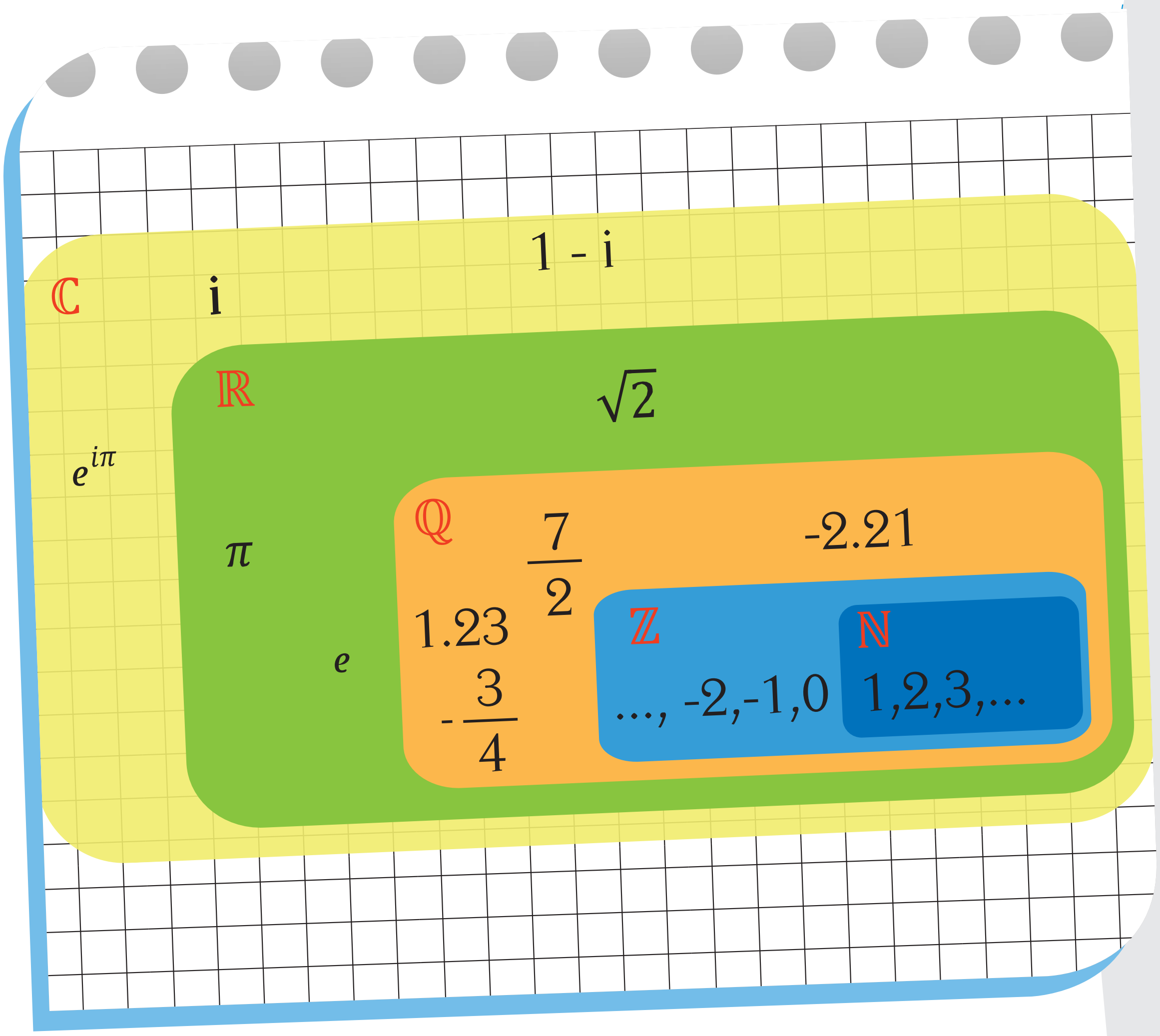
Guía 4



Conozcamos sobre los números imaginarios

Indicadores de desempeño

Conceptual:

- Identifica las características de los números imaginarios.

Procedimental:

- Realiza operaciones con los números imaginarios.

