Matemáticas

9°
Noveno

Escuela Nueva - Escuela Activa

Módulo de

Matemáticas

UNIDADES
3 - 4

Presentación

La alianza por la Educación Rural de Antioquia ERA tiene el propósito de fortalecer la educación rural en todos los niveles, aportando en términos de cobertura, calidad y pertinencia, con el fin de contribuir significativamente al desarrollo social y económico de las comunidades en sus territorios. Para lograrlo, está implementando un programa de acompañamiento a las instituciones y sus sedes educativas, basado en los principios de las pedagogías activas, que articula todos los niveles educativos hasta llegar a la Universidad en el Campo.

Los principios de las pedagogías activas parten del ser: la persona como centro de un aprendizaje activo y significativo. Pretenden brindar una educación que facilite al individuo desempeñarse en los diferentes aspectos de la vida, ser feliz, proyectarse y ser útil a su comunidad.

El material de interaprendizaje es fundamental para el desarrollo de las pedagogías activas. Este centra el aprendizaje en el estudiante, responde de manera significativa a cada uno de los principios y favorece sustancialmente el desarrollo de competencias. Está compuesto por módulos que contienen guías con las que los estudiantes interactúan, dialogan, y en las que se promueven diferentes formas de trabajo como: trabajo individual, en equipo o en grupo. El trabajo con guías de interaprendizaje propicia la reflexión, el trabajo colaborativo y el desarrollo de la autonomía, a través de momentos que se relacionan y dan significado a los aprendizajes.

Además, los módulos son herramientas que le facilitan al docente su labor como mediador en el proceso de aprendizaje y posibilitan el trabajo en aulas multigrado (varios grados en una misma aula), donde el maestro debe acompañar las diferentes áreas del currículo.

Agradecemos al área de educación del Comité de Cafeteros de Caldas por compartir con las comunidades de Antioquia su experiencia y el material desarrollado; un material diseñado teniendo en cuenta las pautas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional y las necesidades del contexto rural.

Este material no pretende remplazar al maestro y, por el contrario, es una oportunidad para fortalecer su rol dentro del aula de clase y en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Invitamos a los directivos docentes, maestros y estudiantes a utilizar de manera responsable este material, a adoptarlo y adaptarlo como apoyo al desarrollo del plan curricular. Hacerlo, dará mayores oportunidades al desarrollo rural de nuestra región.

era
EDUCACIÓN RURAL
PARA ANTIOQUIA

PRESENTACIÓN

Uno de los insumos importantes del programa Escuela Nueva – Escuela Activa lo constituyen los materiales de interaprendizaje para estudiantes. El valor pedagógico que tienen las guías o módulos en la aplicación de los principios de la Escuela Nueva – Escuela Activa, se asocia con el desarrollo de competencias básicas, ciudadanas, laborales y demás competencias necesarias para el buen desempeño social de los estudiantes; además, la estructura metodológica del material favorece el trabajo colaborativo y en equipo, la participación, la autonomía, las relaciones escuela – comunidad- escuela, la creatividad y el pensamiento lógico, a la vez que forma a los estudiantes en las diferentes disciplinas del conocimiento.

El presente módulo de interaprendizaje de Matemáticas para grado 9° fue construido en el marco de una Alianza de amplia trayectoria, constituida por el Comité de Cafeteros de Caldas y la Fundación Luker, y hace parte de las estrategias del Plan de Mejoramiento al Desempeño propuesto por estas dos instituciones, cuyo propósito fundamental es intervenir en la calidad de la educación básica de establecimientos educativos rurales y urbanos vinculados al programa Escuela Nueva y Escuela Activa Urbana.

El diseño de este módulo se realizó en concordancia con el modelo pedagógico activo y responde a los lineamientos de política del Ministerio de Educación Nacional en cuanto a los estándares curriculares y el enfoque de formación por competencias, además, introduce un componente de apoyo en la evaluación, que había sido ampliamente demandado por los docentes de Escuela Nueva y Escuela Activa Urbana.

