Guía 5

Más sobre las medidas de sólidos

Indicadores de Desempeño:

Conceptual

- Deduce las fórmulas de área y volumen de sólidos redondos.

Procedimental

- Resuelve problemas de área y volumen de cuerpos redondos.

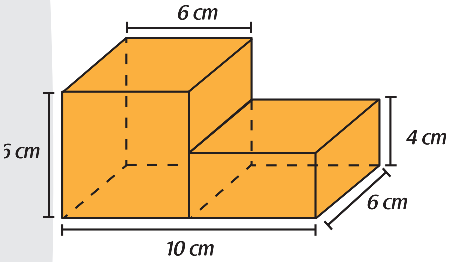
Actitudinal

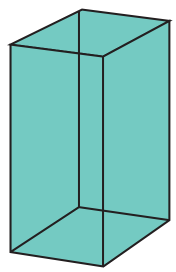
- Coopera con otros para lograr realizar de manera asertiva soluciones geométricas.

Vivencia

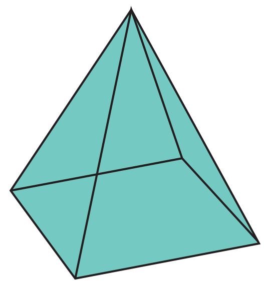
TRABAJO EN PAREJAS

1. Determinamos las áreas totales de los siguientes sólidos:



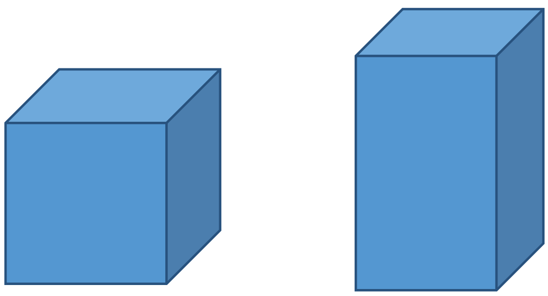


Alto: 20 cm
Ancho: 15 cm
Largo: 10 cm



Arista lateral: 20 cm
Arista base: 15 cm

2. Establecemos cuál de las siguientes figuras tiene más volumen, si la base mide 4 cm^2 y la altura es de 2 unidades más que la longitud del lado de la base. Justificamos la respuesta:



3. En una bodega se colocan arrobas de arroz, cuyas dimensiones son 75 cm, 10 cm y 40 cm, cada una. ¿Cuánto debe medir una bodega de forma de prisma rectangular para que quepan aproximadamente 10 000 arrobas?

TRABAJO EN EQUIPO

4. Comparamos las respuestas y llegamos a un consenso si nuestros resultados son diferentes.

5. Comparamos la forma de resolver cada una de las situaciones anteriores y seleccionamos cuál es la mejor. Justificamos la respuesta.

6. Invitamos a nuestro profesor a revisar nuestro trabajo.

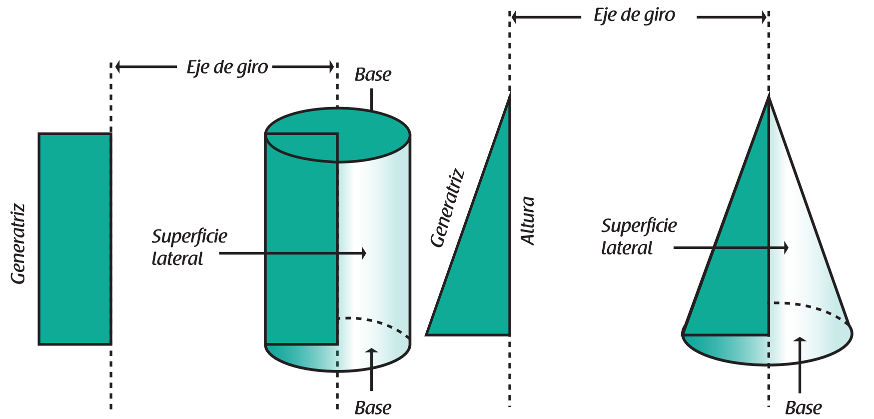
B Fundamentación Científica

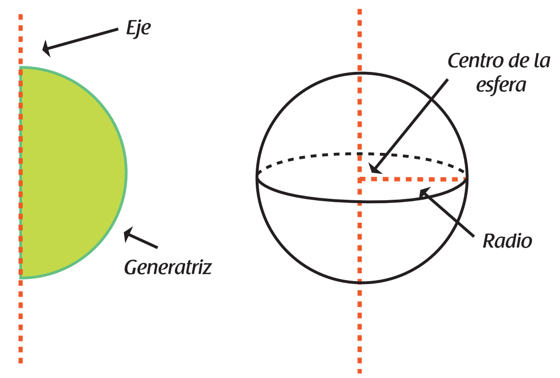
TRABAJO EN EQUIPO

1. Nos organizamos en subgrupos, asignamos los roles correspondientes, y seleccionamos a un relator para que realice la lectura en voz alta del siguiente texto. Diseñamos un esquema (mapa conceptual, cuadro sinóptico, entre otros) que nos permita plasmar las ideas principales de lo leído:

Sólidos redondos

Son aquellos que tienen una o más caras y que poseen la forma de un círculo. Los sólidos redondos son los que se forman cuando de una línea recta o una curva, se realiza un movimiento de rotación alrededor de un punto o de otra recta.