Actitudinal:

- Reconoce la importancia de seguir las reglas para transformar cantidades.

A Vivencia

TRABAJO EN EQUIPO

1. Cambiamos las siguientes expresiones a la forma radical:

   a. $11^{\frac{2}{3}}$ b. $(5m)^{\frac{1}{2}}$ c. $(a^2+b^2)^{\frac{2}{5}}$ d. $-3x^{\frac{-1}{2}}$

2. Expresamos en la forma radical más simple:

   a. $7\sqrt{3}-8\sqrt{3}$

   b. $2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[2]{y}+7\sqrt[2]{x}-11\sqrt[2]{x}$

   c. $\sqrt{24}-\sqrt{12}+3\sqrt{3}$

   d. $3\sqrt[3]{u}-2\sqrt[3]{u}$

   e. $\sqrt{7}(\sqrt{7}-8)$

   f. $\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})$

   g. $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$

   h. $(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})$

   i. $(\sqrt{c}+2)(\sqrt{c}-7)$

3. Resolvemos las siguientes ecuaciones:

   a. $x^2=2$ b. $x^2+4=0$ c. $m^2-9=0$

4. Invitamos a nuestro docente a revisar nuestro trabajo.

BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Realizamos la distribución de roles correspondiente al interior del equipo y le solicitamos respetuosamente al compañero indicado leer el siguiente texto y anotamos las características y forma de operar de los números imaginarios:

Números complejos o números imaginarios

Surgen como necesidad de resolver ecuaciones que involucran raíces de números negativos.

Por ejemplo, al resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ se tiene que:

$$x^2 = -1$$

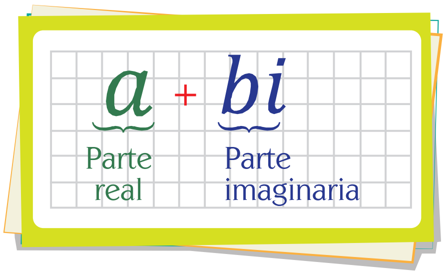
$$x = \sqrt{-1}$$

Esa respuesta no corresponde a los números reales y de ahí surge la necesidad de colocar el valor de esta raíz $i = \sqrt{-1}$, naciendo así los números complejos.

Formalmente, los números complejos son de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria que se define como $i = \sqrt{-1}$.

$$\mathbb{C} = \{a + bi, a, b, \in \mathbb{R}\}$$

Partes de los números imaginarios



Características especiales de los números imaginarios
Existen números complejos que tienen nombres especiales:

Forma	Nombre
$a + bi$ con $b \neq 0$	Número imaginario.
$0 + bi = bi$	Número imaginario puro.
$a + 0i = a$	Número real, de ahí se deduce que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
$1i = i$	Unidad imaginaria.
$a - bi$	Conjugada de $a + bi$.

Se dice que **dos números complejos son iguales** si lo son sus partes reales y sus partes imaginarias. Es decir, $a + bi = c + di$ si se verifica que $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo 1:

- $\sqrt[2]{5} - 2i$ es un número complejo con parte real $\sqrt[2]{5}$ y parte imaginaria $-2i$.
- El número real 8 se puede considerar como un número complejo con parte real 8 y parte imaginaria $0i$ porque se puede escribir $8 + 0i$.

- El número $\frac{3}{4}i$ es un número complejo con parte real 0 y parte imaginaria $\frac{3}{4}i$, por tanto es un número imaginario puro.

Ejemplo 2:

- La expresión $6 + 7i$ tiene como conjugado al complejo $6 - 7i$.
- La conjugada de $-4 - \frac{2}{5}i$ es el complejo de $-4 + \frac{2}{5}i$

Ejemplo 3:

Llevamos a la forma $a + bi$ el complejo $5 + \sqrt[2]{-36}$.
Transformamos la parte imaginaria del número imaginario:

$$\sqrt[2]{-36} = \sqrt{(-1)(36)} = \sqrt{-1}\sqrt{36} = \sqrt{36}\sqrt{-1} = 6i$$

Por lo tanto, el número es $5 + 6i$.

