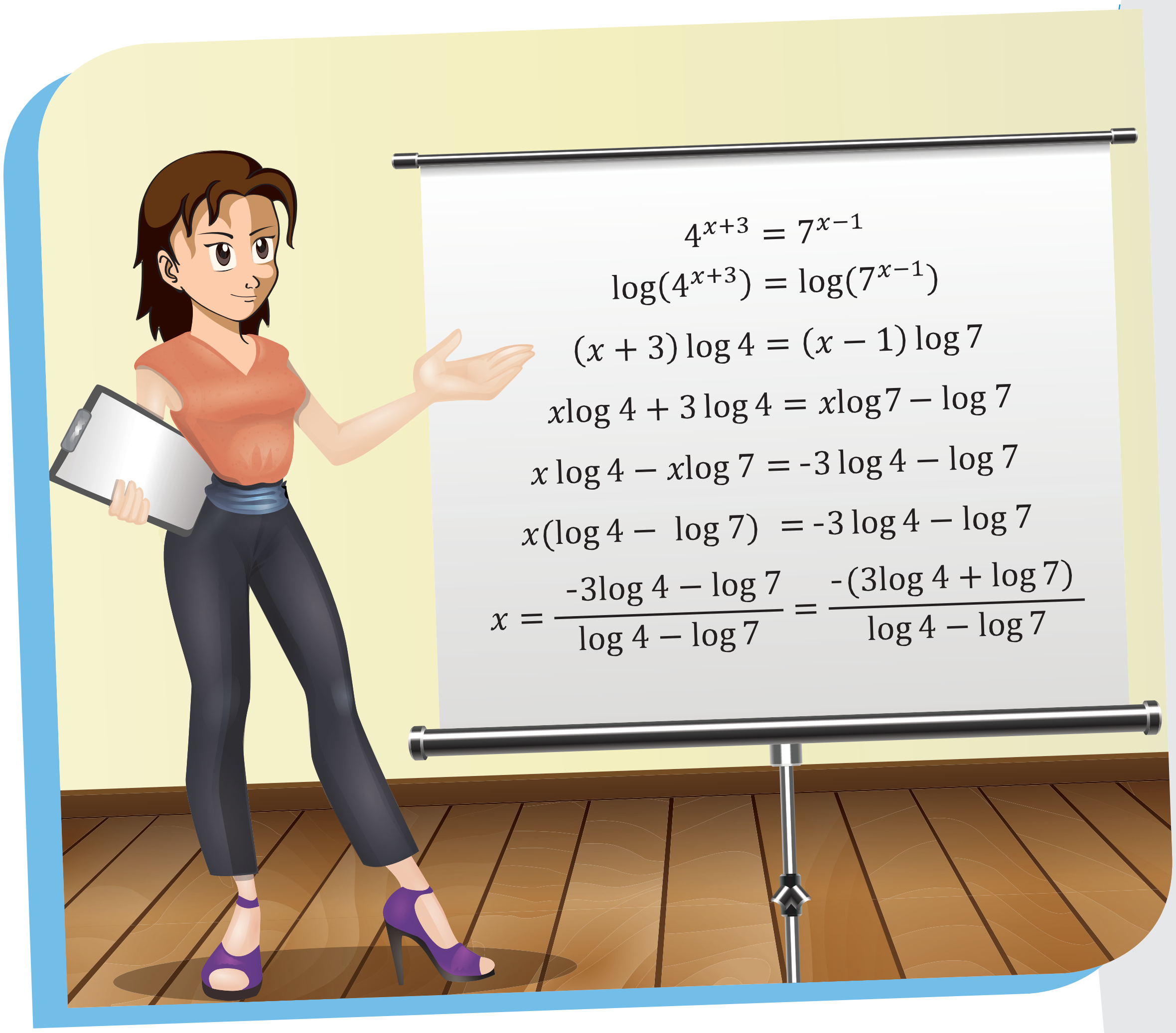
Guía 3

Conozcamos las ecuaciones exponenciales y logarítmicas



Indicadores de Desempeño:

Conceptual

- Reconoce las diferentes técnicas para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Procedimental

- Resuelve diferentes problemas que impliquen el uso de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Actitudinal

- Valora el uso de las diferentes técnicas empleadas por sus compañeros para resolver problemas.

