

# Unidad

# 4



Modelemos situaciones  
de variación con funciones

## Estándares

- Identifico relaciones entre las propiedades de las gráficas y las propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
- Comparo los resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.

## Competencias

### Matemáticas:

- Resuelvo problemas que involucren características de las funciones en contextos geométricos, algebraicos y estadísticos. Además, genero análisis de un conjunto de datos a partir de sus distribuciones probabilísticas.

### Ciudadanas:

- Rechazo las situaciones de discriminación y exclusión social en el país; comprendo sus posibles causas y las consecuencias negativas para la sociedad.

# Guía 1



Iniciando la función  
como modelación

## Indicadores de desempeño

### Conceptual

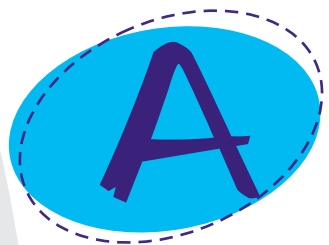
- Identifica elementos gráficos y algebraicos de una función.

### Procedimental

- Determina las características de una función y de una relación.

### Actitudinal

- Reconoce la posibilidad que le ofrece la matemática para modelar situaciones cotidianas.



## Vivencia

### TRABAJO INDIVIDUAL

1. Leo atentamente las siguientes situaciones, las consigno y resuelvo en mi cuaderno:
  - a. Una persona se encuentra en la ciudad  $A$ , esta inicia el camino hacia la ciudad  $B$  y recorre 20 kilómetros por hora; si tardó 5 horas, ¿a qué distancia está la ciudad  $B$  del punto de partida? Dibujo lo que indica la situación anterior.
  - b. Melisa ha medido la distancia que recorre su bicicleta con cada giro completo del pedal y se dio cuenta que por cada giro completo del pedal la bicicleta avanza 3 metros.



- ✓ Si Julián vive a 45 metros de la casa de Melisa, ¿cuántas vueltas de pedal debe dar Melisa para ir a visitarlo?
- ✓ Si Melisa da 20 vueltas de pedal para ir donde Leidy, ¿cuál es la distancia hasta su casa?
- ✓ Completo la siguiente tabla, allí se relaciona cada giro del pedal y la distancia recorrida por la bicicleta:



Número de giros del pedal	Distancia recorrida (m)
2	6
	15
10	
	45

- c. Supongo que he obtenido un empleo como vendedor. El jefe me ha dicho que el sueldo dependerá del número de unidades que venda cada semana, por cada unidad vendida recibiría \$3 000 pesos. Pero también me dijo que si no logro ninguna venta de todas formas tendré un salario semanal de \$75 000 pesos.

Por ejemplo, si vendiera 3 unidades en la semana, entonces recibiría \$ 75 000 más \$3 000 por cada unidad vendida, es decir  $\$75\,000 + \$9\,000$ , que es igual a  $\$84\,000$ .

- ✓ Construyo una tabla como la del ejercicio anterior, donde se relacione el sueldo fijo, el número de unidades vendidas por semana y el total ganado. Completo la tabla con 1, 2, 3, 4, 5, 6 unidades vendidas por semana.
- ✓ Con ayuda de la tabla represento de forma algebraica la situación del empleador.

## TRABAJO EN EQUIPO

2. Me reúno con otros tres compañeros y revisamos lo que realizamos de manera individual en la actividad anterior y respondemos:
  - a. ¿Qué tienen en común las situaciones anteriores?
  - b. ¿Es posible representar gráficamente las situaciones anteriores? ¿Por qué?
  - c. ¿Es posible representarlas en una tabla? ¿Por qué?
  - d. ¿Es posible representar de forma algebraica las situaciones anteriores? ¿Por qué?
3. Le presentamos al profesor las actividades desarrolladas tanto de forma individual como en equipo.





## Fundamentación Científica y Ejercitación

### TRABAJO EN EQUIPO

1. En grupos de tres estudiantes, distribuimos los roles correspondientes y hacemos la lectura:

Existen varias situaciones que relacionan dos o más magnitudes, en todos los casos son relaciones, pero existen unas relaciones especiales que se llaman funciones.

Algunos ejemplos de relaciones pueden ser:

- ✓ El doble de un número.
- ✓ Los múltiplos de 6.
- ✓ El alza de los alimentos.

Toda relación tiene un conjunto de partida o un conjunto de llegada. En este cuadro se presentan diversas formas de representar una función:

#### Conjuntista

Se tiene los siguientes conjuntos,  
 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10\}$  y  
 $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Se pone A como conjunto de partida y B como conjunto de llegada y se establece que la relación “es el doble de”; se organizan las parejas así:

(1,2) (2,4) (3,6) (4, 8) (5,10).