2. Escribimos los números complejos a la forma $a + bi$:

   a. $7 - \sqrt{-49}$

   b. $6 + \sqrt{-\frac{1}{9}}$

   c. $\sqrt{9} + \sqrt{-4}$

   d. $-20 - \sqrt{-16}$

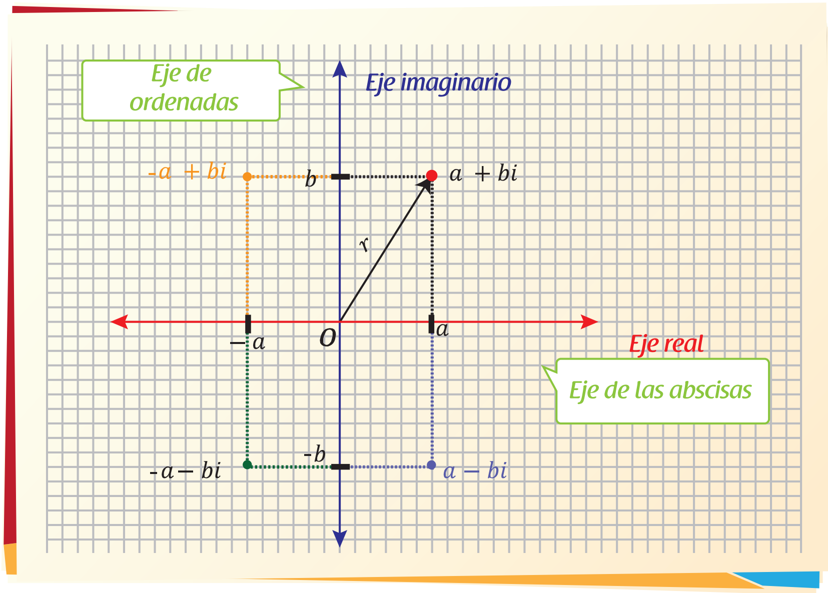
3. Escribimos las partes de los números complejos de los números del ejercicio anterior.

4. Continuamos con la lectura sobre la representación gráfica de los números complejos:

Representación gráfica de los números imaginarios

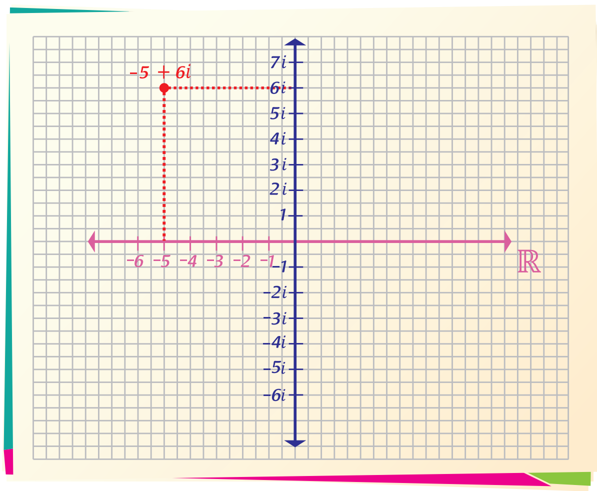
Los números complejos se representan en el plano. Para ello, se consideran los ejes coordenadas y se representa la parte real del número complejo en el eje de las abscisas y la parte imaginaria en el eje de ordenadas. Así, dado el número complejo $a + bi$, su representación en el plano corresponde con el punto dado por el par (a, b) y viceversa.

Debido a la correspondencia biunívoca que se establece entre los números complejos y los puntos del plano, este recibe el nombre de **plano complejo**, el eje de las abscisas se llama **eje real**, y el eje de ordenadas, **eje imaginario**:



Ejemplo 4:

Representamos en el plano complejo a -5 + 6i



5. Representamos los siguientes números complejos gráficamente:

   a. -4 + 5i

   b. 7 + i

   c. -3 − 2i

   d. 10 + 5i

   e. -1 − i

   f. 2 − 7i

6. Solicitamos a nuestro profesor aclarar las dudas que tenemos hasta el momento.

7. Continuamos con la lectura sobre las operaciones con los números complejos:

Operaciones con los números complejos o imaginarios

Las operaciones que abordaremos son la adición y la multiplicación.