Invitamos a los maestros y estudiantes a asumir este material como uno de los recursos que apoya el desarrollo del plan curricular. Su aprovechamiento eficaz, requiere por tanto, de la mediación permanente del maestro y en ningún caso pretende reemplazar su importante labor en el aula de clase.

La Fundación Luker y el Comité de Cafeteros de Caldas resaltan y agradecen a todas aquellas personas e instituciones que colaboraron en la construcción de esta nueva versión de Módulos, con la que esperamos contribuir para que los niños, niñas y jóvenes de Caldas y de Colombia, puedan tener una mejor educación como una condición de equidad, que les dará mayores posibilidades de alcanzar un proyecto de vida digno, donde todos y todas tengan igual oportunidad.

Fundación Luker
Comité de Cafeteros de Caldas
Manizales, enero de 2015

CRÉDITOS MÓDULOS MATEMÁTICAS GRADO NOVENO

COMITÉ DIRECTIVO

Elsa Inés Ramírez Murcia
Coordinadora Desarrollo Social
Programas de Educación
Comité de Cafeteros de Caldas

Pablo Jaramillo Villegas
Gerente Educación Fundación Luker

Santiago Isaza Arango
Director Educación Fundación Luker

COORDINACIÓN

Alexander Ossa Calvo
Comité de Cafeteros de Caldas

Paola Andrea Vallejo Aristizábal
Comité de Cafeteros de Caldas

EQUIPO TÉCNICO

María Piedad Marín Gutiérrez
Consultora Fase de Planeación

Diego Villada Osorio
Consultor Mallas Curriculares

Bibiana Yaneth Pérez Alcalde
Revisión Metodológica

CORPOEDUCACIÓN

Liz Stefany López Ospina
Coordinadora
Luz Alexandra Oicatá Ojeda
Revisión Disciplinar

AUTORES

Luz Alexandra Oicatá Ojeda

ELABORACIÓN DE MALLAS CURRICULARES

Yolanda de las Mercedes Beltrán de Covaleda (Universidad de Antioquia-Acompañamiento Técnico), Jhoana Alexandra Muñoz Nieto, Carlos Alberto Bastos Sánchez, Jhon Fredy Ossa Calvo, Francisco Vallejo García, María Rubiela Castrillón Hurtado, Gonzalo Alarcón Cortez, Manuel Andrés Correa Gallego, Viviana Marcela Vásquez Osorio, Ligia Inés García.

VALIDACIÓN

Valentina Osorio Morales, Daniel Henao Castaño, Diego Alberto Toro Ortiz, Jhon Jairo Quintero Pérez, Paula Marcela Castrillón, Carlos Andrés Zuluaga, Carlos Eduardo Noreña A.

DISEÑO PROYECTO GRÁFICO Y DIAGRAMACIÓN

Blanecolor S.A.S Manizales

IMPRESIÓN

Carvajal Soluciones de Comunicación S.A.S. Abril 2019

ISBN: 978-958-8702-68-1

CONTENIDO

Unidad 3

Avancemos más sobre otras funciones

Estándares

- *Analizo en diferentes representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a las familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.*
- Identifico las relaciones entre las propiedades de las gráficas y de las ecuaciones algebraicas.
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con aquellos previstos por un modelo matemático probabilístico.

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.

Competencias

Matemáticas:

- Resuelvo diversas operaciones haciendo uso de la potenciación, radicación, logaritmación y las fracciones algebraicas. Además, establezco las relaciones entre su semejanza y congruencia y tomo decisiones a partir de cálculos estadísticos en el contexto de diversas situaciones.

Ciudadanas:

- Participo o lidero iniciativas democráticas en mi medio escolar o en mi comunidad, con criterios de justicia, solidaridad y equidad, y en defensa de los derechos civiles y políticos.

Guía 1

Conozcamos las funciones racionales

Indicadores de desempeño

Conceptual

- Analiza la variación de las funciones racionales.

Procedimental

- Determina los puntos de corte y de inflexión de las funciones racionales.