No se pueden establecer más parejas con los elementos del conjunto.

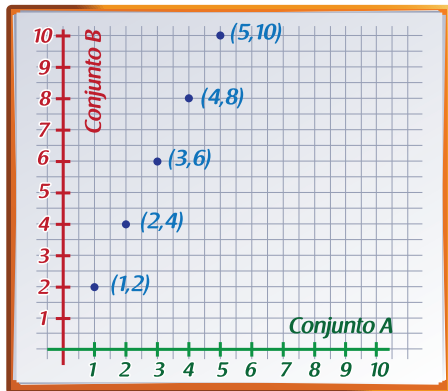
#### Tabla

A nivel de tabla se representan los datos de forma horizontal o vertical. La misma relación es :

Conjunto A	Conjunto B
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	No hay
7	No hay
8	No hay
9	No hay
10	No hay

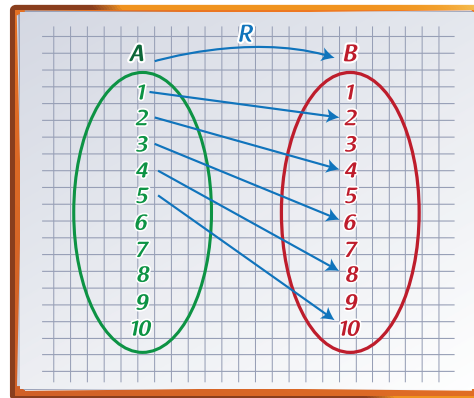
### Gráfica

La gráfica se representa con puntos, así:



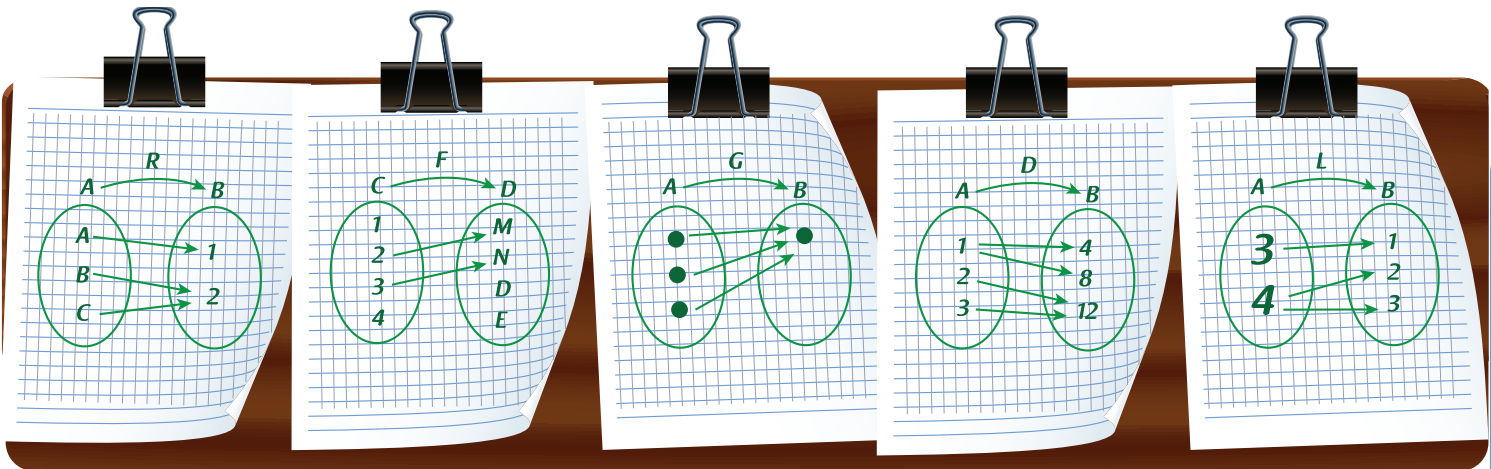
### Sagital

La gráfica se representa en dos conjuntos, de esta manera:



Al observar encontramos que en el conjunto de partida no todos los elementos tienen una pareja o es posible encontrar un elemento con dos elementos del conjunto de llegada. En cambio, las funciones sí requieren que todos los elementos del conjunto de partida tengan solamente un vínculo; y se denomina **dominio de la función** y el conjunto de llegada, en el que no es necesario tomar todos los elementos de él para la función, se llama **rango de la función**.