Adición de números imaginarios

Dados dos números imaginarios, se define la suma como otro número imaginario cuya parte real es la suma de las partes reales y la imaginaria es la suma de las partes imaginarias de los sumandos.

Simbólicamente:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo 5:

Sumamos $(-3 + 4i)$ con $5 - 8i$

$$\begin{array}{c} -3 + 4i \\ 5 - 8i \\ \hline (-3+5) + (4i - 8i) \\ 2 - 4i \end{array}$$

Propiedades de la adición

Asociativa:
$[(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]$

Elemento neutro: Es el número $0 = 0 + 0i$ ya que cumple
$[(a + bi) + (0 + 0i)] = [(0 + 0i) + (a + bi)] = a + bi$

Elemento simétrico: Dado $a + bi$ su elemento simétrico, llamado **opuesto aditivo**, es $-(a + bi) = -a - bi$
ya que cumple $[(a + bi) + (-a - bi)] = [(-a - bi) + (a + bi)] = 0$

Conmutativa:
$[(a + bi) + (c + di)] = [(c + di) + (a + bi)]$.

El hecho de que dado cualquier número imaginario exista su elemento opuesto, permite que se defina **la sustracción o la resta en los complejos** de la forma:

$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + \big(-(c + di)\big) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (di - ci)$ $(a - c) + (d - c)i$

Producto de números imaginarios

Dados dos números imaginarios complejos $a + bi$ y $c + di$, su producto es otro número complejo de la forma:

$$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Se siguen estos pasos para realizarlo:

Paso 1: Se desarrollan las operaciones como si fuera la multiplicación de binomios.
Paso 2: Se reemplazan las potencias de i por sus valores respectivos.
Paso 3: Se reducen los términos semejantes.

Ejemplo 6:

Desarrollamos

$$(3+4i)\cdot(5-7i)$$

$$\left.\begin{array}{l} \quad 3+4i \\ \underline{\quad\ 5-7i} \\ 15+20i \\ \underline{\quad -21i-28i^2} \quad \boxed{\begin{array}{l} i=\sqrt{-1} \\ i^2=-1 \end{array}} \\ 15-i\ -28i^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Paso 1:} \\ \text{Como binomio.}\end{array}$$

Realizamos el reemplazo:

$15 - i - 28\,(-1) \longrightarrow$ Paso 2: Reemplazo.

$$\left.\begin{array}{l} 15 - i + 28 \\ 43 - i \end{array}\right\} \text{Paso 3: Reducción}$$

De la forma rápida, sería:

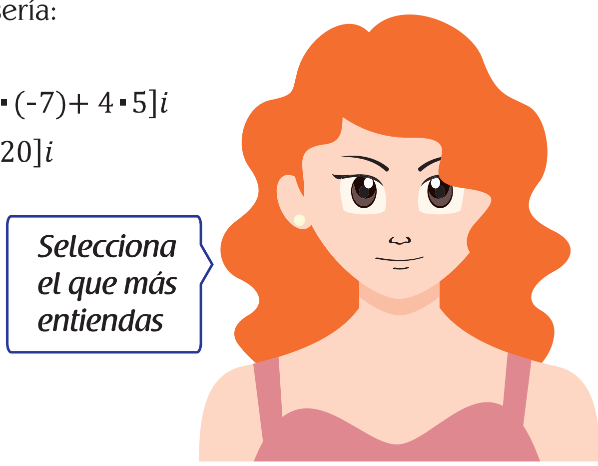
$(3+4i)\cdot(5-7i) =$

$[3\cdot 5 - 4\cdot(-7)] + [3\cdot(-7) + 4\cdot 5]i$

$[15 + 28] + [-21 + 20]i$

$43 + -1i$

$43 - i$



Propiedades del producto

Asociativa:
$[(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi) = (a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)]$

Elemento neutro: Es el número $1 = 1+0i$ ya que cumple $[(a+bi)+(1+0i)] = [(1+0i)+(a+bi)] = a+bi$

Elemento simétrico: Dado $a+bi \neq 0$, su elemento simétrico, llamado **inverso multiplicativo**, es $(a+bi)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$ ya que cumple

$$\left[(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)\right] = \left[\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)(a+bi)\right] = 1+0i.$$

Conmutativa:
$[(a+bi)\cdot(c+di)] = [(c+di)\cdot(a+bi)]$.