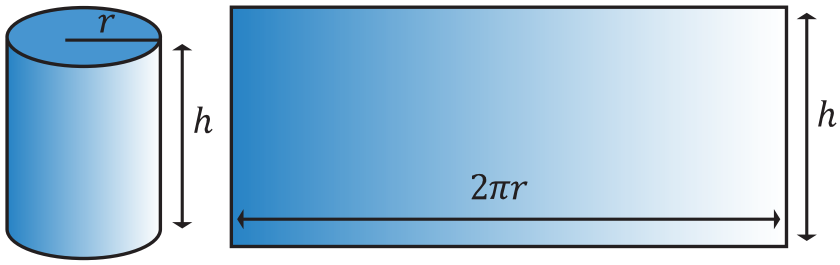


La recta que da origen al sólido recibe el nombre de generatriz. Los sólidos de revolución más conocidos son el **cilindro, el cono y la esfera.**
Las medidas que podemos encontrar en ellos son: Área lateral, área total y volumen.

Área lateral

Esta corresponde a la medida del área de las caras que no son bases. La estudiaremos en cada uno de los siguientes sólidos:

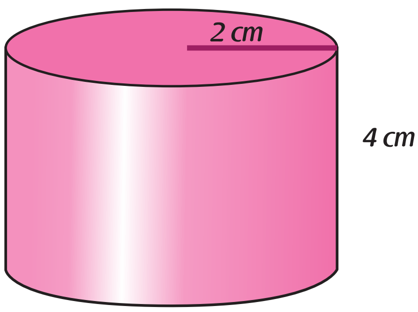
El área de la superficie lateral de un cilindro recto es igual a la de la superficie de un rectángulo, cuya base tiene por longitud el perímetro de la circunferencia de radio r de la base, es decir, $2\pi r$, y cuya altura tiene por longitud la de la generatriz g. Entonces, el área lateral es:



$$\text{Área lateral del cilindro} = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot g = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot h$$

Ejemplo 1:

Hallamos el área lateral:



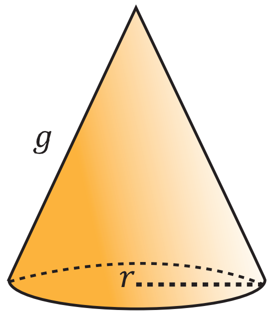
Datos:

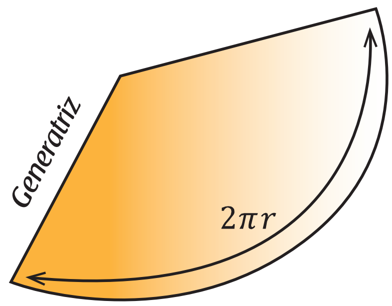
$$r = 2\ cm$$
$$g = 4\ cm$$

Luego, al aplicar la fórmula, tenemos:

$$Alc = (2 \cdot \pi \cdot 2\ cm) \cdot 4\ cm$$
$$Alc = 8 \cdot \pi \cdot cm^2$$
$$Alc \approx 25.133 cm^2$$

El área de la superficie lateral de un cono recto es igual a la de la superficie del triángulo, cuya base tiene por longitud el perímetro de la circunferencia de radio r de la base, es decir, $2\pi r$, y cuya altura tiene por longitud la de la generatriz g. Entonces, el área lateral es:





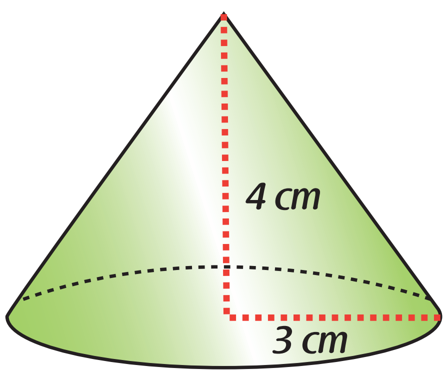
$$\text{Área lateral del cono} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot g}{2}$$

$$\text{Área lateral del cono} = \frac{(\cancel{2} \cdot \pi \cdot r) \cdot g}{\cancel{2}}$$

$$\text{Área lateral del cono} = (\pi \cdot r) \cdot g$$

Ejemplo 2:

Hallamos el área lateral:



Datos:

$$h = 4\ cm$$
$$r = 3\ cm$$

Primero, necesitamos encontrar la generatriz. Para ello, usamos el Teorema de Pitágoras:

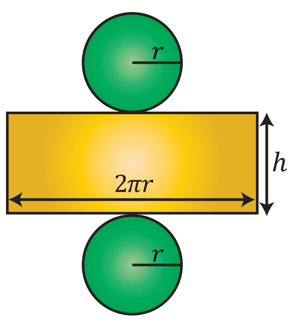
$$g = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Entonces, el área lateral es:

$$Alco = (\pi \cdot 3\ cm) \cdot 5\ cm$$
$$Alco = 15 \cdot \pi\ cm^2$$
$$Alco \approx 47.12\ cm^2$$

Área total de una superficie
Esta corresponde a la medida del área de todas las caras de las figuras, es decir, la medida de las áreas laterales más las áreas de las bases. A continuación, la estudiaremos en cada uno de los siguientes sólidos:

El área total de la superficie total del cilindro es la medida del área lateral más el área de las dos bases circulares. Entonces, la fórmula es:



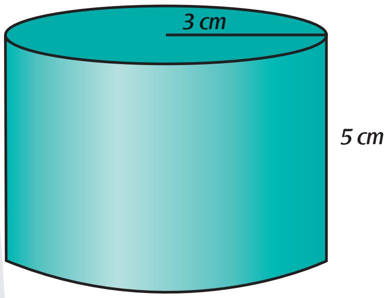
$$\text{Área total del cilindro} = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot g + (\pi \cdot r^2) + (\pi \cdot r^2)$$
$$= (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot h + (\pi \cdot r^2) + (\pi \cdot r^2)$$

$$\text{Área total del cilindro} = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot g + 2(\pi \cdot r^2) = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot h + 2(\pi \cdot r^2)$$

$$\text{Área total del cilindro} = (2 \cdot \pi \cdot r)[g + r] = (2 \cdot \pi \cdot r)[h + r]$$

Ejemplo 3:

Hallamos el área total:



Datos:

$$r = 3\ cm$$
$$g = 5\ cm$$

Luego, al aplicar la fórmula, tenemos:

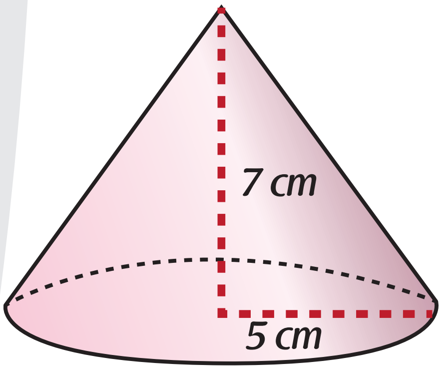
$$Atc = (2 \cdot \pi \cdot 3\ cm)[5\ cm + 3\ cm]$$
$$Atc = (6 \cdot \pi \cdot cm)[8cm]$$
$$Atc = (48 \cdot \pi \cdot cm^2)$$
$$Atc \approx 150.796\ cm^2$$

El área total de la superficie del cono es la medida del área lateral más el área de la base circular. Entonces, la fórmula es:

$$\acute{A}rea\ total\ del\ cono = (\pi \cdot r) \cdot g + \pi \cdot r^2$$
$$\acute{A}rea\ total\ del\ cono = (\pi \cdot r)[g + r]$$

Ejemplo 4:

Hallamos el área total:



Datos:

$$r = 5\ cm$$
$$h = 7\ cm$$

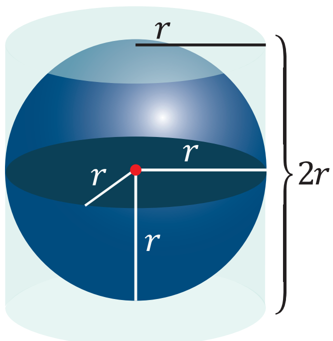
Primero, necesitamos encontrar la generatriz. Para ello, usamos el Teorema de Pitágoras:

$$g = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

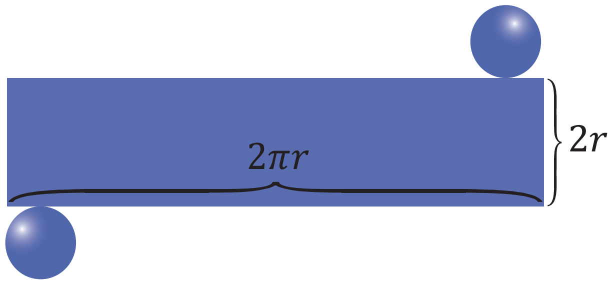
Entonces, el área total es:

$$Atco = (\pi \cdot 5\ cm)\left[\sqrt{74} + 5cm\right]$$
$$Atco \approx 213.665\ cm^2$$

El área total de una esfera, como lo demostró Arquímedes, es igual a la medida del área lateral de un cilindro inscrito que tenga el mismo radio y cuya altura sea el diámetro de la esfera.