2. Determinamos cuáles de las siguientes representaciones son relaciones o funciones:



**Una función** es una relación de causa – efecto entre dos cantidades matemáticas; a iguales causas, iguales efectos.

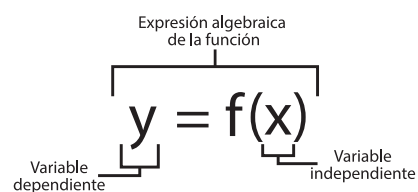
La causa es denominada como la **variable independiente** y usualmente se denota con la letra “ $x$ ”, el efecto es denominado como la **variable dependiente** y se denota con la letra “ $y$ ”.

Frecuentemente, se utiliza la expresión  $y = f(x)$  para dar a entender que efectivamente “y” depende del valor “x”.

Los siguientes son ejemplos de relaciones funcionales:

- ✓ El **área** de un polígono regular en **función** de la medida del **lado**.  
La variable dependiente: El área del polígono.  
La variable independiente : El lado del polígono.
- ✓ El precio de un trayecto realizado en taxi en la ciudad de Manizales es función de la distancia recorrida.  
La variable dependiente: El precio de la carrera.  
La variable independiente : La distancia recorrida.

Las funciones tienen diferentes formas de representación: Gráfica, tabla y algebraica:



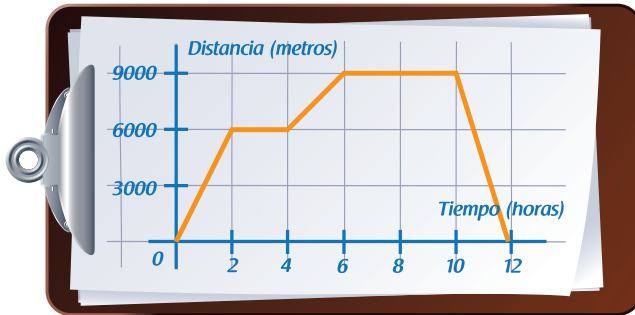
x	-2	-1	0	1	2	3
y						

3. Respondemos en el cuaderno las siguientes preguntas, luego discutimos las respuestas con el grupo:

- a.Cuál es la variable dependiente e independiente en los siguientes enunciados:
- ✓ Distancia recorrida en un vehículo en función del tiempo.
  - ✓ Distancia recorrida por un Tejo, en función de la fuerza.
  - ✓ Número de hombres trabajando en una construcción.
  - ✓ El precio del mercado en casa en función de la cantidad.
  - ✓ Número de prendas vendidas y precio.
  - ✓ Número de horas trabajadas y pago por hora.

- b. Si tenemos las variables de “tiempo” y “juventud”, cómo podríamos relacionarlas de manera funcional, cuál sería la variable independiente y cuál la variable dependiente.

4. Escribimos qué tipo de representación tienen las siguientes funciones:



FUNCIÓN	
X	Y
-3	-1
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 5$$

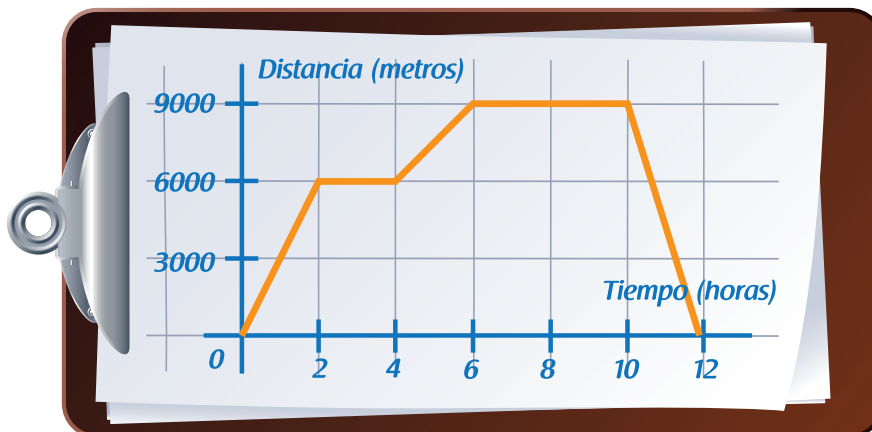
$$h(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$u(x) = 5x^2 - 10x + 5$$

5. Leamos esta situación:

Juan se monta en su carro, va manejando durante un tiempo, desayuna y lee la prensa, sigue un rato hasta la casa de unos amigos que le han invitado a comer. Después de un tiempo, regresa rápido ya que se le ha hecho un poco tarde. ¿A qué horas llega a su casa nuevamente?

Esta es la gráfica que corresponde a esta situación:



Para este caso, la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la distancia.

a. Completamos la tabla:

Tiempo (horas)	0	2	4	6	8	10	12
Distancia (metros)							

b. Contestamos las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué distancia recorrió a las 3 horas?
- ✓ ¿Qué distancia recorrió a las 5 horas?
- ✓ ¿Qué distancia recorrió a las 7 horas?
- ✓ ¿Qué distancia recorrió a las 9 y media horas?

