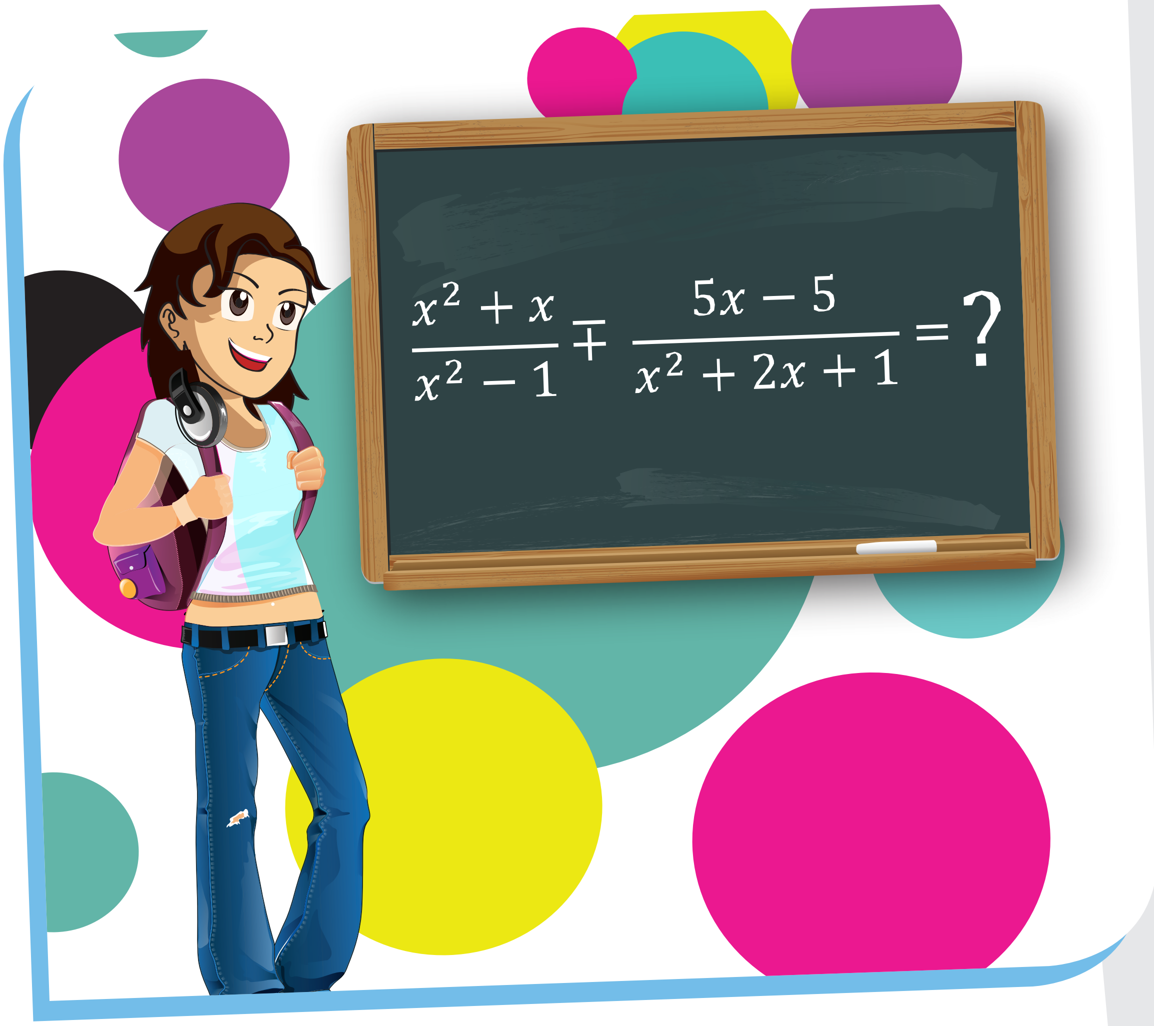
Guía 2

Adicionemos con fracciones algebraicas



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Identifica las reglas para realizar operaciones aditivas con fracciones algebraicas.

Procedimental

- Ejercita las operaciones aditivas con fracciones algebraicas.