Distributiva respecto a la suma:
$(e+fi)[(a+bi)+(c+di)] = [(e+fi)\cdot(a+bi)]+[(e+fi)\cdot(c+di)]$

El hecho de que dado cualquier número imaginario no nulo exista su elemento inverso, permite que se defina **la división o el cociente en los complejos** de la siguiente manera:

$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)(c+di)^{-1} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ si

$c+di \neq 0$

También es posible resolver la división, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y realizar las operaciones:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{(c^2+d^2)+(-cd+dc)i} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo 7:

Hallamos el elemento inverso de

$4+5i$

Para hallar su inverso, hacemos:

$$\frac{4}{4^2+5^2} - \frac{5}{4^2+5^2}i = \frac{4}{16+25} - \frac{5}{16+25}i$$

$$= \frac{4}{41} - \frac{5}{41}i$$

Ejemplo 8:

Hallamos el cociente

$$\frac{5+3i}{1+4i} =$$

De la forma 1:

$$(5+3i)\left(\frac{1}{1^2+4^2} - \frac{4}{1^2+4^2}i\right) =$$

$$(5+3i)\left(\frac{1}{1+16} - \frac{4}{1+16}i\right) = (5+3i)\cdot\left(\frac{1}{17} - \frac{4}{17}i\right)$$

$$\frac{5}{17}-\frac{20}{17}i+\frac{3}{17}i-\frac{12}{17}i^2$$

$$\frac{5}{17}-\frac{20}{17}i+\frac{3}{17}i-\frac{12}{17}(-1)$$

$$\frac{5}{17}-\frac{20}{17}i+\frac{3}{17}i+\frac{12}{17}$$

$$\frac{17}{17}-\frac{17}{17}i$$

$$1-i$$

De la forma 2:

$$\frac{5+3i}{1+4i}=$$

$$\frac{5+3i}{1+4i}=\frac{(5+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{5-20i+3i-12i^2}{1-16i^2}$$

$$=\frac{5-20i+3i-12(-1)}{1-16(-1)}=\frac{5-20i+3i+12}{1+16}$$

$$=\frac{17-17i}{17}=\frac{17}{17}-\frac{17i}{17}$$

$$=1-i$$

8. Realizamos las siguientes operaciones:

a. La suma de $(-4+5i)$ con $(7-6i)$.

b. La suma de $(8i)$ con $(10+3i)$.

c. Resta $(2-7i)$ de $(5+i)$.

d. De $\left(\frac{-1}{5}+4i\right)$ resta $(5+3i)$

e. De $5i$ resta $(6-7i)$.

f. $(2-3i)\cdot(-4+5i)$.

g. $\left(\frac{2}{5}-9i\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$

h. $\dfrac{4-i}{5+3i}$

i. $\dfrac{5+7i}{6-i}$

j. $(2 + 3i)(4 - 7i)$.

k. $(9 - 5i)(9 + 5i)$

9. Invitamos a nuestro docente a que revise nuestro trabajo y le solicitamos amablemente aclaración de dudas.

D Aplicación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Representamos cada una de las siguientes operaciones en el plano complejo y elaboramos una explicación para realizarlas:

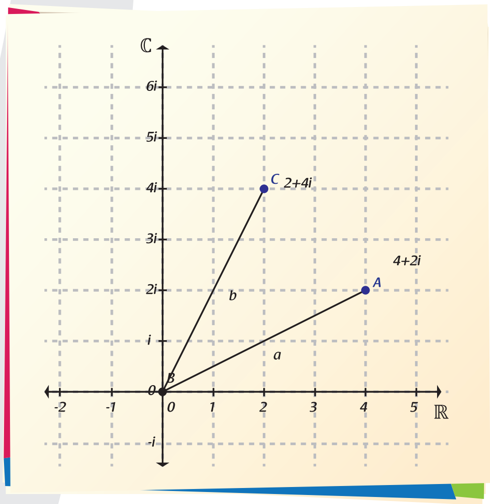
   a. $(3 - 4i) + (2 + 5i)$.