6. Siguiendo con la lectura, para representar funciones, también se acude a las expresiones algebraicas:

**Ejemplo:**

En el Almacén “Surtidescuentos”, durante la semana del amor y la amistad, se encuentran en promoción de 2x1, en donde por cada prenda que se compre se obsequia otra del mismo valor.



Esta información se puede revisar en la siguiente tabla, que se construye dando valores a  $x$  y reemplazándola en la ecuación planteada:

Número de prendas compradas	1	2	3	4	5	6	7	8
Cantidad de prendas que llevo a casa	2	4	6	8	10	12	14	16

En primer lugar, identifico la variable independiente, que en este caso corresponde



al número de prendas que se compran. La variable independiente la represento con  $x$ .

Para el caso de la variable dependiente, que en este caso es el obsequio, depende del número de prendas compradas, porque siempre me dan una más por cada una que compre. La variable dependiente la represento con  $y$  o  $f(x)$ .

La expresión algebraica que permite representar la situación anterior es la siguiente:

$$f(x) = 2x$$

Que es lo mismo que decir:

$$y = 2x$$

En el ejemplo, ¿cuántas prendas me llevo a casa si compro 7 prendas?

Remplazamos las 7 prendas en el lugar de la  $x$ , y luego, realizando la operación indicada obtengo el valor de la  $y$ , que no es más que el número de prendas que llevo a casa:

$$y = 2(7) = 14$$

Al representar en una gráfica, hay que tener en cuenta que la variable independiente se ubica en el eje de la abscisa es decir, en el eje de la  $x$ .

La variable dependiente, se ubica en el eje de las ordenadas es decir, en el eje de la  $y$ .

A partir de una función expresada algebraicamente se pueden deducir varios valores. Por ejemplo:

$$f(x) = 3x - 2$$

Podemos calcular los valores de

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4 \text{ es decir que } f(2) = 4$$

$$f(-4) = 3(-4) - 2 = -12 - 2 = -14 \text{ es decir que } f(-4) = -14$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = 3\left(\frac{2}{5}\right) - 2 = \frac{6}{5} - 2 = \frac{6}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{4}{5} \text{ es decir que } f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

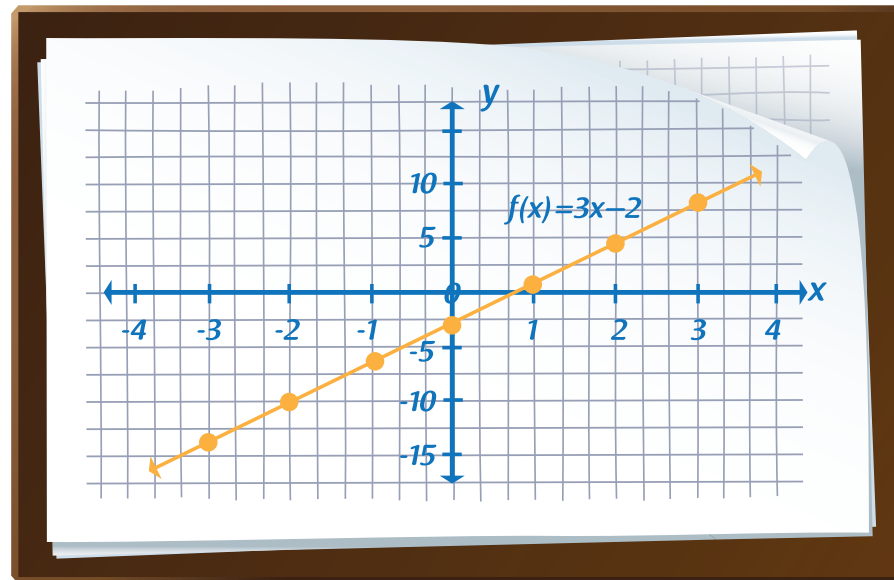
Igualmente estos valores se pueden organizar en una tabla, así:

$x$	-4	$\frac{2}{5}$	2
$f(x)$	-14	$-\frac{4}{5}$	4

Aunque siempre se aconseja que se tomen números negativos, el cero y números positivos para valorar la función.

Y su gráfica es continua porque su dominio son los números reales y el rango los números reales. Esta es la gráfica correspondiente a la función

$$f(x) = 3x - 2$$



7. Representamos las siguientes situaciones de variación mediante tablas, fórmulas y gráficas:



- En la tienda del colegio un bombón cuesta \$450, establecemos la función entre el número de bombones vendidos y precio.
- Se tiene un triángulo rectángulo, tal que la longitud de un cateto es el triple de la longitud del otro cateto. Establecemos la función entre longitud de un cateto con respecto al otro.
- Si por salón hay 23 estudiantes, establecemos la función entre números de salones y número de estudiantes.
- Cada minuto una bacteria se reproduce el doble. Establecemos la función entre tiempo y número de bacterias.
- El triple del cuadrado de un número. Establecemos la función entre número y el número que cumple la condición.