Actitudinal

- Emplea diferentes funciones para resolver problemas de su entorno.

A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Simplifico las siguientes expresiones en mi cuaderno. Utilizo la calculadora para realizar las cuentas y aproximo a dos cifras decimales:

a. $-3\sqrt{5}$

b. $\sqrt[2]{5} + \sqrt[4]{3}$

c. $\sqrt[2]{6} \times \sqrt[3]{12}$

d. $\sqrt{5} - 4\sqrt[3]{2}$

e. $\frac{3}{7} - 5$

f. $\frac{3}{7} - \frac{5}{9} \times \frac{13}{14}$

g. $\frac{3}{7} \div \left(\frac{5}{9} + \frac{13}{14}\right)$

h. $\frac{2}{3} \div \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{7}{3} \times \frac{11}{8}\right)\right)$

i. $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{11} - \frac{6}{7}\right)$

2. Realizo las siguientes operaciones en el cuaderno:

a. $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}$

b. $\frac{bc}{a} \times \frac{c}{ad}$

c. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

d. $\frac{b}{a} \div \frac{a}{b}$

TRABAJO EN EQUIPO

3. Discutimos con nuestros compañeros y profesor el trabajo realizado de manera individual y establecemos acuerdos sobre cuáles son las respuestas más comunes entre todos y por qué.

BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. *Asignamos los roles correspondientes al interior del equipo y le solicitamos respetuosamente al compañero indicado realizar la siguiente lectura y vamos tomando nota en nuestro cuaderno de lo más importante:*

Función racional

Esta función se forma del cociente de dos funciones polinomiales. Simbólicamente:

- Una función racional $y = f(x)$ es una función de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x) \neq 0$ son funciones polinomiales.

Ejemplo 1:

Las siguientes funciones son racionales:

$$\frac{x}{x-5} \qquad \frac{x}{x^3-27}$$

El dominio de una función racional es equivalente a todos los números reales excepto los valores donde el denominador es cero.

Ejemplo 2:

El dominio de $y = \frac{1}{x^2-4}$ es equivalente a todos los reales excepto los valores 2 y -2, porque al factorizar el denominador encontramos:

$$x^2 - 4 \neq 0$$
$$(x-2)(x+2) \neq 0$$

Al igualar cada factor se tiene:

$$x - 2 \neq 0 \qquad \qquad x + 2 \neq 0$$
$$x \neq 2 \qquad y \qquad x \neq -2$$

2. Encontramos el dominio de las siguientes funciones racionales:

a. $y = \dfrac{2}{x-4}$

b. $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

c. $y = \dfrac{7x}{x^2-49}$

d. $y = \dfrac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$

3. Continuamos con la lectura:

Gráficas

Las gráficas racionales requieren de:

- Puntos de intersección con los ejes.
- Algún tipo de transformación rígida o no rígida.
- Dominio de función.
- Grados de cada polinomio.
- Asíntotas.

Intersecciones con los ejes

La intersección de la función racional con los ejes se determina con respecto al eje y, al momento de buscar la imagen de la función y cuando la variable independiente es cero. Simbólicamente (0, f (0)), siempre cuando 0 es parte del dominio.

En el caso del eje x, se iguala la función racional a cero, así: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde es necesario igualar el polinomio del numerador $p(x) = 0$.

Algunas transformaciones

La gráfica de la función racional $f(x)$ es simétrica cuando: Si $f(x) = f(-x)$, la función es par y simétrica con respecto al eje y.
Si $-f(x) = f(-x)$, la función es impar, es decir, simétrica con respecto al origen.