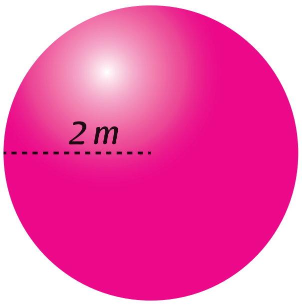
Entonces, la medida del área de la superficie de ese cilindro es equivalente al área de la superficie de la esfera, así:



$$\acute{A}rea\ de\ la\ esfera\ =\ \acute{A}rea\ lateral\ del\ cilindro\ =\ (2\cdot\pi\cdot r)\cdot 2r = 4\pi r^2$$

Ejemplo 5:

Hallamos el área de la esfera:



Datos:

$$r = 2\,m$$

Aplicamos la fórmula:

$$Ae = 4\pi(2\,m)^2 = 4\cdot\pi\cdot 4\,m^2\ = 16\pi\ m^2$$

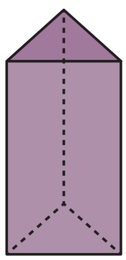
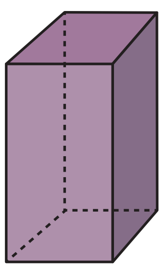
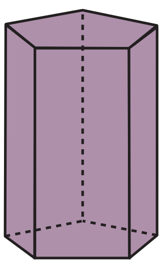
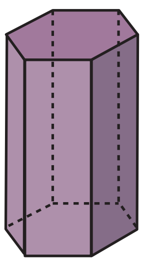
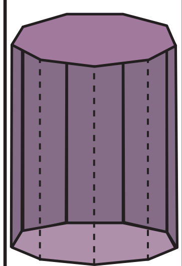
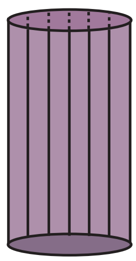
$$Ae \approx 50.26\ m^2$$

Volumen

Es la medida de la cantidad de cubos que pueden cubrir el espacio de un sólido.

El volumen de un cilindro

Se comprende el cilindro como un prisma cuyas bases son polígonos con un número infinito de lados:

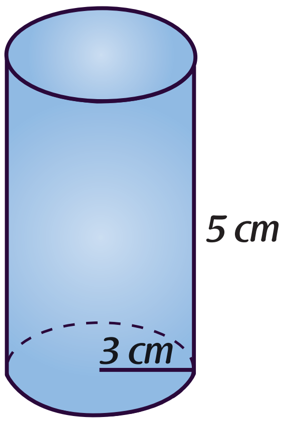
					
Prisma triangular	Prisma cuadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal	Prisma octagonal	Prisma de n lados

Como el volumen del prisma se obtiene multiplicando el área de la base por la altura, se tiene que: $V = Area_{base} \cdot h$,entonces para el cilindro es lo mismo: $V = Area_{base} \cdot h$

$$Volumen\ del\ cilindro = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo 6:

Hallamos el volumen del cilindro:



Datos:

$r = 3\ cm$

$h = 5\ cm$

Aplicamos la fórmula:

$$Vc = \pi \cdot (3\ cm)^2 \cdot 5\ cm$$

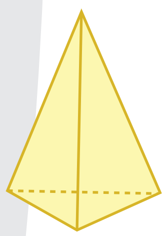
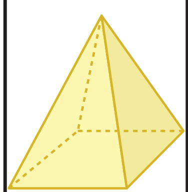
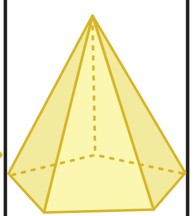
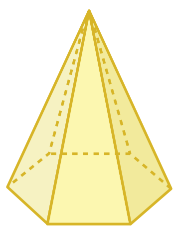
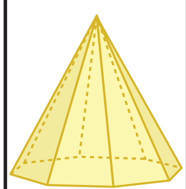
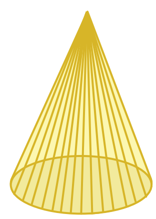
$$Vc = \pi \cdot 9\ cm^2 \cdot 5\ cm$$

$$Vc = 45 \cdot \pi \cdot cm^3$$

$$Vc \approx 141.37\ cm^3$$

El volumen de un cono

Se comprende el cono como una pirámide cuya base poligonal tiene un número infinito de lados:

					
Pirámide triangular	Pirámide cuadrangular	Pirámide pentagonal	Pirámide hexagonal	Pirámide octagonal	Prisma de n lados

Por esta razón, el volumen del cono y el del cilindro estarán en la misma relación que la razón entre los volúmenes de la pirámide y del prisma

$$\boxed{Volumen\ del\ cilindro = Volumen\ del\ prisma}$$

$$Volumen\ de\ la\ pirámide = \frac{1}{3}(volumen\ del\ prisma)$$

$$Volumen\ del\ cono = \frac{1}{3}(volumen\ del\ cilindro)$$

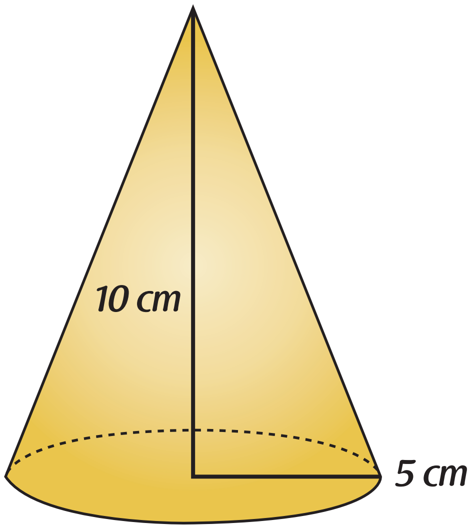
El volumen de la pirámide es igual a la tercera parte del área de la base por la altura: $V = \frac{1}{3} Area_{base} \cdot h$, entonces el volumen del cono es igual a la tercera parte del área de la base por la altura: $V = \frac{1}{3} Area_{base} \cdot h$

Como el volumen del prisma se obtiene multiplicando el área de la base por la altura, se tiene entonces que para el cilindro es lo mismo: $V = \frac{1}{3} Area_{base} \cdot h$

$$Volumen\ del\ cono = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo 7:

Hallamos el volumen del cono:



Datos:

$r = 5\ cm$

$h = 10\ cm$

Aplicamos la fórmula:

$$Vco = \frac{1}{3} \pi \cdot (5\ cm)^2 \cdot 10\ cm$$

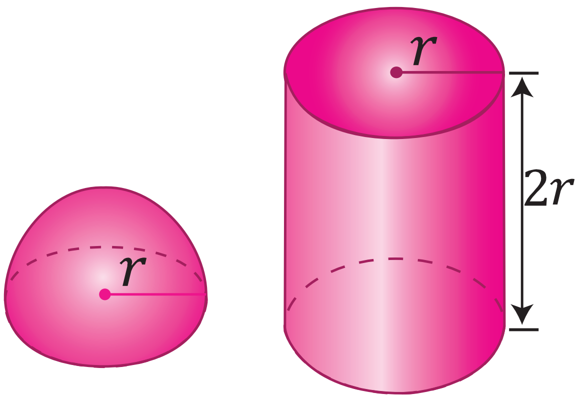
$$Vco = \frac{1}{3} \pi \cdot 25\ cm^2 \cdot 10\ cm$$

$$Vco = \frac{250}{3} \pi \cdot cm^3$$

$$Vco \approx 261.8\ cm^3$$

El volumen de la esfera

Si se tiene un casquete semiesférico con radio r y un cilindro que tiene el mismo radio del casquete y dos veces la altura de ese radio, la relación que se da es equivalente a la tercera parte del volumen del cilindro.



$$Volumen\ del\ casquete = \frac{1}{3}(volumen\ del\ cilindro)$$

Como el casquete es la mitad del volumen de la esfera, entonces el volumen de la esfera es:

$$Volumen\ de\ la\ esfera = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}\ volumen\ del\ cilindro\right]$$

$$Volumen\ de\ la\ esfera = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}\ (\pi \cdot r^2 \cdot 2r)\right]$$

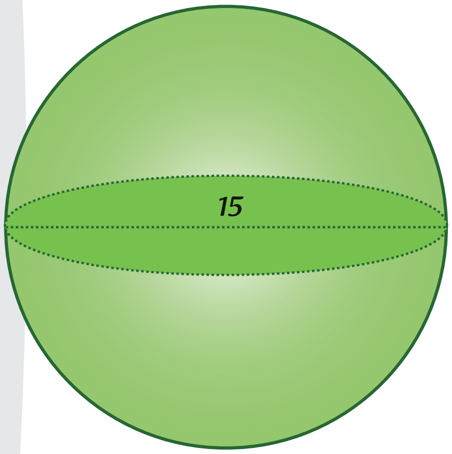
$$Volumen\ de\ la\ esfera = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}\ (\pi \cdot 2 \cdot r^3)\right]$$

$$Volumen\ de\ la\ esfera = 2 \cdot \left[\frac{2}{3}\ (\pi \cdot r^3)\right]$$

$$Volumen\ de\ la\ esfera = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ejemplo 8:

Hallamos el volumen de la esfera:



Datos:

$$r = 7.5\ cm$$

Aplicamos la fórmula:

$$Ve = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (7.5cm)^3$$

$$Ve = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 421.875\ cm^3$$

$$Ve \approx 1\,767.1459\ cm^3$$

PLENARIA

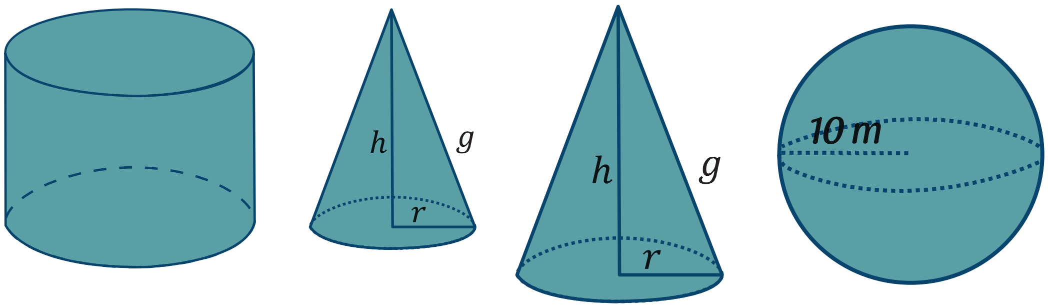
2. Exponemos el trabajo realizado ante el grupo de clase, resaltamos las ideas principales y respondemos a las inquietudes de nuestros compañeros y de nuestro profesor.

C Ejercitación

TRABAJO INDIVIDUAL

Las siguientes actividades me permiten recordar algunos conceptos importantes abordados en la lectura de la fundamentación científica:

1. Encuentro los valores del área lateral, área total y volumen de cada una de las siguientes figuras:



Altura: 15 cm
Radio de la base: 10 cm

Altura: 15 cm
Radio: 10 cm

Generatriz: 15 cm
Radio: 10 cm

2. Resuelvo los siguientes problemas. Busco en el CRA la calculadora para apoyarme en los cálculos que se tienen que realizar para que la aproximación sea a la cifra de las décimas, según sea el caso:

   a. El volumen de un cono es de $420\pi\ cm^3$ y su altura es de 5 cm. ¿Cuál es el valor del área lateral?

   b. El área lateral de un cilindro es el triple de la suma del área de las bases. ¿Cuál es la relación que existe entre la altura y su radio?

   c. Se quiere construir una lata cuya área de superficie lateral sea de 124π pulgadas cuadradas y la altura de 10 pulgadas. ¿Cuál es el valor del radio de la lata?

   d. Un cono se inscribe en una pirámide rectangular regular de tal forma que el vértice del cono y el ápice de la pirámide coinciden. Se sabe que la generatriz del cono mide 7 cm y el radio de la base mide 3 cm. ¿Cuáles son las medidas del largo y ancho de la base de la pirámide?

   e. Encuentro el área de una esfera que tiene un volumen de $288\ \pi\ cm^3$.

TRABAJO EN PAREJAS

3. Comparamos las respuestas y en caso de desacuerdo realizamos un consenso para decidir cuál es la correcta.

4. Solicitamos a nuestro profesor que valore nuestro desempeño durante la ejercitación y que nos aclare los conceptos en los que tenemos mayor dificultad.

D Aplicación

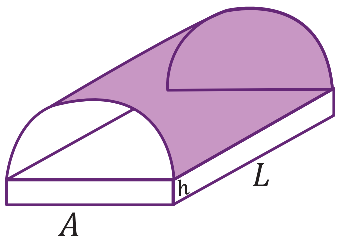
TRABAJO EN FAMILIA

1. Resolvemos los siguientes problemas:

   a. En una finca existe un depósito de agua que tiene la forma de un cono invertido de 3 metros de radio y 7 metros de altura.

   ✓ Calculamos la capacidad total del depósito.
   ✓ Calculamos el volumen del depósito que tiene agua hasta 4 metros de altura.

   b. Si se realiza una bodega con las medidas, A= 5 metros, L= 7 metros, ¿cuál es su volumen? Y si se requiere de lona para cubrirla, ¿cuánta se necesita?



2. Realizo las siguientes actividades y las comparo con los resultados que se encuentran en la guía:

   a. Buscamos un casquete esférico y construimos un cilindro que tenga el doble de su radio como altura y el mismo radio en la base. Luego, llenamos el casquete con semillas. ¿Cuántas veces tenemos que llenar el casquete esférico para que el cilindro esté completo?

   b. Buscamos un recipiente que tenga la forma de un cono y construimos un cilindro que tenga la misma base y altura del cono. Luego, llenamos el cono con semillas. ¿Cuántas veces tenemos que llenar el cono para que el cilindro esté completo?