A Vivencia

TRABAJO EN EQUIPO

1. Dibujamos las gráficas correspondientes e indicamos cuáles son reflexivas:

   a. $f(x) = 4^x$

   b. $f(x) = -4^x$

   c. $f(x) = 4^{-x}$

   d. $f(x) = -4^{-x}$

   e. $f(x) = \log_4 x$

   f. $f(x) = -\log_4 x$

   g. $f(x) = \log_4 -x$

   h. $f(x) = -\log_4 -x$

2. Escribimos las leyes de los exponentes y de los logaritmos e indicamos cómo se deducen.

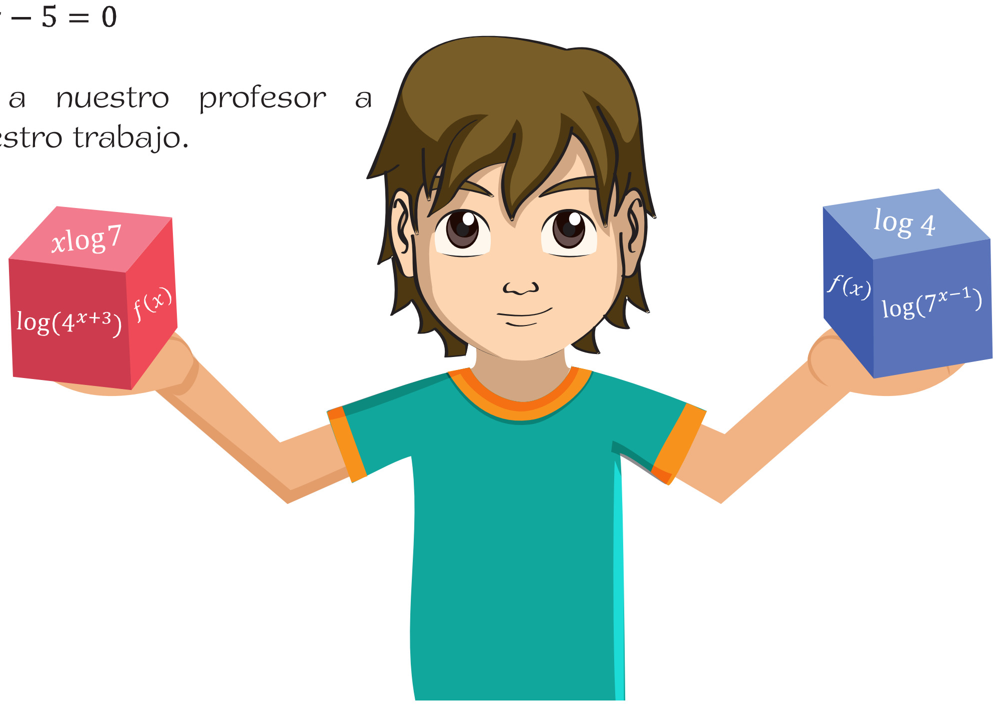
3. Resolvemos las siguientes ecuaciones:

   a. $x - 3 = -12$

   b. $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$

   c. $2x^2 - 3x - 5 = 0$

4. Invitamos a nuestro profesor a revisar nuestro trabajo.



BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Leemos e interpretamos las ecuaciones exponenciales y consignamos la definición en nuestros cuadernos. Asignamos roles al interior del equipo para una mayor comprensión y trabajo colaborativo del grupo:

Ecuaciones exponenciales

Son aquellas en las que la incógnita aparece en algún exponente. Entonces, para solucionarlas se debe encontrar el valor de ese exponente.

Ejemplo 1:

Estas son ecuaciones exponenciales:

$2^x = 64$	$2^{4x-3} = 4^x$	$2^{x+3} + 2^x = 72$

Existen tres casos para resolverlas:

Caso 1: Se escriben los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base y se igualan los exponentes para hallar el valor de la incógnita.