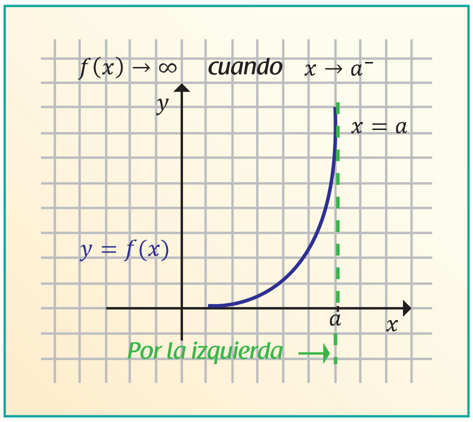
- Además, si las dos funciones polinómicas son pares, entonces la función racional es par.
- Si las dos funciones polinómicas son impares, entonces la función racional es par.
- Si las funciones polinómicas, una es par y la otra impar, entonces la función racional es impar.

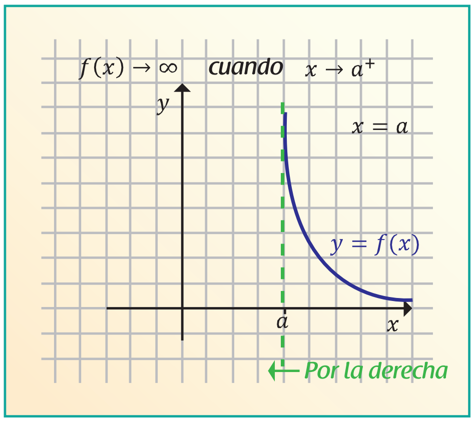
Asíntotas

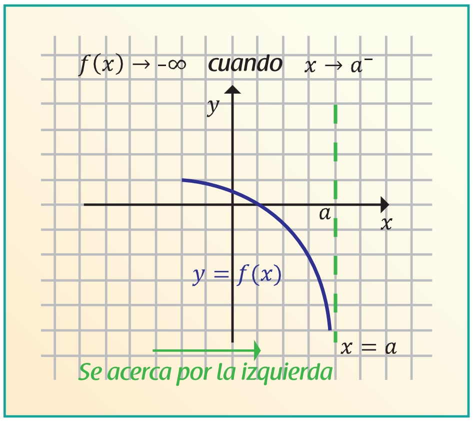
Son ecuaciones de líneas rectas verticales, horizontales y oblicuas que se definen cada vez que la función racional toma valores más grandes. Es por ello que es necesario tener en cuenta la siguiente terminología:

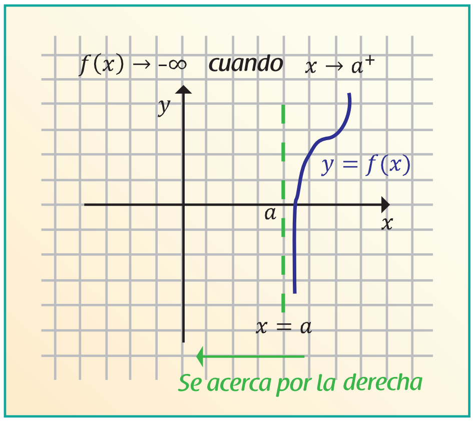
Notación	Terminología
$x \longrightarrow a^-$	Los valores se aproximan por el lado izquierdo al valor.
$x \longrightarrow a^+$	Los valores se aproximan por el lado derecho al valor.
$f(x) \longrightarrow \infty^+$	Los valores de la función aumentan pero no tienen ningún límite o no se acercan a ningún valor. Es decir, la función es muy positiva.
$f(x) \longrightarrow \infty^-$	Los valores de la función disminuyen pero no tienen ningún límite o no se acercan a ningún valor. Es decir, la función es muy negativa.