3. Escribimos sobre la experiencia de la participación de otra persona en la solución de problemas.

TRABAJO EN EQUIPO

4. Comparamos nuestros resultados y solicitamos la ayuda de nuestro profesor en caso de que existan contradicciones.

5. Analizamos los elementos que requieren de la participación de otra persona cuando se resuelven situaciones problema.

6. Para el buen desarrollo de esta actividad, elaboramos carteles, afiches, o volantes, entre otros, para compartir nuestros resultados en la actividad de conjunto.

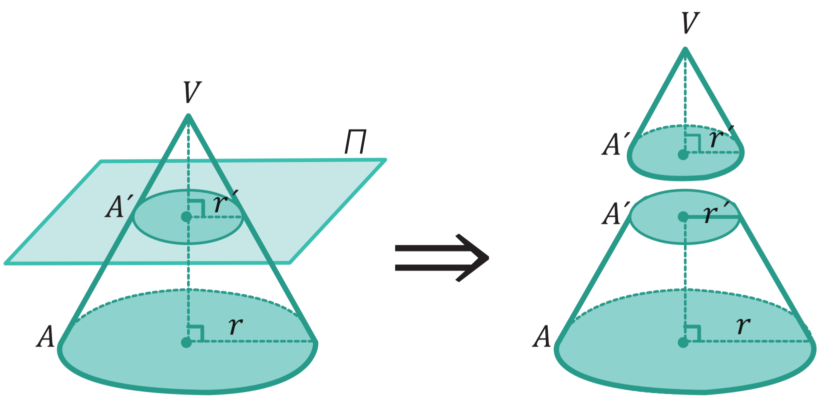
E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Realizamos la siguiente lectura donde compartimos los roles desempeñados en cada grupo bajo la orientación del líder y fomentamos la participación al escribir las ideas principales en el cuaderno:

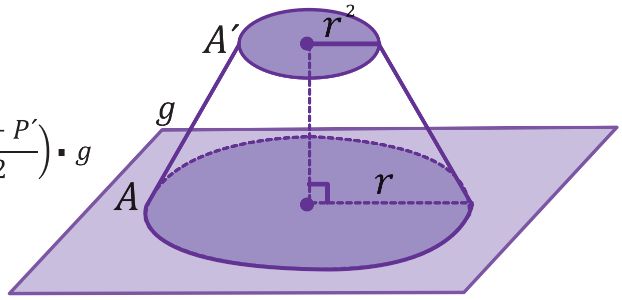
Otra de las figuras que se estudian es el cono truncado. Este se genera a partir de un cono que se interseca con un plano paralelo a la base del cono, dando como resultado dos cuerpos: Un cono y un cono truncado.

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2$$



Se puede considerar que el **cono truncado** de revolución de bases paralelas, es un sólido de revolución generado por la rotación de un trapecio rectángulo en torno de un eje que contiene el lado perpendicular a sus bases.

Área de la superficie lateral: $A_L = \left(\frac{P + P'}{2}\right) \cdot g$



Donde:
g es la generatriz.
P es el perímetro de la base mayor = $2\pi r$
P' es el perímetro de la base menor = $2\pi r'$

Entonces:

$$A_L = \frac{(2\pi r + 2\pi r')}{2} \cdot g = \pi(r + r') \cdot g$$

Área de la superficie total:

$$Área\ total = Área\ lateral + área\ de\ la\ base\ mayor + área\ de\ la\ base\ menor$$

Entonces:

$$Área\ total = \pi(r + r') \cdot g + \pi r^2 + \pi r'^2$$

$$Área\ total = \pi(r + r')[g + r^2 + r'^2]$$

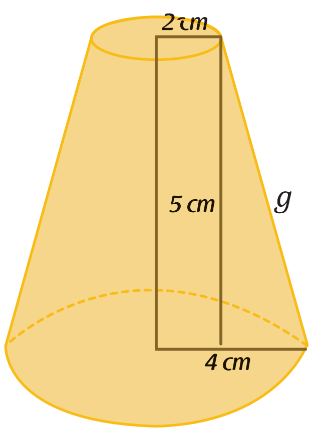
El volumen del cono truncado es:

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (r^2 + r'^2 + rr')$$

r y r':Longitudes de los radios de las bases.
h :Longitud de la altura.