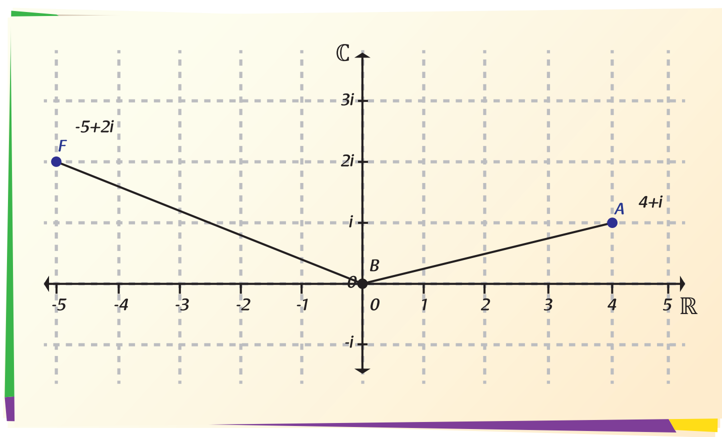
   b. $(7 - 11i) - (2 + 4i)$.

   c. $(5 + 6i) \cdot (2 - 3i)$.

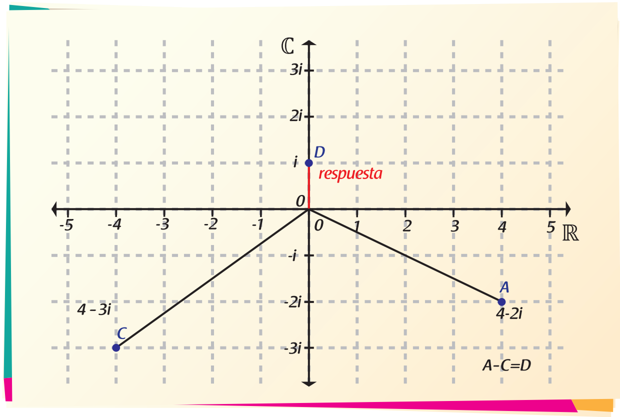
   d. $(1 + 8i) \div (7 + 11i)$.

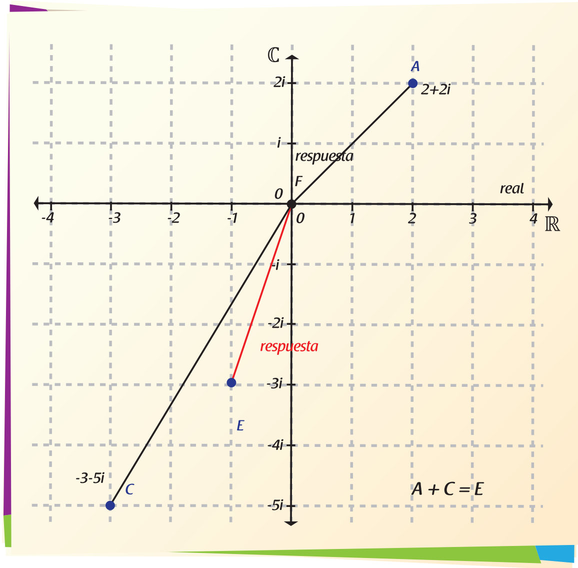
2. Representamos el resultado de la operación de la multiplicación de los números imaginarios en el plano complejo:





3. Indicamos qué operación está representada en cada uno de los planos:





4. Solicitamos a nuestro profesor que aclare todas nuestras inquietudes al respecto y revise el desarrollo de nuestro trabajo.