Estas ideas se grafican de la siguiente forma:







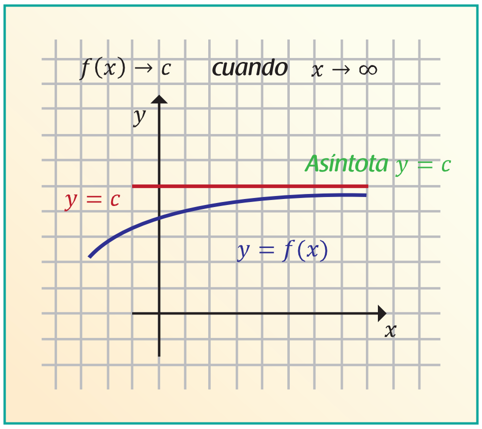


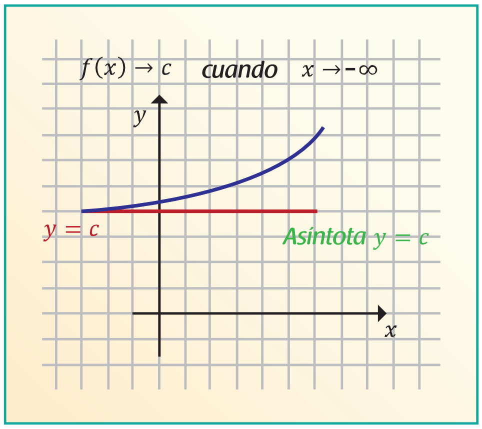
El símbolo ∞ se lee "infinito" y $-\infty$ se lee "menos infinito", esto representa un comportamiento de funciones y de la variable independiente o dependiente de la función cuando los valores son demasiado grandes. La recta punteada $x = a$ está representando la asíntota vertical.

$x = a$ es asíntota vertical de la gráfica de una función f, si se cumple que $f(x) \longrightarrow \infty$ o $f(x) \longrightarrow -\infty$
Cuando x se aproxima a a, sea por el lado izquierdo o derecho.

En las funciones racionales se refieren a las asíntotas que se generan en el valor de x que no está definido en la función racional.

Asi mismo aparecen las **asíntotas horizontales**, cuya ecuación es $\boldsymbol{y = c}$ que ocurren cuando $x \longrightarrow \infty \quad f(x) \longrightarrow c$ o si $x \longrightarrow -\infty \quad f(x) \longrightarrow c$. Estas ideas se representan así:





Ejemplo 3:

Encontramos las asíntotas verticales de la función racional $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

El dominio de la función se define por el denominador $x^2 - 1 \neq 0$.
Al realizar la ecuación se tiene:

$x^2 - 1 \neq 0$

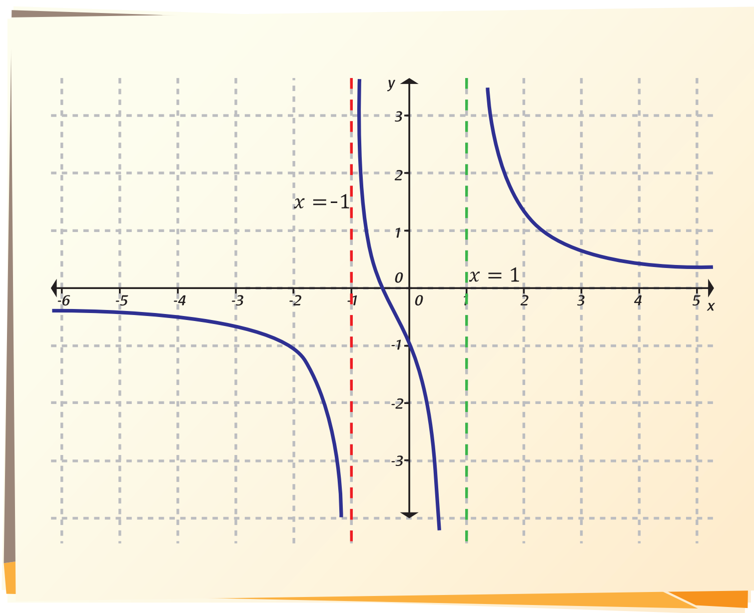
$(x - 1)(x + 1) \neq 0$

Entonces los factores son $x - 1 \neq 0$ y $x + 1 \neq 0$

Luego:

$x \neq 1 \; y \; x \neq -1$

Por ende, las ecuaciones de las asíntotas son $x = -1$ y $x = 1$, como se muestra en la gráfica:



Ejemplo 4:

Encontramos las asíntotas horizontales de la función racional $y = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

Para ello, utilizaremos valores muy grandes para x y analizaremos a qué valor se va aproximando el rango:

x	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
y	0.0002000001	0.00002000001	0.000002000001	0.0000002000001

Como observamos, el valor tiende a cero. Es decir que la asíntota horizontal es $y = 0$.