Ejemplo 2:

Resolvemos la ecuación $2^x = 128$.
Esta ecuación se resuelve de la siguiente manera: Expresamos como potencia de 2 al lado derecho de la ecuación, entonces:

$$2^x = 2^7$$

Como tenemos las mismas bases, tanto al lado izquierdo como derecho de la ecuación, entonces podemos igualar los exponentes:

$$x = 7$$

Ejemplo 3:

Resolvemos la ecuación $2^x + 5 = 69$.
Primero despejamos 2^x:

$$2^x + 5 - 5 = 69 - 5$$

Luego, realizamos las operaciones indicadas

$$2^x = 64$$

Expresamos como potencia de 2 al lado derecho de la ecuación:

$$2^x = 2^6$$

Como tenemos las mismas bases, tanto al lado izquierdo como derecho de la ecuación, entonces podemos igualar los exponentes:

$$x = 6$$

Ejemplo 4:

Resolvemos la ecuación $3^{x+2} = 81$.
Expresamos como potencia de 3 al lado derecho de la ecuación, así:

$$3^{x+5} = 3^4$$

Como tenemos la misma base, podemos igualar los exponentes:

$$x + 5 = 4$$

Despejamos x, y tenemos:

$$x + 5 - 5 = 4 - 5$$

$$x = -1$$

2. Resolvemos las siguientes ecuaciones en el cuaderno y si tenemos alguna duda pedimos ayuda a nuestro profesor:

a. $3^x = 27$

b. $4^x = 256$

c. $3^x = 2187$

d. $7^{2x-3} = 7$

e. $5^{x+2} = 125$

f. $3^x \cdot 81^x = 3^7$

g. $5^{3x-2} = \sqrt[2]{125}$

h. $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 729$

3. Continuamos con la lectura del caso 2:

Caso 2: Existen algunas ecuaciones que requieren de cambio de variable para poder resolverlas. En ese caso, reducimos la ecuación a otra de segundo grado. Hallamos la solución para esta nueva variable y, finalmente, encontramos el valor de la variable realizando la sustitución.

Ejemplo 5:

Resolvemos la ecuación $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.
Realizamos el cambio $2^{2x} = (2^x)^2$ en la ecuación:

$$(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$$

Sustituimos 2^x por w en la ecuación, así:

$$w^2 - 12 \cdot w + 32 = 0$$

Resolvemos como una ecuación cuadrática a través del método factorización:

$$(w-4)(w-8) = 0$$

Igualamos cada uno de los factores a cero y despejamos la w:

$(w-4) = 0$	ó	$(w-8) = 0$
$w = 4$		$w = 8$

Ahora, reemplazamos la w por 2^x en cada uno de los factores:

$2^x = 4$	$2^x = 8$
$2^x = 2^2$	$2^x = 2^3$
Como tienen la misma base, se tiene que:	Como tienen la misma base, se tiene que
$x = 2$	$x = 3$

4. Resolvemos las siguientes ecuaciones:

   a. $3^{2x} - 36 \cdot 3^x - 243 = 0$

   b. $2^{2x} + 4^x = 80$

   c. $2^x + 2^{1-x} = 3$

   d. $4^x + 2^6 = 5 \cdot 2^{x+3}$

5. Invitamos a nuestro profesor para que revise nuestro trabajo y nos aclare las dudas.

6. Continuamos aprendiendo con la lectura del caso 3:

Caso 3. Este es el caso general en el cual se aplican los logaritmos en cada uno de los lados de la ecuación y se despeja la incógnita. Siempre necesitamos la calculadora para hallar el valor de la incógnita.

Ejemplo 6:

Resolvemos la ecuación $3^x - 2^x = 0$
Ubicamos cada potencia a cada lado de la ecuación:

$$3^x = 2^x$$

Aplicamos logaritmos a ambos lados de la ecuación:

$$\log 3^x = \log 2^x$$

Por la propiedad de los logaritmos $\log_a L^t = t \cdot \log_a L$ se tiene que:

$$x \log 3 = x \log 2$$

Igualamos a cero:

$$x \log 3 - x \log 2 = 0$$

Factorizamos:

$$x(\log 3 - \log 2) = 0$$

Entonces $x = 0$.