Ejemplo 1:

Calculamos el área lateral, área total y volumen del cono truncado:



La generatriz es:

$$g = \sqrt{5^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{29} \approx 5.385$$

El área lateral es:

$$Área\ lateral = \pi \cdot (4 + 2) \cdot 5.385 \approx 101.51\ cm^2$$

El área total es:

$$Área\ total = \pi(4 + 2)[5.385 + 4^2 + 2^2]$$

$$Área\ total = \pi \cdot 6 \cdot [5.385 + 16 + 4] \approx 478.5\ cm^2$$

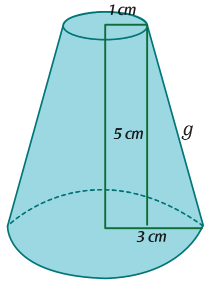
El volumen es:

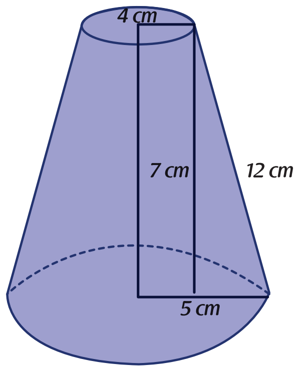
$$Volumen = \frac{1}{3}\pi \cdot 5\ cm$$

$$.((4\ cm)^2 + (2\ cm)^2 + (4\ cm)(2\ cm))$$

$$Volumen \approx 146{,}61\ cm^3$$

2. Buscamos el volumen y las áreas lateral y total de cada cono truncado:



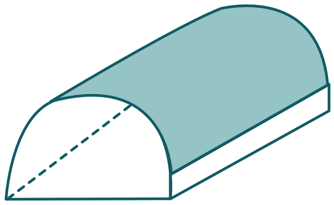


3. Invitamos a nuestro docente a que evalúe nuestras actividades.

Evaluación por competencias

INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 1, 2 Y 3

Se tiene un stand de una feria que requiere de $3\,000\ m^2$ de alfombra y se sabe que la medida del largo del stand es a la medida del largo del ancho en una razón 3 a 1.



1. La figura del toldo es:

A. Un cono truncado.
B. Un semicono.
C. Un cilindro.
D. Un semicilindro.

1

2. El valor de la generatriz es:

A. $\sqrt[2]{300}$
B. $1\,000$
C. $\sqrt[3]{500}$
D. $1\,500$

2

3. El volumen del toldo es:

A. $3\,500\pi\ cm^3$
B. $7\,000\pi\ cm^3$
C. $3\,000\pi\ cm^3$
D. $1\,500cm^3$

3

4. El volumen de una esfera es de $48\,m^3$, entonces su radio expresado en m es:

A. $\frac{3\sqrt[3]{3}}{\pi}$

B. $\frac{3}{\pi}$

C. $\sqrt[3]{\frac{36}{\pi}}$

D. $\frac{\sqrt[3]{36}}{\pi}$

4

5. Un cono de helado tiene 12½cm de profundidad y 5cm de diámetro superior. Se colocan en él dos cucharadas semiesféricas, las cuales tienen una longitud de diámetro de 5cm. Si el helado se derrite dentro del cono, ¿lo rebasará?:

A. SÍ
B. NO

Glosario

- **Casquete esférico:** Es cada una de las porciones de la superficie esférica que quedan delimitadas cuando un plano corta a la esfera. Por ejemplo, en la superficie terrestre se habla de los casquetes polares.
- **Cilindro:** Es un prisma recto de infinito número de caras laterales.
- **Cono:** Es aquel generado por la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
- **Esfera:** Es aquella generada por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro.
- **Generatriz:** Es el segmento que gira para formar el sólido de revolución.

Bibliografía

ANDONEGUI, M. (2007). Cuaderno N°16. Cuerpos Geométricos. Editorial: Federación Internacional Fé y Alegría. Recuperado de http://www.monografias.com/trabajos-pdf2/cuerpos-geometricos/cuerpos-geometricos.pdf

Ángel, A. (2008). Álgebra intermedia. Séptima edición. México: Pearson Educación.
Swokowski, E. y Cole, J (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Doceava edición. México: Pearson Educación.

Batanero, C. y Godino, J.D (2003). Estocástica y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-0-3 [75 páginas; 1,5 MB] Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino

BENITO, B. y SÁNCHEZ, J.C. (s. f.). Áreas y volúmenes de figuras geométricas.

BLANCO, G. (2005). Figuras geométricas. Recuperado de http://www.kokone.com.mx/tareas/figuras/home.html

Camargo, L. y otros. (1999). ALFA 9. Serie de matemáticas para educación básica secundaria y media. Editorial NORMA.

Triola M.F (2009) Estadística. Décima Edición. México: Pearson Educación.

Rico, L.; Segovia, I. y Gómez, P (2000). Introducción a la función cuadrática. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Campus de Cartuja. Granada.