Existe una forma para hallar el valor de la asíntota que consiste en determinar el grado de cada polinomio:

- Si $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, ambos polinomios tienen el mismo grado y tienden al valor del cociente de sus coeficientes. Por tanto, la asíntota horizontal será ese cociente.
- Si $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, el polinomio $p(x)$ es de grado mayor que $q(x)$ y no tiende a ningún valor. Por tanto, la asíntota horizontal no existe.
- Si $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, el polinomio $p(x)$ es de grado menor que $q(x)$ y tiende al valor cero. Por tanto, la asíntota horizontal siempre será $y = 0$.

4. Determinamos las asíntotas horizontales y verticales. Ubicamos los puntos de intersección con los ejes y elaboramos la gráfica de cada una de las funciones racionales:

a. $\dfrac{1}{x}$

b. $\dfrac{1}{x-2}$

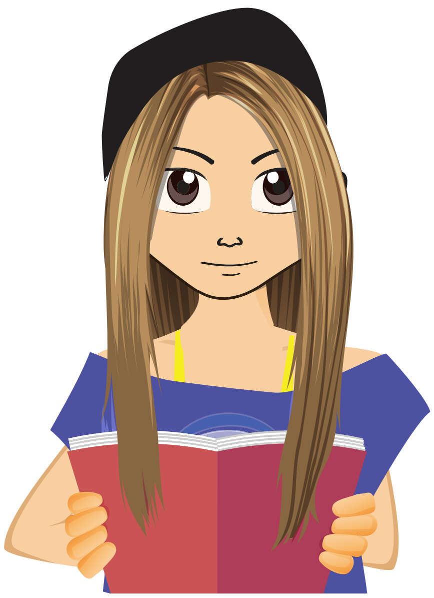
c. $\dfrac{3x}{x-1}$

d. $\dfrac{4x+9}{2x+3}$

e. $\dfrac{1}{(x-2)^2}$

f. $\dfrac{x^2}{x-2}$

g. $\dfrac{1-x^2}{x^2}$



5. Solicitamos a nuestro profesor que revise nuestro trabajo.

D Aplicación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Identifico el tipo de operación que corresponde a cada situación, la resuelvo y consigno el resultado obtenido:

   a. En un cultivo ubicado en el municipio de Arenas, la cantidad de plagas que lastiman las plantas crece según la función $y = \frac{x}{1.025t}$, donde t es el tiempo en años y x es la cantidad de plagas encontrada inicialmente. Si en el año 2000 el bosque tiene 1 000 individuos de la plaga, ¿cuántos de ellos se tendrán en el año 2010?

   b. La dosis de un medicamento para los animales adultos y las crías se regula por la siguiente fórmula: La dosis m para adultos en miligramos y t el tiempo en meses de las crías, entonces la dosis para las crías está dada por la expresión:

$$y = t \cdot \frac{m}{t + 12}$$

Trazo la gráfica de esta ecuación para $t > 0$ y $m = 20$.

   c. La dosis para las crías está dada por la ecuación $y = \frac{t \cdot a}{t + 12}$.

   Trazo la gráfica de esta ecuación para $t > 0$ y $a = 500$.

   d. Para determinar el número de pulgadas $l(t)$ de lluvias durante una tormenta por t horas, se puede aproximar por la fórmula:

$$l(t) = \frac{a \cdot t}{t + b}$$

   Donde a y b son constantes positivas que dependen del lugar geo gráfico:

✓ Analizo la variación $l(t)$ cuando t tiende a ser más grande.
✓ Grafico a $l(t)$ si $a = 2$ y $b = 8$.

TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparamos con nuestro compañero los resultados de los ejercicios realizados de manera individual.