Ejemplo 7:

Resolvemos la ecuación $3^{x+2} = 5^x$
Aplicamos logaritmos a ambos lados de la ecuación:

$$\log 3^{x+2} = \log 5^x$$

Por la propiedad de los logaritmos $\log_a L^t = t \cdot \log_a L$ se tiene que:

$$(x+2)\log 3 = x \log 5$$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$x \cdot \log 3 + 2 \log 3 = x \log 5$$

Igualamos a cero:

$$x \cdot \log 3 + 2 \log 3 - x \log 5 = 0$$

Agrupamos los sumandos que contienen x

$$(x \cdot \log 3 - x \log 5) + 2 \log 3 = 0$$

Factorizamos:

$$x \cdot (\log 3 - \log 5) + 2 \log 3 = 0$$

Despejamos x:

$$x = \frac{-2 \log 3}{\log 3 - \log 5}$$

Empleamos la calculadora y encontramos que x= 4.30132020…

7. Resolvamos las siguientes ecuaciones utilizando la calculadora:

a. $4^x = 6^{x+7}$

b. $5^{3x-1} = 6^{2x-1}$

c. $e^{2x} = 3^x - 3$

d. $4^x \cdot 9^x = 21$

e. $\frac{2^x}{6^x} = 11$

f. $3^{1-x} = 2^{3-5x} - 7$

8. Continuamos con la lectura sobre ecuaciones logarítmicas:

Ecuaciones logarítmicas

Son aquellas en las que la incógnita es la respuesta de la potencia. Para resolverlas se requiere de las propiedades de los logaritmos hasta conseguir que en ambos lados de la igualdad aparezca un único logaritmo con la misma base o transformarla en una expresión exponencial.

Ejemplo 8:

Resolvemos la ecuación $\log_2 x = 7$
Reescribimos la ecuación como potencia y tenemos que:

$$2^7 = x$$

Realizamos los cálculos y obtenemos que x es igual a:

$$x = 128$$

Ejemplo 9:

Resolvemos la ecuación $\log_2 x - 3 = 0$
Despejamos $\log_2 x$:

$$\log_2 x = 3$$

Al reescribirla como potencia, se tiene que:

$$2^3 = x$$

Entonces $x = 8$.

Ejemplo 10:

Resolvemos la ecuación $\ln 7 - \ln(2x + 6) = \ln(3x - 5)$
Por la propiedad de logaritmos $\log_a \left(\frac{L}{M}\right) = \log_a L - \log_a M$ se reescribe el lado izquierdo de la ecuación, así:

$$\ln\left(\frac{7}{2x + 6}\right) = \ln(3x - 5)$$

Como los dos logaritmos tienen la misma base, se pueden igualar las respuestas de las potencias:

$$\frac{7}{2x + 6} = 3x - 5$$

Despejamos x:

$$7 = (3x - 5)(2x + 6)$$

$$7 = 6x^2 + 8x - 30$$

$$0 = 6x^2 + 8x - 37$$

Por la fórmula cuadrática tenemos que:

$$\frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 6 \quad (-23)}}{2 \cdot 6}$$

Entonces x= 0.116810… o x= 1.378852…

Solución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1) Reescribir una expresión exponencial como expresión logarítmica.
2) Reescribir una expresión logarítmica como expresión exponencial.
3) Usar las propiedades de los exponentes o las de los logaritmos.
4) Para ecuaciones de la forma $a^x = b^x$, donde $a \neq b$, aplicamos el logaritmo natural a ambos lados de la igualdad y simplificamos usando las propiedades de los logaritmos.
5) En algunos casos, no se coloca la base de los logaritmos para indicar que es en base 10 y se escribe $\log x = \log_{10} x$

9. Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a. $\log_3 6x = \log_3 170$

b. $\ln(10 + x) = \ln(3 - 4x)$

c. $3 \log_5 x = \log_5 34 + 2\log_5 x$

d. $\log 2x + \log 7^x = 2$

e. $\log_2(3 - x) - \log_2(1 + 2x) = -\log_2 32$

f. $\ln(4 - x^2) = 7$

g. $\log x^4 + \log x^3 = \log 16$

h. $\log_6(3x - 7) = \log_6(x^2)$

i. $\log_9 \sqrt[2]{10x - 5} = \log_9 \sqrt[2]{1 - x}$

j. $\ln(x + 3) + \ln(x - 5) = \ln 3$

10. Socializamos las respuestas del punto anterior y solicitamos la presencia de nuestro profesor para que nos aclare las inquietudes presentadas.

D Aplicación

TRABAJO EN FAMILIA

1. Resuelvo las siguientes preguntas con la ayuda de algún miembro de mi familia:

   1. Un modelo exponencial no puede regular las infecciones que puede poseer una persona si no tiene los cuidados necesarios.

      a. Anoto información que encuentro en las noticias o en el periódico sobre las enfermedades que se han proliferado en la última década.

      b. Escribo los cuidados que debemos tener para no ser infectados.

      c. Escribo los síntomas de la enfermedad.

      d. Trato de redactar un modelo exponencial con los datos que encontramos.

   2. La mayoría de los jóvenes inician su vida sexual a temprana edad, convirtiéndose en padres de familia. En un estudio sobre la región latinoamericana se encontraron los siguientes datos:

Tiempo en segundos	Número de embarazadas
1	4
2	32
3	256
4	2 048
5	16 384
6	13 107

      a. Escribimos la ecuación que modela la situación del número de jóvenes embarazadas según el tiempo.

      b. Calculamos el número de embarazadas que se tendrían en 15 minutos.

      c. Calculamos el tiempo que se requiere para tener aproximadamente un billón de mujeres embarazadas.

TRABAJO EN EQUIPO

3. Comparamos con nuestros compañeros los resultados de los problemas anteriores.

4. Buscamos situaciones que se puedan modelar con ecuaciones exponenciales o logarítmicas, las escribimos en el cuaderno y justificamos su relación.

5. Analizamos las situaciones que se relacionan con el crecimiento poblacional. ¿Es posible modelarlas con ecuaciones exponenciales y logarítmicas? Justificamos la respuesta.

6. Organizamos una plenaria sobre los problemas del crecimiento poblacional, realizamos una campaña o carteles con el gobierno estudiantil donde demos a conocer a los estudiantes los problemas del crecimiento poblacional y qué actitudes asumir frente a esta situación problemática.

E Complementación

1. Realizamos la siguiente lectura y escribimos las ideas principales en el cuaderno:

En algunos casos y para poder hacer los cálculos, es necesario realizar cambios de base de un logaritmo a partir de la **fórmula para cambiar la base de un logaritmo. Esta consiste en:**

Si se tiene que $a \neq 1$ y $b \neq 1$, y R son números positivos, entonces:

$$\log_a R = \frac{\log_b R}{\log_b a}$$

Realizamos la demostración:

Si $y = \log_a R$, entonces se escribe como potencia $a^y = R$. Por lo que se tiene:

$$\log_b a^y = \log_b R$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene que:

$$y \cdot \log_b a = \log_b R$$

Despejamos y:

$$y = \frac{\log_b R}{\log_b a}$$

Reemplazamos $y = \log_a R$ en la ecuación anterior:

$$\log_a R = \frac{\log_b R}{\log_b a}$$

Para obtener el valor numérico en una calculadora, se utiliza $b = 10$ o $b = e$. Por lo tanto, se tienen dos formas de cambiar de base:

$$\log_a R = \frac{\log_b R}{\log_b a} \quad \text{o} \quad \log_a R = \frac{\ln R}{ln\, a}$$

Ejemplo 1:

Calculamos el valor numérico de $\log_3 75$.
Si hacemos $R = 50$, $b = 10$, y $a = 3$, tenemos:

$$\log_3 75 = \frac{\log_{10} 75}{\log_{10} 3}$$

Empleamos la tecla log de la calculadora para los dos logaritmos comunes y realizando la división obtenemos aproximadamente:

$$\frac{\log_{10} 75}{\log_{10} 3} \approx \frac{1.87506}{0.477121} \approx 3.929947$$

Igualmente, si utilizamos la otra fórmula, tenemos que:

$$\log_3 75 = \frac{\ln 75}{ln\, 3} \approx \frac{4.317488}{1.098612} \approx 3.929947$$

2. Calculamos el valor numérico de cada logaritmo con las dos fórmulas, haciendo uso de la calculadora del CRA:

a. $\log_{21} 75$

b. $\log_2 120$

c. $\log_5 300$

d. $\log_7 789$

e. $\log_{11} 50$

f. $\log_3 12$

3. Realizamos la lectura y tomamos nota en nuestros cuadernos sobre algunos modelos que utilizan las funciones exponenciales y logarítmicas y, a la vez, emplean sus correspondientes ecuaciones:

Modelos exponenciales

En ciencias y tecnología se utilizan modelos exponenciales que generan sistemas que cambian en el tiempo, así es posible predecir el estado del sistema en algún futuro y realizar las pautas de control o no control según sea el caso. A continuación estudiaremos algunos modelos:

Crecimiento demográfico

Es una función exponencial que permite calcular el crecimiento poblacional de bacterias, animales pequeños y en algunos casos de los humanos. Esta función es:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}, \text{ donde } k > 0$$

Donde $P(t)$ representa la población presente en el tiempo t ; P_0 representa la población inicial y k representa la constante de crecimiento. Esta función es creciente.

Decaimiento radiactivo

Es una función exponencial que permite calcular el decaimiento de una sustancia radiactiva, como es el caso del radio, cuyo decaimiento emite radiación en forma de partículas alfa, beta o gamma. Esta función es:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{kt}$$

En donde A_0 es la cantidad inicial de la sustancia inicial, $A(t)$ representa la sustancia que queda cuando el tiempo es t, y k representa la constante de decaimiento. Esta función es decreciente.

Vida media

La formula que calcula la vida media es: $N(t) = N_0 e^{-t \ln(2)/t_{1/2}} . N_0$

Representa la cantidad inicial de la sustancia (antes de que transcurra el tiempo). t significa el tiempo transcurrido, $t_{1/2}$ representa la vida media de la sustancia. La fórmula calcula la cantidad restante basada en la función (e). La función (e) se eleva a un valor negativo, lo que significa que es exponencial disminución de valor. Esta es la razón por la cual la curva de vida media desciende en valor exponencialmente a medida que pasa el tiempo.

Interés compuesto

Es una función exponencial que calcula el valor futuro según determinado tiempo e interés. Su fórmula es:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

En donde S es el valor futuro del capital P, si aumenta la cantidad n en el tiempo, sea P el capital inicial, y r la tasa de interés anual. Esta función es creciente.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de los modelos anteriores:

Ejemplo 1:

Se sabe que la vida promedio del carbono 14 es de 5 730 años; se tiene un hueso fósil y se determina que posee 0.01 de carbono 14 de la cantidad que tenía el organismo vivo. De acuerdo a esto, determinamos la edad aproximada del fósil.

Para solucionarlo, tenemos que la cantidad inicial era de A_0 gramos de carbono 14 en el organismo, entonces, t años después de su muerte hay $A(t) = A_0 \cdot e^{kt}$ gramos residuales. Cuando $t = 5730$ años, se tiene que $A_{(5\,730)} = \frac{1}{2} A_0$, entonces:

$$\frac{1}{2} A_0 = A_0 \cdot e^{5\,730k}$$

Despejamos k, y se tiene que:

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5\,730} \approx -0.00012097$$

Luego, el modelo que queda es:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-0.00012097t} \text{ y } A(t) = 0.01A_0$$

Despejamos t:

$$A_0 \cdot e^{-0.00012097t} = 0.01A_0$$

$$t = \frac{\ln 0.01}{-0.00012097} \approx 38\,068.69 \approx 38\,069 \text{ años}$$

La edad determinada del fósil es de 38 069 años aproximadamente.