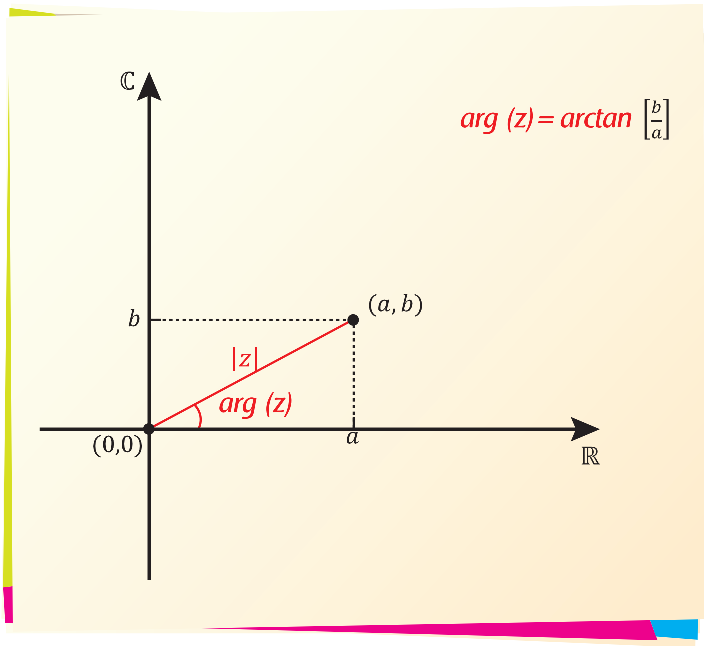
E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Realizamos la lectura sobre el módulo y argumento de los números imaginarios:

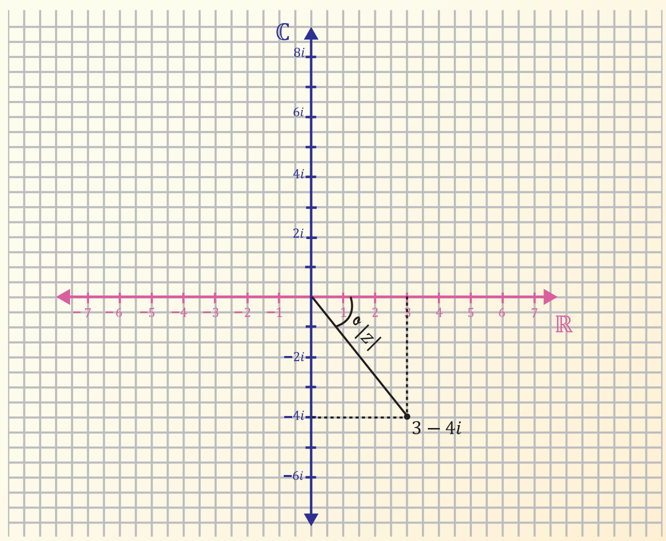
Módulo y argumento de un número complejo

Sea $z = (a, b) = a + bi$ un número complejo cualquiera. Llamaremos **módulo del número complejo z**, al número real dado por $\sqrt[2]{a^2 + b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El módulo se interpreta como la distancia al origen del número z. Por otra parte, llamaremos **argumento** del número complejo $z = a + bi$ a su ángulo comprendido entre el eje x y el radio vector que determina a $|z|$. Este ángulo se calcula de la siguiente manera:



Ejemplo 1:

Calculamos los valores del argumento y del ángulo del número $3 - 4i$



$|z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\arg(z) = arctang\left(\frac{-4}{3}\right)$

$\arg(z) = 306.86°$

Recordemos que para hallar el ángulo, debemos usar la calculadora... Shift + tant + (-4/3)

2. Encontramos el valor del argumento y el módulo de los siguientes números imaginarios. Utilizamos la calculadora del CRA:

   a. $2 + 3i$

   b. $6 + 7i$

c. $-1 - i$

d. $-5 + 2i$

e. $6 - 2i$

f. $5 - 3i$

3. Se sabe que $i^2 = (-1)$. Calculamos:

a. i^3

b. i^4

c. i^5

d. i^{20}

e. i^{23}

4. Invitamos a nuestro profesor a revisar nuestras respuestas.

Evaluación por competencias

1. Encuentro el conjugado, el opuesto y el valor del módulo de los siguientes números imaginarios:

Número imaginario	Conjugado	Opuesto	Módulo
$3 - i$			
$-2 - \sqrt{2}i$			
$-\sqrt{3i}$			