3. Solicitamos a nuestro profesor que nos aclare las inquietudes al respecto.

E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Realizamos la siguiente lectura y escribimos en nuestros cuadernos aquello que complemente lo que hemos visto sobre funciones racionales:

Existe otro tipo de asíntotas que se denominan **oblicuas**, las cuales tienen la ecuación de una recta de la forma $y = mx + b$.

Debemos tener en cuenta las siguientes condiciones en las funciones racionales $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ para que sea posible que se dé una **asíntota oblicua:**

- Las funciones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$ no deben tener ningún factor en común.
- El grado de $p(x)$ debe ser uno más que el de $q(x)$.

La asíntota oblicua se determina por la división entre los polinomios. Al dividir $p(x)$ entre $q(x)$, se obtiene un cociente que es un polinomio lineal $mx + b$ y un polinomio residuo $r(x)$. Simbólicamente:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = mx + b + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Donde $mx + b$ será la ecuación de la asíntota oblicua; si $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ tiende al valor cero, cuando x tiene un valor muy grande.

Ejemplo 1:

Graficamos la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 4}$

Estudiemos cada uno de los elementos vistos:

- El dominio son todos los reales menos el 4. Porque $x - 4 \neq 0$
- No tiene simetría, porque $p(x) = x^2 - x - 6$ y $q(x) = x - 4$ no son funciones pares o impares.

- Para obtener las intersecciones en el eje y, reemplazamos $x = 0$, entonces queda:

$$f(0) = \frac{0^2 - 0 - 6}{0 - 4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

  Entonces la intersección es en el punto $(0, \frac{3}{2})$.

- Para obtener la intersección en el eje x, igualamos $p(x) = 0$. Es decir, $x^2 - x - 6 = 0$ o $(x + 2)(x - 3) = 0$, donde $x = -2$ y $x = 3$. Entonces los puntos de corte con el eje x son: $(-2, 0)$ y $(3, 0)$.

- La asíntota vertical se encuentra igualando $q(x) = 0$. Es decir, $x - 4 = 0$, entonces $x = 4$. La recta vertical $x = 4$ es la asíntota vertical.

- No hay asíntota horizontal porque el grado de $p(x)$ es mayor a $q(x)$.

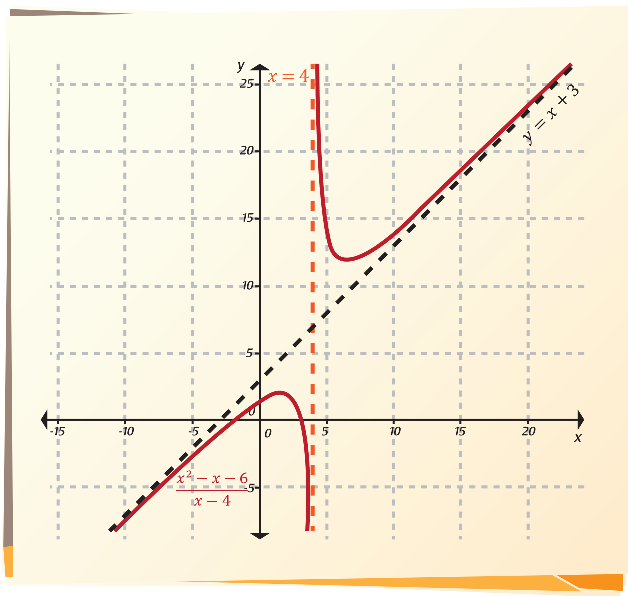
- Sí hay asíntota oblicua porque se cumplen las dos condiciones expuestas, el grado de $p(x)$ es una unidad más grande que $q(x)$ y además no tienen factores en común. Realizamos la división:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 6 & x - 4 \\ \cline{2-2} -x^2 + 4x \quad & x + 3 \\ \cline{1-1} 3x - 6 & \\ -3x + 12 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Luego $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 4} = x + 3 + \dfrac{6}{x - 4}$

Cuando $x \to \infty$ entonces $\dfrac{6}{x - 4} \to 0$ Luego $x + 3$ es asíntota oblicua.