## TRABAJO INDIVIDUAL

8. Calculo los valores del rango que corresponden al valor dado, de cada una de las funciones:

a. Si la función es  $g(x) = x^2 + 3x - 6$

Determino:

$g(0)$                    $g(-3)$                    $g(3)$                    $g(1)$                    $g(-1)$

b. Si tenemos la función  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

Calculo los valores para  $x = 1$ ;  $x = 0$  y  $x = 2$

c. Si tenemos la función  $f(x) = x^2 + 1$

Calculo todos los enteros comprendidos entre -5 y 5 para la función  $f(x)$ .

9. Presentamos al profesor los ejercicios realizados, para su revisión y para aclarar las dudas, si es necesario.



## TRABAJO EN EQUIPO

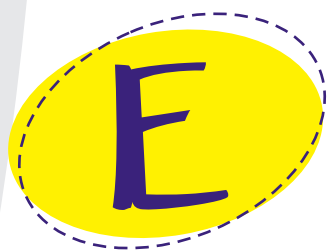
Para la semana de la convivencia escolar, se pretenden llevar a cabo varias actividades deportivas, culturales y celebraciones.



A cada equipo de trabajo se le pide que realice un presupuesto de cada una de las actividades a desarrollar y que busquen la manera de generar fondos que servirán para despedir el año.

Las situaciones a considerar para recoger dinero son:

- a. Ventas de los alimentos: Carne asada, mazorca, arepa y chorizo, perro, lechona y gaseosa.
  - b. Cobro de entrada para la presentación de una película.
  - c. Inscripción de los cursos para participar en un concurso de baile.
  - d. Cuota por familia para el ingreso a las diferentes actividades
1. Determinamos en cada caso, cuál es la variable independiente y dependiente.
  2. Escribimos una expresión algebraica por cada una de las situaciones y establecemos el precio actual de los objetos que cita cada situación.
  3. Representamos en tabla y gráfica cada una de las funciones que se presentan en la relación entre las variables de cada situación.
  4. Dialogamos con el profesor acerca de la importancia que tienen las funciones para modelar situaciones de la vida. Consignamos en el cuaderno las conclusiones a las que llegamos.



## Complementación

### TRABAJO EN PAREJAS

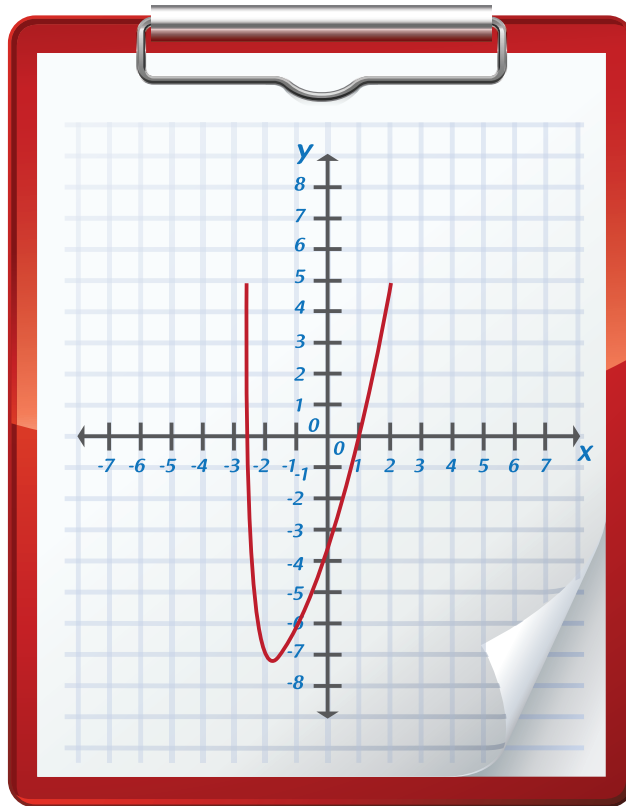
1. Leemos atentamente la siguiente información que nos permite comprender otros aspectos de las funciones algebraicas. Consignamos los datos más importantes:

## ***Funciones polinómicas:***

Son aquellas cuya expresión es un polinomio y su gráfica es una curva continua.  
Por ejemplo:

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 3$$

Su correspondiente gráfica permite observar tanto su continuidad como su dominio y rango:



Toda función polinómica es continua, cuyo **dominio y rango** es el conjunto de los números reales.

Recordemos que:

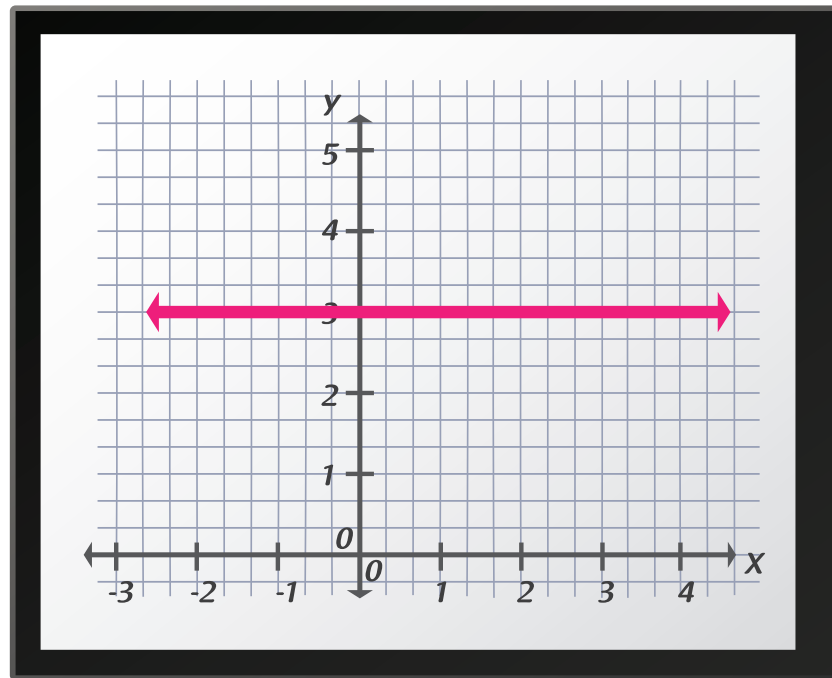
El dominio de una función es el conjunto de valores de  $x$  que tienen imagen de  $y$ . El recorrido, rango o imagen es el conjunto de valores de  $y$  que son imagen de algún valor de  $x$  perteneciente al dominio.

## ***Función constante:***

Se representa gráficamente con una recta horizontal, paralela al eje de las abscisas. En estas funciones, cada vez que se incrementa  $x$  en una unidad, su resultado no aumenta. Su dominio lo comprende el conjunto de los números reales y su rango sólo el valor de la constante.

Gráfica:  $f(x) = 3$

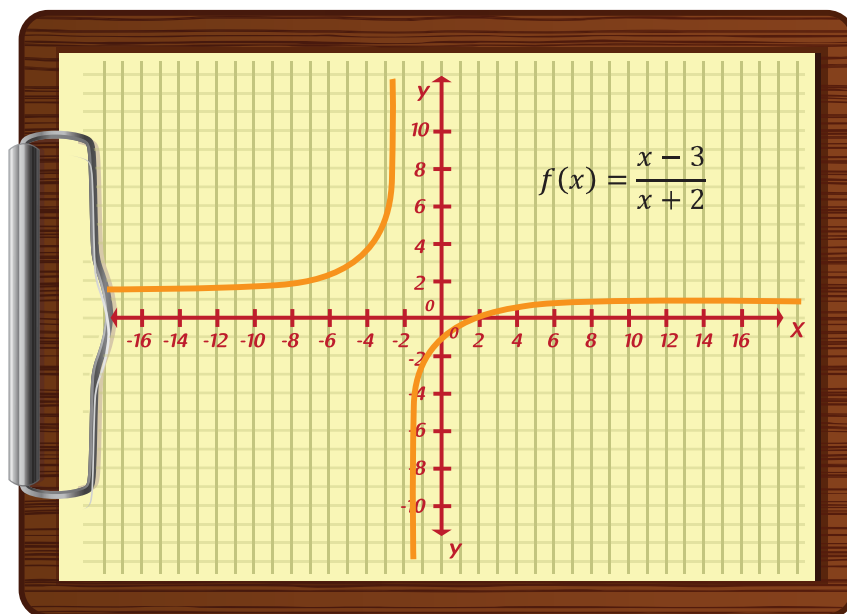
Su gráfica correspondiente es:



### ***Función Racional:***

Es una función de la forma  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios. El dominio son todos los reales excepto donde  $q(x)$  es cero porque nunca se puede dividir por cero.

Por ejemplo:  $h(x) = \frac{x-3}{x+2}$ . El dominio son todos los reales menos el número -2, por eso en la gráfica se presentan dos curvas, debido a que en ese número no está definido en la función:

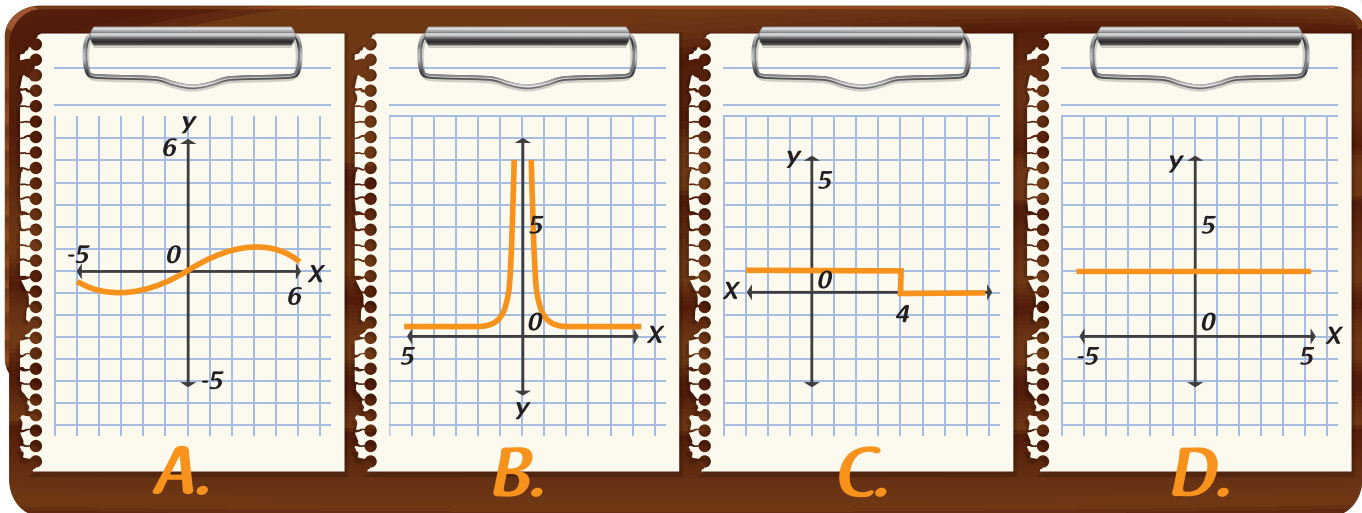


2. Consultamos en internet o en libros ejemplos de estos tipos de funciones y los anotamos en nuestros cuadernos.



## Evaluación por competencias

1. Entre las siguientes representaciones gráficas hay una que no corresponde a una función:

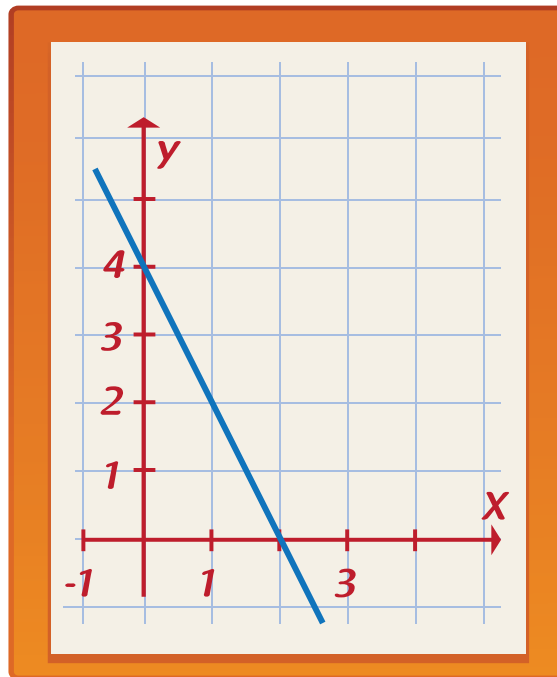


2. La función que representa los datos de la tabla es:

x	0	1	2	3	4	5
y	2	5	8	11	14	17

- A.  $y = x + 2$
- B.  $y = 2x + 2$
- C.  $y = 3x + 2$
- D.  $y = x + 4$

3. La función que representa la gráfica es:



- A.  $y = \frac{1}{2}x$
- B.  $y = \frac{1}{4}x$
- C.  $y = x - 2$
- D.  $y = -2x + 4$

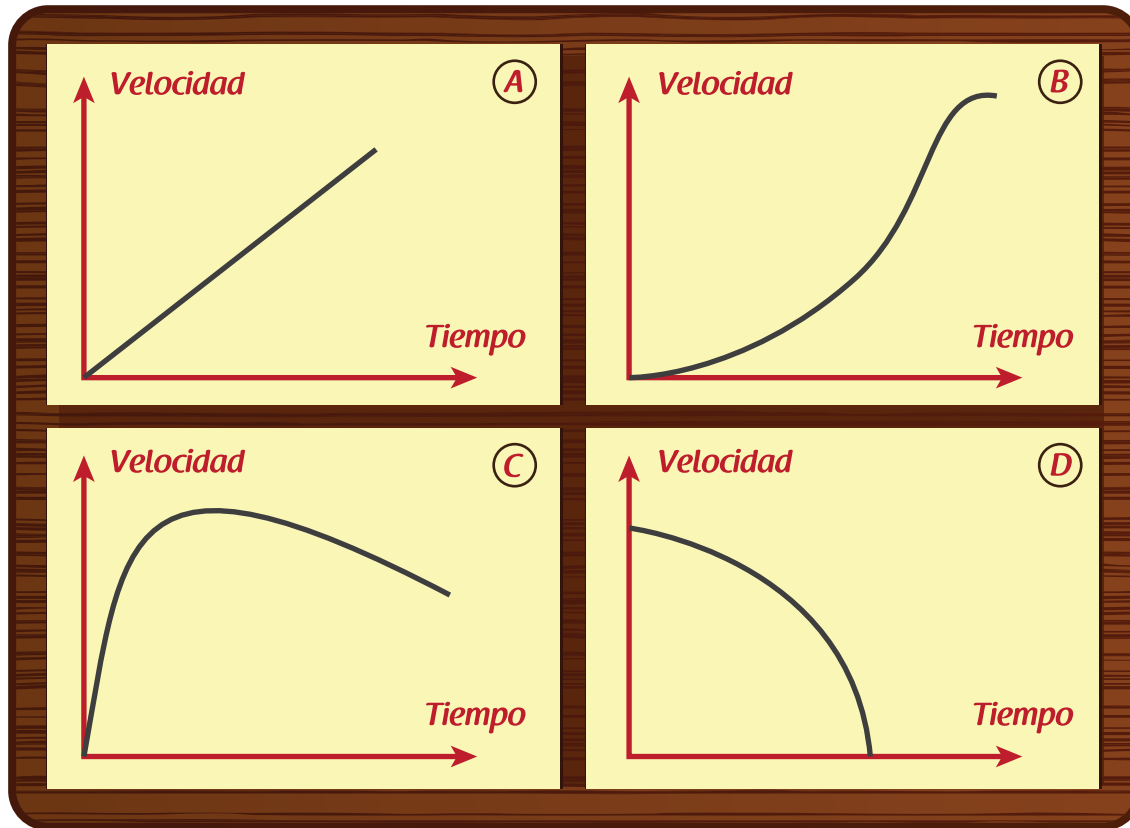
3

4. Respondo Falso (F) o Verdadero (V):

- A.  $f$  es una función de  $x$  en  $y$ , si cada valor de  $x$  tiene un único valor de  $y$  asociado con  $x$ . ( )
- B. En una función, una variable depende de otra. ( )
- C. Una función es una relación entre variables. ( )
- D. Una función es una operación entre variables. ( )

4

5. A la velocista olímpica colombiana Katherin Iburguen, la cual es especialista en los 400 m planos, se le pide participar en una carrera de 1 500 metros planos. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la velocidad alcanzada por la velocista?:



## Glosario

- **Dominio:** Es el conjunto de valores de  $x$  que tienen imagen.
- **Función:** Una función es una relación entre dos variables. Una de ellas se denomina la variable dependiente  $y$  y la otra la variable independiente  $x$ , donde  $y$  depende exclusivamente de  $x$ .
- **Función continua:** Una función es continua si su curva es una línea que se define a lo largo de su dominio.
- **Recorrido o rango:** Es el conjunto de valores de  $y$  que son imagen de algún valor de  $x$  perteneciente al dominio.
- **Registro algebraico:** En este registro, una función se puede representar por una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen  $f(x)$  para toda  $x$  perteneciente al dominio de la función, por lo tanto esta representación tiene pocas limitaciones y son aquellas que provienen del cálculo.
- **Registro gráfico:** En este registro, una función se puede representar por medio de una línea o una curva en el plano cartesiano. Se pone en juego la noción de grafo de una función. También presenta limitaciones, ya que como en el caso de la tabla, es necesario imaginar que continúa más allá de lo que es posible observar.
- **Registro tabla:** En este registro, una función se representa con una tabla de valores que pone en juego la relación de correspondencia. Este registro tiene limitaciones ya que en una tabla sólo puede incluirse un número finito de pares de valores.
- **Registro verbal o enunciado:** En este registro la función admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere estudiar un fenómeno utilizando una función como modelo, se cuenta generalmente, en principio, con una descripción de este tipo.