2. Determino el valor de verdad de cada enunciado:

$i^{23} = -i$	Verdadero	Falso
$(2 - i) - (1 - 3i) = 1 + 2i$	Verdadero	Falso
$(1 - i).(2 + 3i) = 5 + 3i$	Verdadero	Falso
$\frac{-10-4i}{-1+i} = 3+7i$	Verdadero	Falso
$(3+4i) . (5-7i) = 50-i^2$	Verdadero	Falso

3. Se tienen dos números complejos $(3s + 2i)$ y $(5 - 2ti)$ =, donde s y t son desconocidos y números reales. Estos cumplen la igualdad $(3s + 2i) - (5 - 2ti) = 2 - 6i$. Los valores de s y t requieren el sistema de ecuaciones:

A. $\begin{cases} 3s + 2 = 2 \\ 5 + 2t = -6 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3s + 2 = -6 \\ 2t - 5 = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2i - 2ti = -6i \\ 3s - 5 = 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 3s - 5 = 2 \\ 2 - 2t = -6 \end{cases}$

3

4. El resultado de la división $\dfrac{1+3i}{2+i}$ es:

A. $1 + i$

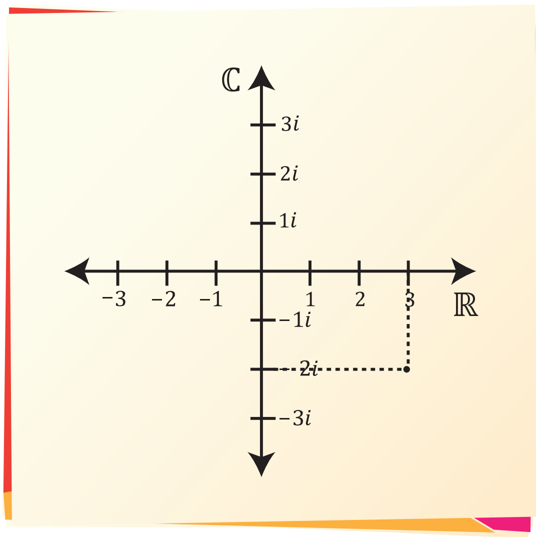
B. $4 - 7i$

C. $5 + 2i$

D. $9i$

4

5. El número representado en el plano complejo es:



A. $2i - 3$

B. $3 - 2i$

C. $3i - 2$

D. $-3 - 2i$

5

Glosario

- **Argumento z:** Es el valor del ángulo que se traza con el eje horizontal con el valor del radio vector del número imaginario.

- **Módulo del número z:** Es el valor de la longitud del radio que se traza con los valores del número imaginario.

- **Números complejos:** No existe un número real x que satisfaga la ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$. Para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario introducir los números complejos. Se define un número complejo, z, mediante la siguiente expresión: $z = x + yi$, donde x e y son una pareja cualquiera de números reales. Llamamos i a la unidad imaginaria compleja $yi = -1$.

- **Números enteros:** Los enteros negativos y el cero, después denotados por –1, -2, -3, y 0, respectivamente, permiten resolver ecuaciones como $x + b = a$, con a y b naturales, y llevan a la operación de resta, que se escribe $x = a - b$. El conjunto de enteros positivos y negativos con el cero se llama el conjunto de los enteros y es cerrado bajo las operaciones de suma, producto y resta.

- **Números naturales:** 1, 2, 3,..., o también llamados enteros positivos. Fueron usados primero para contar. El conjunto de los números naturales es cerrado respecto a las operaciones de suma y producto o cumple la propiedad de clausura con relación a estas operaciones.

- **Números racionales:** Permiten resolver ecuaciones de la forma $bx = a$ para enteros cualquiera a y b, con $b \neq 0$, los cuales conducen a la operación de división o inversa del producto, que se representa como $x = \frac{a}{b}$ (llamado cociente de a y b), donde a es el numerador y b el denominador. El conjunto de números racionales es cerrado bajo las operaciones de suma, sustracción, multiplicación y división, excluyendo la división por cero.