Actitudinal

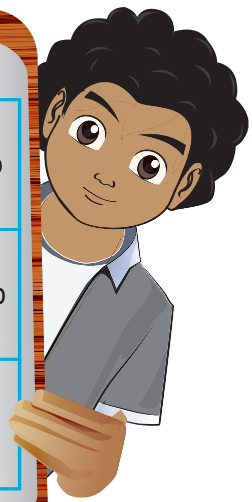
- Valora el uso de las diferentes técnicas empleadas por sus compañeros para resolver problemas.

A Vivencia

TRABAJO EN PAREJAS

1. Observamos y resolvemos en nuestros cuadernos el siguiente cuadrado:

a	b	15 – a – b
20 -2a - b	5	-10 + 2a + b
-5 + a + b	10 - b	10 – a



2. Comprobamos si se trata de un cuadrado mágico en el que los resultados de las sumas de los valores se encuentran en las diagonales, las horizontales y verticales.

3. Si el número de los resultados de la suma es 36, ¿cuánto vale la x de cada recuadro? Justificamos nuestra respuesta.

4. Realizamos las siguientes operaciones con fracciones:

a. $\frac{3}{4} + 2$

d. $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

b. $\frac{1}{5} - 3$

f. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

c. $3 - \frac{1}{4}$

g. $\frac{5}{2} + \frac{7}{3}$

5. Aclaramos con el profesor las dudas y dificultades que tuvimos para realizar este ejercicio.

BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Realizamos la distribución de roles correspondiente y le solicitamos respetuosamente al compañero indicado realizar la siguiente lectura de la fracción algebraica y tomamos nota en nuestro cuaderno de lo más importante:

Fracciones Algebraicas

Una **fracción algebraica** es una expresión en la que tanto el numerador como el denominador son polinomios.

Ejemplos:

Las siguientes expresiones son fracciones algebraicas:

- $\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}$
- $\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$
- $\frac{x-3}{x+1}$
- $\frac{x+1}{x+3}$

Estas se pueden presentar en situaciones que involucran razones y variables.

Ejemplo 1:

Se sabe que dos ángulos complementarios son aquellos cuya suma da como resultado 90°. Encontrar el valor de los ángulos si están en una razón de 1 a 2.

Para solucionarlo se sabe que la suma de dos ángulos A y B es 90°:

$$A + B = 90°$$

Además,

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$$

Entonces $2A = B$ y reemplazando en la primer ecuación:

$$A + 2A = 90°$$

Es decir, $3A = 90$, por lo que $A = 30°$, resultando que $B = 60°$.

Ejemplo 2:

La suma de las edades de Daniela y de David es el doble de restar la edad de Daniela a la edad de David, ¿qué razón hay entre sus edades?

Se expresa la razón así:

$$\frac{A-B}{A+B} = \frac{1}{2}$$

Luego, $2(A-B) = A+B$, es decir $2A - 2B = A + B$, o lo que es equivalente $2A - A = B + 2B$ entonces $A = 3B$. Esto indica que la razón entre las edades es de 3 a 1, $\frac{A}{B} = \frac{3}{1}$.

Las fracciones algebraicas se pueden clasificar en:

Fracción algebraica simple

Es aquella fracción algebraica en la que el numerador y el denominador son polinomios. Los siguientes son ejemplos de fracciones simples:

- $\frac{2x^2+x-13}{(x^2+6x+5)}$
- $\frac{x-3}{(x^2+6x+5)}$
- $\frac{4x+13}{5x+2}$

Fracción algebraica compuesta

Es una fracción en la que el numerador o denominador es una fracción, puede incluso tener una fracción en ambos. Son ejemplos de fracciones compuestas las siguientes expresiones:

- $\frac{\frac{2x+3}{4x}}{x+2}$
- $\frac{x^2-x+2}{\frac{2x+1}{x-3}}$
- $\frac{\frac{5x+1}{3x}}{\frac{x+1}{2x-1}}$

Fracción propia e impropia

Una fracción simple se llama **propia** si el grado del numerador es menor que el grado del denominador; y se llama **impropia** si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.

Por ejemplo,

$$\frac{20\,xy^2}{36x^3y^6} \quad , \quad \frac{x-1}{9x^3+14x+45}$$

Son fracciones propias, mientras que

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2+1} \quad , \quad \frac{x^2-2x+2}{x+1}$$

Son fracciones impropias.

Una fracción impropia puede escribirse como la suma de un polinomio y una fracción propia:

$$\frac{a^3-3a^2+4a-7}{a^2+a-1} = a-4+\frac{9a-11}{a^2+a-1}$$

2. Determinamos si las siguientes expresiones son simples o compuestas y justificamos nuestras respuestas:

a. $\dfrac{\frac{x+1}{3}}{3x+3}$

b. $\dfrac{\frac{x+1}{3x}}{3x+3}$

c. $\dfrac{\frac{x+1}{1}}{3x-9}$

3. Señalamos si las siguientes expresiones son propias o impropias:

a. $\dfrac{5x^2-3x+1}{4x-2}$

b. $\dfrac{2x+4}{4x^2-16x+4}$

c. $\dfrac{5x^2-3x+1}{10x^2+4x-2}$

Propiedades de las fracciones algebraicas

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si al reemplazar la parte literal por un valor específico se obtiene una igualdad entre ambas fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2} \quad \text{y} \quad \frac{x-3}{x-1}$$

Son fracciones equivalentes, pues al sustituir la parte literal x por un número, digamos 4, se tienen las fracciones o se puede obtener otra expresión en la que ambas fracciones son iguales:

$$\frac{4^2-4-6}{4^2+4-2}=\frac{16-4-6}{16+4-2}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

Y

$$\frac{4-3}{4-1}=\frac{1}{3}$$

El recíproco de una fracción

A toda fracción algebraica se le puede obtener su recíproco cambiando el numerador por el denominador, de la siguiente forma:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2} \text{ su recíproco es } \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$$

El inverso aditivo de una fracción

A toda fracción algebraica se le puede obtener su inverso aditivo, cambiando los signos del numerador, así:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2} \text{ su inverso aditivo es } \frac{-(x^2-x-6)}{x^2+x-2}=\frac{-x^2+x+6}{x^2+x-2}$$

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Las operaciones de adición y sustracción requieren que los denominadores sean iguales, en caso contrario, se realizan procesos de amplificación o simplificación para que se tenga esta condición de igualdad.

Ejemplo 1:

Sumar las siguientes fracciones $\frac{x-5}{x+4}$ y $\frac{x+7}{x+4}$.

Debido a que las dos fracciones tienen el mismo denominador, la suma corresponde simplemente a sumar los numeradores, dejando el denominador del resultado igual al de las fracciones:

$$\frac{x-5}{x+4}+\frac{x+7}{x+4}=\frac{(x-5)+(x+7)}{x+4}=\frac{2x+2}{x+4}$$

Ejemplo 2:

Sumar las fracciones $\frac{x-3}{x+1}$ y $\frac{x+2}{x+3}$.

En este caso, en primer lugar se deben multiplicar los denominadores para obtener el denominador del resultado, luego se multiplica el numerador de una fracción con el denominador de la otra fracción y se suman estos productos para obtener el numerador, así:

$$\frac{x-3}{x+1}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}+\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{(x-3)(x+3)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$$

Ahora, se realizan los productos correspondientes y la suma que se indica para obtener el resultado:

$$=\frac{(x^2-9)+(x^2+3x+2)}{(x^2+4x+3)}=\frac{2x^2+3x-7}{(x^2+4x+3)}$$

Ejemplo 3:

A la fracción $\frac{x-9}{x+3}$ restar la fracción $\frac{x+7}{x+3}$.

Como ambos denominadores son iguales, el denominador del resultado es igual a este, mientras que el numerador es el resultado de sumarle el inverso aditivo del sustraendo al minuendo:

$$\frac{x-9}{x+3}-\frac{x+7}{x+3}=\frac{(x-9)-(x+7)}{x+3}=\frac{x-9-x-7}{x+3}=\frac{-16}{x+3}$$

Ejemplo 4:

De $\frac{x-2}{x+1}$ restar $\frac{x-3}{x+5}$

$$\frac{x-2}{x+1}-\frac{x-3}{x+5}$$

Dado que los denominadores son diferentes, se deben multiplicar para obtener el denominador del resultado, luego se multiplica el numerador de una fracción con el denominador de la otra fracción y se restan estos productos para obtener el numerador, así:

$$\frac{x-2}{x+1}-\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x-2)(x+5)-(x+1)(x-3)}{(x+1)(x+5)}$$

Se realizan los productos del numerador y del denominador:

$$\frac{(x-2)(x+5)-(x+1)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{(x^2+3x-10)-(x^2-2x-3)}{(x^2+6x+5)}$$

Luego se restan los polinomios del numerador, según corresponda:

$$\frac{(x^2+3x-10)-(x^2-2x-3)}{(x^2+6x+5)}=\frac{x^2+3x-10-x^2+2x+3}{(x^2+6x+5)}=\frac{5x-7}{x^2+6x+5}$$

4. Realizamos los siguientes ejercicios:

a. $\frac{x-2}{x+1}-\frac{2x}{x-1}$

b. $\frac{x^2}{x-6}+\frac{x-3}{x+1}$

c. $\frac{x^2}{x-6}+\frac{x-3}{x+1}$

d. $\frac{2x-3}{x+2}-\frac{x^2}{x^2-1}$

e. $\frac{3x-1}{x^2}+\frac{x^2}{x+1}-\frac{x}{x-1}$

f. $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x-3}{x^2}-\frac{4x}{x+2}$

g. $\frac{x-2}{x+1}-\frac{x^2-2x+1}{x+1}$

h. $\frac{x^2-x}{x+1}+\frac{x^2-1}{x-2}$

i. $\frac{x^2+2x+1}{x-3}+\frac{x-3}{x+1}$

j. $\frac{x^2-1}{x+2}+\frac{x^2}{x^2\ \ 1}$

k. $\frac{x^2-3x+2}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x-1}$

l. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-3}{x+2}+\frac{4x}{x+3}$

m. $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x-3}{x+1}+\frac{4x}{x+2}$

n. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x-3}{x+2}-\frac{x^2+x}{x+2}$

o. $\left[\frac{x^2+4x+4}{x+1}-\frac{5x-3}{x+1}\right]-\frac{8-3x}{x+1}$

p. $\frac{1}{3x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x}$

q. $\frac{2}{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}$

r. $\frac{3}{x}-\frac{x}{x-1}$

s. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

5. Compartimos con nuestros compañeros y profesor nuestras ideas del trabajo realizado durante la fundamentación y ejercitación, para llegar a consensos sobre la temática, generando conocimiento y aclarando nuestras dudas.

D Aplicación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Resolvemos las siguientes situaciones aplicando lo aprendido acerca de la suma y resta de fracciones algebraicas. No olvidemos consignar la información en el cuaderno:

   a. Andrea heredó una parcela que tiene de área $x^2 - 5x + 2$, por otra parte su vecino Mauricio tiene una parcela de área $\frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x - 1}$. Si Andrea decide comprar la parcela de Mauricio, ¿cuál es el área total de la parcela?

   b. La casa de Juanita tiene un área de $x^2 + 3x + 2$, y el frente tiene una longitud de $x + 1$, ¿cuánto tiene de largo la casa? Si Juanita desea ampliar su casa hacia el frente una longitud de $\frac{x^2-1}{x-1}$, ¿cuál será el área de la nueva casa?

   c. Dos ángulos complementarios son aquellos que suman 90°. ¿Cuáles son las medidas de dos ángulos complementarios que están a una razón de 3 a 2?

   d. Dos ángulos suplementarios son aquellos que suman 180°. ¿Cuáles son las medidas de dos ángulos suplementarios que están a una razón de 7 a 3?

2. Solicitamos a nuestro profesor que amplíe un poco el tema y que aclare todas nuestras inquietudes al respecto.

E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Leemos el siguiente texto y anotamos los aspectos más importantes en nuestros cuadernos:

Equivalencia de fracciones algebraicas

Los procedimientos para obtener fracciones algebraicas son los mismos que se empleaban para los racionales. Estos se muestran a continuación:

Amplificación

La amplificación de una fracción algebraica consiste en multiplicar tanto el numerador como el denominador por la misma expresión algebraica. Por ejemplo, al multiplicar el numerador y el denominador de la expresión $\frac{x-2}{x+1}$ por $x-1$, se obtiene la fracción:

$$\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$$

Además las expresiones $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ y $\frac{x-2}{x+1}$ son equivalentes.

