac{a}{a^3}$

j. $\frac{ax+x}{2+x} \cdot \frac{x^2-4}{ab+b}$

4. Continuamos con la lectura:

División de fracciones algebraicas

En la división de fracciones algebraicas, se multiplica la fracción dividiendo por el inverso multiplicativo de la fracción divisora. Los símbolos de la división son: ÷, : y $\frac{\square}{\square}$ Simbólicamente, la división se representa así:



Ejemplo 1:

$$\frac{3x}{5y} \div \frac{9x^2}{20y^3}$$

Primero se halla el inverso multiplicativo del divisor, que en este caso corresponde a $\frac{20y^3}{9x^2}$ y se procede a realizar la multiplicación, así:

$$\frac{3x}{5y} \cdot \frac{20y^3}{9x^2} = \frac{60xy^3}{45x^2y}$$

Posteriormente se simplifica y queda así:

$$\frac{\cancel{60}\cancel{x}\cancel{y^3}}{\cancel{45}\cancel{x^2}\cancel{y}} = \frac{4y^2}{3x}$$

Ejemplo 2:

Dividir la fracción $\frac{x}{x+1}$ entre la fracción $\frac{4x}{x+2}$.

El inverso multiplicativo del divisor es $\frac{x+2}{4x}$

Se procede a realizar la multiplicación, así:

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+2}{4x}$$

Se realizan los productos indicados y finalmente se simplifica:

$$\frac{(x)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(4x)} = \frac{\cancel{x}(x+2)}{4\cancel{x}(x+1)} = \frac{x+2}{4(x+1)}$$

Otra forma de dividir es con la ley de la oreja, en la que se coloca el dividendo sobre el divisor, así:

$$\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{4x}{x+2}}$$

Aquí se multiplican los términos extremos para determinar el numerador, y los términos medios para determinar el denominador:

$$\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{4x}{x+2}} = \frac{\cancel{x}\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot 4\cancel{x}} = \frac{(x+2)}{4(x+1)}$$

5. Desarrollamos los siguientes ejercicios, teniendo en cuenta lo visto anteriormente:

a. $\dfrac{35a^3}{18b^3} \div \dfrac{14ab^2}{9b^3}$

b. $\dfrac{a^5b^8c^7}{a^4b^6c^{10}} \div \dfrac{a^6b^8c^9}{a^3b^2c^5}$

c. $\dfrac{24ab^3x^2y}{54a^3bxy^4} \div \dfrac{9y^3}{x^3}$

d. $\dfrac{x}{x+1} \div \dfrac{x-1}{x-2}$

e. $\dfrac{2x}{x+1} \div \dfrac{4x^2}{x^2-1}$

f. $\dfrac{6x-12}{x+1} \div \dfrac{5x-10}{2x+1}$

g. $\dfrac{a^5b^8c^7}{a^4b^6c^{10}} \div \dfrac{a^6b^8c^9}{a^3b^2c^5}$

h. $\dfrac{a^2bx^2}{ab^3y^3} \div \dfrac{3ax^2}{b^2y^3}$

i. $\dfrac{6x^2+9xy}{a^3} \div \dfrac{a}{14x^3 + 21x^2\ y}$

j. $\dfrac{m^2+8m+16}{m^2+2m-8} \div \dfrac{m^2-2m+3}{m^3-3m+2}$

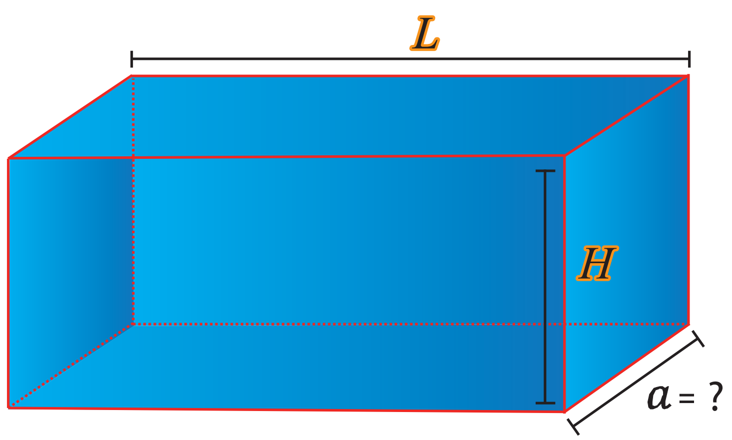
6. Invitamos a nuestro profesor a evaluar la actividad realizada.

D Aplicación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Resolvemos las siguientes situaciones:

   a. Dado el volumen, el largo y la altura de un prisma rectangular, buscamos la expresión que corresponde al ancho:



$V = \dfrac{x^2+4x+4}{x+5}$ $\quad H = \dfrac{x^2-4}{x}$

$L = \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x-35}$

b. Encontramos una expresión algebraica para determinar la base de un rectángulo, si tenemos el área y la altura:

$$A=\frac{x^2-121}{x^2-49} \qquad H=\frac{x^2-11x}{x^2-49}$$

c. Aprovechando el buen tiempo, un grupo de amigos fue de excursión. Al terminar el paseo, sacaron de su maletín un envase cilíndrico lleno de 2 litros de agua.

Luego, sacaron vasos cilíndricos más pequeños, cuya altura era la tercera parte de la altura del envase y cuyo radio era la mitad del radio del envase.

- ✓ ¿Cuántos vasos se podían servir?
- ✓ ¿Cómo los calcularon?

TRABAJO INDIVIDUAL

2. Resuelvo las siguientes operaciones y simplifico:

a. $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$ b. $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{y}+\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\frac{2xy}{x+y}$

c. $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x+1}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$

3. Socializamos en la actividad de conjunto las situaciones que realizamos tanto en parejas como individualmente y solicitamos al profesor que nos aclare las dudas que tengamos.

E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Hacemos la siguiente lectura y consignamos los datos más importantes:

Fracciones algebraicas compuestas

Las operaciones de multiplicación y división también se pueden efectuar en fracciones algebraicas compuestas, pero en este caso es muy importante reconocer las fracciones simples que las componen para llegar a la respuesta correcta.

Ejemplo:

$$\frac{\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x-1}}$$

Como podemos observar, hay una multiplicación propuesta en el numerador y otra en el denominador, entonces realizamos cada una de ellas, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{\frac{x-1}{x(x+1)}}{\frac{x(x^2-1)}{x^2(x-1)}}$$

Ahora nos queda una división, entonces se aplica la multiplicación de extremos y medios, quedando así:

$$\frac{\cancel{x^2}(x-1)^2}{\cancel{x^2}(x+1)(x^2-1)}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x^2-1)}$$

Posteriormente se simplifica:

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x^2-1)}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

2. Realizamos los siguientes ejercicios que incluyen las fracciones compuestas:

a. $\dfrac{\frac{x-1}{x}\div\frac{1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x^2}\div\frac{x}{x-1}}$

b. $\dfrac{\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x^2-2x+1}{x^2}\quad\frac{x+1}{x}}$

c. $\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x^2}{x-1}}$

d. $\dfrac{\frac{x-1}{x}\div\frac{1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+5}}$

e. $\dfrac{\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x+1}{x-1}}$

3. Continuando con la lectura acerca de las fracciones algebraicas, aprenderemos acerca de la racionalización de denominadores; que significa que cuando se cuenta con un denominador irracional, se busca convertirlo en racional o lo que es lo mismo, racionalizar el denominador.

Ejemplo 1:

Cuando tenemos la siguiente fracción:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para racionalizarlo, se busca suprimir el radical del denominador y para ello existen dos métodos:

a. Cuando el denominador tiene un solo término, basta multiplicar tanto el denominador como el numerador por una raíz, así:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b. Cuando el denominador está compuesto por varios términos, hay que multiplicar arriba y abajo por el conjugado. El conjugado es un polinomio con los signos opuestos:

Ejemplo 2:

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

El conjugado corresponde a la misma expresión pero con signo distinto:

$3 - \sqrt{2}$ y su conjugado es $3 + \sqrt{2}$

Entonces, multiplicando por el conjugado tenemos:

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{1(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}}{9-(\sqrt{2})^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$$

4. Racionalizamos estos denominadores en fracciones algebraicas:

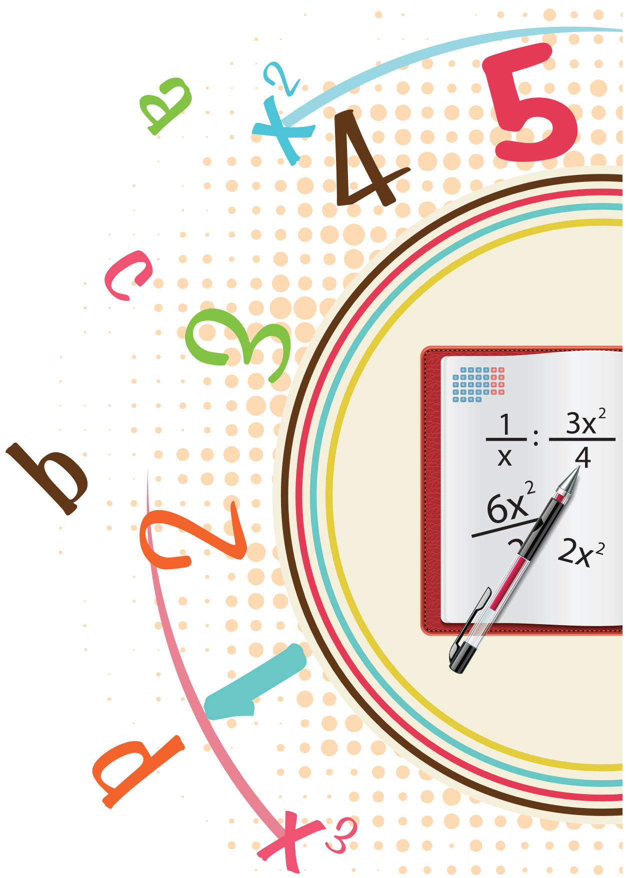
a. $\frac{2}{\sqrt{x}}$

b. $\frac{x}{4\sqrt{x}}$

c. $\frac{9\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

d. $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

e. $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$



Evaluación por competencias

1. La solución correcta para la siguiente división de fracciones algebraicas es:

$$\left[\frac{4-x^2}{x}\right] \div \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]$$

A. $2(2-x)$

B. $\frac{2}{x}$

C. $\frac{2}{x^2}$

D. $\frac{4}{x^2}$

1

2. La solución a la siguiente multiplicación de fracciones algebraicas, en su forma simplificada, es:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

A. $\frac{x+1}{(x+1)^2}$

B. $\frac{3x+1}{x^2}$

C. $\frac{3x+1}{x}$

D. $\frac{x+1}{x}$

2

3. La siguiente expresión algebraica, al simplificarla, corresponde:

$$\frac{3a^3-3a}{a-1} \div \frac{a+1}{3}$$

A. $9a$

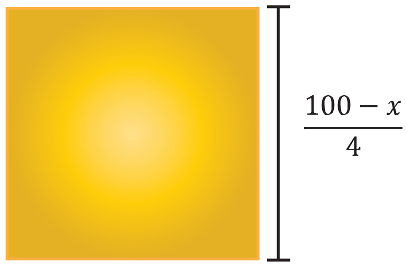
B. $3a$

C. $3a^2$

D. $\frac{1}{(a-1)}$

3

4. El polinomio que expresa el área del cuadrado es:



A. $\frac{(100-x)^2}{4}$

B. $\frac{(100-x)^2}{2}$

C. $\frac{(100-x)}{2}$

D. $\frac{(100-x)^2}{16}$

4

5. La solución a la siguiente fracción compuesta es:

$$\frac{x-\frac{2}{x}}{\frac{x-1}{x}}$$

A. $\frac{x^2-2}{x+1}$

B. $\frac{x^2-2}{x-1}$

C. $\frac{x^2-2}{x}$

D. $\frac{x-2}{x}$

5

Glosario

- **Descomposición factorial:** Consiste en expresar cualquier cantidad como producto de sus factores primos.

- **Factor de un número:** Es un divisor del número.

- **Factorizar:** Expresar un número o una expresión algebraica como producto de dos o más números o expresiones algebraicas, llamados factores.

- **Fracciones algebraicas:** Son fracciones cuyos numeradores y denominadores son expresiones algebraicas.

- **Fracción compuesta:** Son aquellas en las que el numerador o el denominador es una fracción.

- **Racionalización del denominador:** Significa quitar la raíz de un denominador.

- **Simplificar:** Procedimiento que consiste en llevar una fracción a su fracción equivalente irreductible.