Ejemplo 2:

Se deposita \$1 000 en una cuenta de ahorros, cuya tasa de interés anual es 2%. Hallamos el valor futuro de este capital dentro de 10 años:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Para establecer el modelo, se tiene que n= 12 meses, r= 0.02, t= 10 años, y P= 1 000. La ecuación que se establece con los datos anteriores es:

$$S = 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{0.02}{12}\right)^{12 \cdot 10} = 1\,000\,(1.001666)^{120} \approx 1221.19 \ldots \approx 1221$$

Entonces, a los 10 años se ha ganado \$221 pesos sobre el capital.

4. Resolvemos las siguientes situaciones problema:

a. Después de 2 horas, se observa que la cantidad de bacterias de un cultivo se ha duplicado. Deducimos un modelo exponencial para determinar la cantidad de bacterias en el cultivo en un tiempo t.

b. Un modelo de la población de una comunidad es $P(t) = 1\,200\, e^{kt}$. Si la población aumenta el 20% en 5 años, ¿cuál será la población en 10 años?

c. Un estudiante enfermo de gripe regresa al colegio. La cantidad de enfermos por gripe en t días después del regreso del estudiante enfermo, se calcula por la función: $P(t) = \frac{3000}{1+2000\,e^{-0.89t}}$. De acuerdo a este modelo, ¿cuántos estudiantes estarán infectados por gripe después de dos días?

5. Invitamos a nuestro docente a que evalúe nuestras actividades.

Evaluación por competencias

1. El siguiente modelo $2^a + 10 = 18$ representa la forma como se incrementa el área de un terreno. ¿Cuál es el valor de a?:

A. 3
B. 4
C. 8
D. 24

1

2. La cantidad de desperdicios que se reciclan están dados por la función $f(x) = \log_2 x$, donde x representa la cantidad de elementos que se emplean para el reciclaje y $f(x)$ la cantidad de elementos que se elaboran. Entonces $f(8)$ es:

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

2

3. Existen condiciones para resolver una expresión con algoritmo. El valor de este logaritmo $\log_{a-b}(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ es:

A. $a - b$
B. $a + b$
C. 3
D. 2

3

4. La cantidad de energía liberada por un movimiento sísmico está dada por la fórmula $m = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, donde m es la magnitud, A es la amplitud de onda y A_0 es una amplitud de referencia. ¿Cuál es la amplitud de onda si $A_0 = 3.2$ y la magnitud del sismo es de 9.7?:

A. 11.37807

B. $160.379914761 \text{ x } 10^8$

C. 10.20514

D. $10^{9.7}$

4

5. Los decibeles se calculan con $D = 10 \cdot \log(I \cdot 10^6)$, siendo I la intensidad. Si se tienen 80 decibeles, la intensidad será:

A. 0.01

B. 0.001

C. 1000

D. 100

5

Glosario

- **Decaimiento radiactivo:** Es cuando el átomo de radio se desintegra espontáneamente emitiendo radiación en forma de partículas alfa, gamma o beta. Su desintegración hace que el núcleo del átomo se transforme en un núcleo de otro átomo.

- **Ecuaciones exponenciales:** Son ecuaciones cuyo valor desconocido es el exponente.

- **Ecuaciones logarítmicas:** Son ecuaciones cuyo valor desconocido es el de la potencia.

- **Funciones crecientes:** Son funciones cuyos valores de las imágenes van de menor a mayor valor cuando va aumentando el valor del dominio.

- **Funciones decrecientes:** Son funciones cuyos valores de las imágenes van de mayor a menor valor cuando va aumentando el valor del dominio.

- **Modelos exponenciales:** Son aquellos que utilizan expresiones exponenciales relacionadas con el tiempo.

- **Modelo matemático:** Es una descripción matemática de algún sistema.