2. Amplificamos las siguientes expresiones en nuestros cuadernos:

a. $\frac{x-1}{x+1}$

b. $\frac{x+3}{x+4}$

c. $\frac{2x+1}{3x+2}$

d. $\frac{x^2-6x+4}{x+2}$

Simplificación

Por otra parte, la simplificación de las fracciones algebraicas se puede lograr de la misma forma en que se simplifican las fracciones numéricas, es decir, dividiendo por la misma cantidad tanto numerador como denominador. Esta se puede lograr cuando se encuentra un factor común igual para el numerador y el denominador.

Ejemplo:

Simplificar la fracción:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$$

En primer lugar se factoriza el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}=\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

Y luego se procede a simplificar:

$$\frac{\cancel{(x+1)}(x+1)}{\cancel{(x+1)}(x+3)}=\frac{x+1}{x+3}$$

3. En nuestros cuadernos, simplificamos, si es posible, las siguientes expresiones. De no ser posible explicamos por qué:

   a. $\frac{2x^2-2x}{x^3-x}$

   b. $\frac{4x^2-16}{2x+8}$

   c. $\frac{x^2-100}{10(x^2-10)}$

   d. $\frac{2x^3-6x+4}{2x+4}$

4. Compartimos nuestras observaciones con ayuda del profesor y aclaramos las dudas encontradas.

Evaluación por competencias

1. El resultado de la siguiente adición de fracciones algebraicas es:

$$\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x-3}$$

A. $\frac{4x}{(x+3)(x-3)}$

B. $\frac{4x}{(x+3)(x+3)}$

C. $\frac{4}{(x-3)^2}$

D. $\frac{4x}{x^2-9}$

1

2. Determino cuál par de fracciones algebraicas es equivalente:

A. $\frac{x+1}{x+2}$ y $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

B. $\frac{x-1}{x-2}$ y $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

C. $\frac{x+1}{x-2}$ y $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

D. $\frac{x-1}{x+2}$ y $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

2

3. La siguiente fracción algebraica $\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-1}$ simplificada es:

A. $\frac{x+(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

B. $\frac{x(x+1)}{x-1}$

C. $\frac{(x+1)^2}{(x-1)}$

D. $\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

3

4. Dos ángulos complementarios son aquellos cuya suma es de 90°. Las medidas de dos ángulos complementarios que están a razón de 5 a 1 son:

A. 45 y 45.

B. 60 y 30.

C. 75 y 15.

D. 80 y 10.

4

5. Cuál de los siguientes argumentos es verdadero para confirmar que las siguientes fracciones son equivalentes:

$$\frac{x-4}{x-3} = \frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-3}$$

A. Son equivalentes porque $(x-1)$ es un factor común de (x^2-3x-4) y de (x^2-2x-3).

B. Son equivalentes porque $(x-4)(x-3)$ es igual a (x^2-3x-4).

C. Son equivalentes porque $(x+1)$ es un factor común de (x^2-3x-4) y de (x^2-2x-3).

D. Son equivalentes porque $(x-4)(x-3)$ es igual a (x^2-2x-3).

5

Glosario

- **Denominador polinómico:** Cuando en una fracción el denominador es un polinomio.
- **Fracción algebraica:** Es una expresión que se puede escribir como cociente de dos polinomios. El polinomio “P(x)” es el numerador y “Q(x)” el denominador de la fracción, donde $Q(x) \neq 0$.
- **Fracciones algebraicas heterogéneas:** Dos fracciones algebraicas que tienen distinto polinomio como denominador.
- **Fracciones algebraicas homogéneas:** Dos o más fracciones algebraicas que tienen el mismo polinomio como denominador.
- **Fracciones algebraicas impropias:** Fracción algebraica simple en la que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.
- **Fracciones algebraicas propias:** Fracción algebraica simple en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.
- **Fracción compuesta:** Es aquella que tiene una o más fracciones en el numerador o en el denominador.
- **Numerador polinomio:** Cuando en una fracción el numerador es un polinomio.
- **Simplificar una fracción:** Es transformarla en otra equivalente cuyo numerador y denominador no tengan más factores comunes que la unidad 1. La fracción que resulta es irreductible. Esta reducción se lleva a cabo descomponiendo en factores el numerador y el denominador, simplificando, seguidamente, los factores comunes siempre que sean distintos de cero.