- Entonces la gráfica es:



2. Realizamos las gráficas de las siguientes funciones con todos los pasos del ejemplo 1:

   a. $y = \dfrac{2x - 3x^2 + x^3}{1 + x^2}$

   b. $g(x) = \dfrac{x^3 + 5x - 7}{x^2}$

3. Invitamos a nuestro profesor a revisar nuestras respuestas.

Evaluación por competencias

1. Respondo verdadero (V) o falso (F) según cada enunciado:

A. $f(x) = 2x^5 - 4x + 3$ no es un polinomio. (   )

B. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ no es una función racional. (   )

C. La gráfica de una función polinómica puede tener discontinuidades. (   )

D. La gráfica de una función racional siempre tiene asíntotas verticales. (   )

E. En algunos casos, la gráfica de una función racional tiene asíntota horizontal. (   )

F. La gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ tiene una asíntota oblicua. (   )

1

2. Si se tiene una función racional de la forma $f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x+2}$, su intersección con el eje y es en:

A. 1

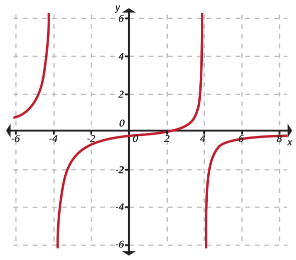
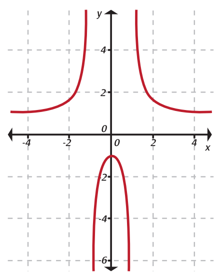
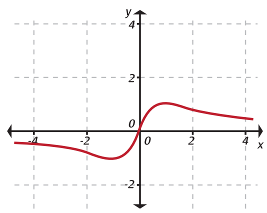
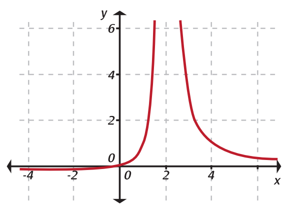
B. 2

C. -2

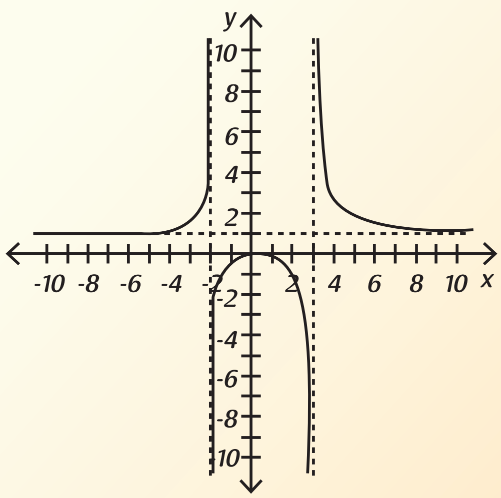
D. 0.5

2

3. Asocio la función dada con su gráfica correspondiente:

$f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$	
$f(x) = \dfrac{x}{(x-2)^2}$	
$f(x) = \dfrac{2x-4}{16-x^2}$	
$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	

4. La gráfica corresponde a la función:



A. $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2 - x - 6}$

B. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 6}$

C. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 6}$

D. $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2 + x - 6}$

4

5. Escribo una función racional que pase por (0,-3), que tenga una asíntota horizontal en el eje x , $x = 4$, y dos asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = -2$.

Glosario

- **Asíntota**: En geometría, línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca progresivamente a una curva sin llegar nunca a encontrarla.
- **Dominio:** Son los valores de los números reales que una función puede tomar.
- **Función impar:** Cuando la función es simétrica con respecto al origen.
- **Función par:** Cuando la función es simétrica con respecto al eje y.
- **Función racional:** Es una función cociente, donde tanto el numerador como el denominador son polinomios.
- **Intercepto:** Son los puntos que interceptan alguno de los ejes.
- **Simetría:** Correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano.