GUÍA 5

CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS MÁS COMPLEJAS Y DEL VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN POR INTEGRACIÓN

El Airbús, gigante de los cielos, tendrá capacidad para 555 pasajeros en su versión estándar y hasta 800 con todos los asientos en clase turista.
Tendrá dos pisos a todo lo largo, cada uno con dos pasillos, que se conectarán entre sí por dos grandes escaleras. ¿Increíble verdad?

Las matemáticas, y especialmente el Cálculo infinitesimal, han hecho posible esta maravilla tecnológica, cuyo vuelo de ensayo se efectuó en abril de 2005.

INDICADORES DE LOGRO

- Interpreta correctamente los problemas sobre áreas y dibuja aproximadamente las fronteras: superior, inferior y laterales
- Identifica el elemento diferencial y calcula el área mediante la integral definida
- Reconoce la curva cuya rotación sobre el eje x genera un sólido de revolución y lo dibuja aproximadamente
- Establece el elemento diferencial adecuado y calcula el volumen usando la integral definida
- Identifica la diferencia entre trabajo en grupo y trabajo en equipo. (TRABAJO EN EQUIPO)
- Demuestra una actitud abierta, propositiva y proactiva frente al trabajo en grupo.
- Comparte la información y la experiencia con los demás
- Concierta con el grupo los objetivos y métodos de trabajo
- Asume roles, responsabilidades y compromisos acordes a sus capacidades y las necesidades del grupo
- Evalúa colectivamente, de manera crítica y reflexiva los resultados alcanzados por el grupo
- Coopera con los otros, para lograr los resultados esperados por el grupo

Con los compañeros del subgrupo leemos y analizamos el siguiente contenido:

En esta guía se retoma la competencia laboral general **Trabajo en Equipo**, cuya importancia es innegable porque en la actualidad, y en gran parte a causa de la globalización, la necesidad de reducir costos llevó a las organizaciones a pensar en equipos multidisciplinarios como una forma de trabajo habitual.

Alcanzar y mantener el éxito en las organizaciones modernas requiere talentos prácticamente imposibles de encontrar en un solo individuo.

Las nuevas estructuras de las organizaciones, con menos niveles jerárquicos, requieren una interacción mayor entre las personas, que sólo puede lograrse con una actitud cooperativa y no individualista.

Pero la necesidad de trabajar en equipo no es tan nueva: en el tiempo de las cavernas, los hombres trabajaban en equipo, según los antropólogos. Quien tenía buenos ojos era el vigía que esperaba descubrir a la presa. Quien tenía buena puntería él era el que manejaba el arma. Quien era buen corredor era el que perseguía al animal herido; otro lo cargaba; otro lo destazaba. En fin, cada uno aportaba de acuerdo con su propia habilidad. Y todos, por igual, compartían los resultados: comerse al animal cazado.

En un equipo así es precisamente como las cosas funcionan. El líder conoce la habilidad diferencial de cada uno, e impulsa esa habilidad. Esa diversidad (no homogeneidad) es lo que hace grande y fuerte al equipo.

Recordemos, como ya se expresó en guía anterior, "Trabajo en Equipo" no significa solamente "trabajar juntos". Trabajo en Equipo es una forma de pensar diferente, es un camino ganador que las organizaciones han descubierto en los últimos años para hacer que cada integrante se **comprometa** realmente con los objetivos de esa organización. Un buen ejemplo es un conjunto musical, en el cual, lo que realmente importa, es que los músicos sepan **tocar juntos**.

Los equipos deben aprender a explotar el potencial de muchas mentes para ser más inteligentes que una mente sola. Tal sentimiento puede formularse con una frase como: 'Ninguno de nosotros es más inteligente que todos nosotros'. Y el espíritu del equipo al enfrentar cada cuestión o desafío es: 'Todos nosotros contra el problema, y no los unos contra los otros', como afirma Abel Cortese, especialista en inteligencia emocional.

A

Procuro desarrollar las siguientes cuestiones, requeridas para encarar el tema de esta guía. Si tengo dificultades, consulto en las fuentes adecuadas.

- ¿Cuáles son las gráficas de Y=0, X=3 y X=-2?
- Si Y=F(x), ¿cómo podemos hacer una aproximación de su gráfica?
- Resuelva $\int_{1}^{-2} 3x^2dx$
- ¿Cuáles son las fórmulas de la geometría que permiten calcular el área de un círculo y el volumen de un cilindro?
- Dibuje las gráficas correspondientes a las funciones $y = x^2 + 1$ y $y = -x^2 + 3$. Resalte la superficie limitada por las dos curvas. ¿En cuáles puntos se intersectan las dos gráficas?
- En un diálogo entre los compañeros de subgrupo y de acuerdo al conocimiento que tenemos de ellos, elaboramos una lista para cada uno, que contenga las actitudes, aptitudes y destrezas que puedan ser tenidas en cuenta para desarrollar la siguiente guía, trabajando en equipo.

B

Con los compañeros del subgrupo leemos, analizamos y anotamos en los cuadernos de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde y si lo requerimos volvemos a desarrollar los ejemplos que aparecen resueltos, con la finalidad de afianzar conceptos.

Como se vio en la guía anterior, el área bajo una curva puede descomponerse en rectángulos cuya base se va estrechando. En el paso al límite, cuando el incremento de x tienda a cero, los rectángulos tendrán base dx y altura F(x). Por lo tanto el área podrá calcularse mediante la integral definida.

Los pasos que deben tenerse en cuenta para plantear la integral definida que proporciona el valor del área son:

1. Trazar un diagrama en el que figuren: (a) el área a determinar, (b) una franja representativa y (c) el rectángulo genérico. Para ello tomaremos la base como dx (ó dy) y la altura como Y (ó como X).

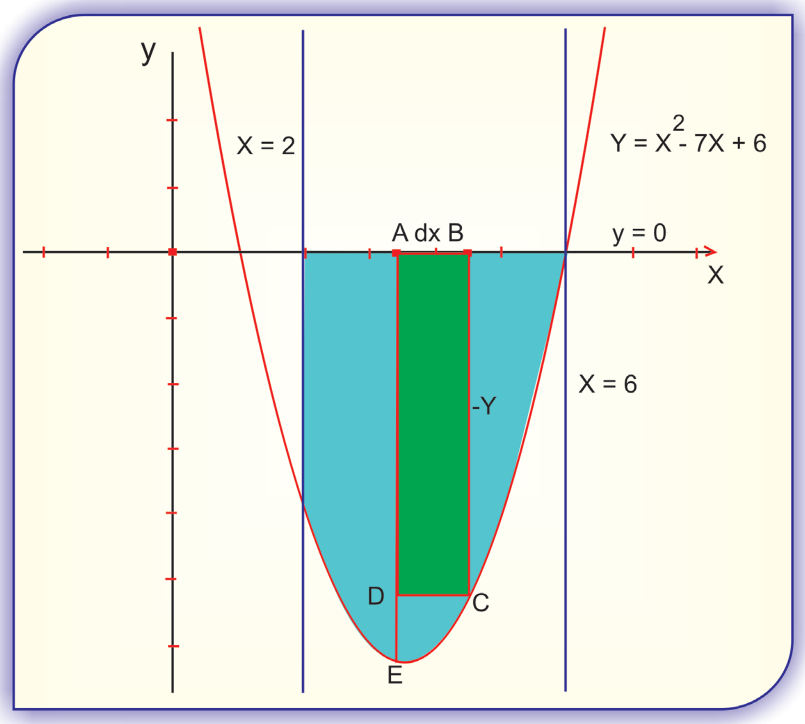
2. Hallar el área del rectángulo genérico, aplicando la conocida fórmula: base por altura.

3. Se resuelve la integral planteada.

Ejemplo1: hallar el área limitada por $Y = X^2 - 7X + 6$, el eje X y las rectas X=2 y X=6.

Solución: de acuerdo con el paso 1, en la figura siguiente se ven la gráfica de la función (la curva de color rojo), las rectas X = 2 y X = 6, una franja representativa (ABCE) y el rectángulo genérico (ABCD) que tiene por altura Y (la función) y por base la diferencial de X (dx).

Para el paso 2, se halla el área del rectángulo genérico: Área del rectángulo ABCD = -Ydx (base por altura). Nótese que Y es negativa porque está por debajo del eje horizontal.



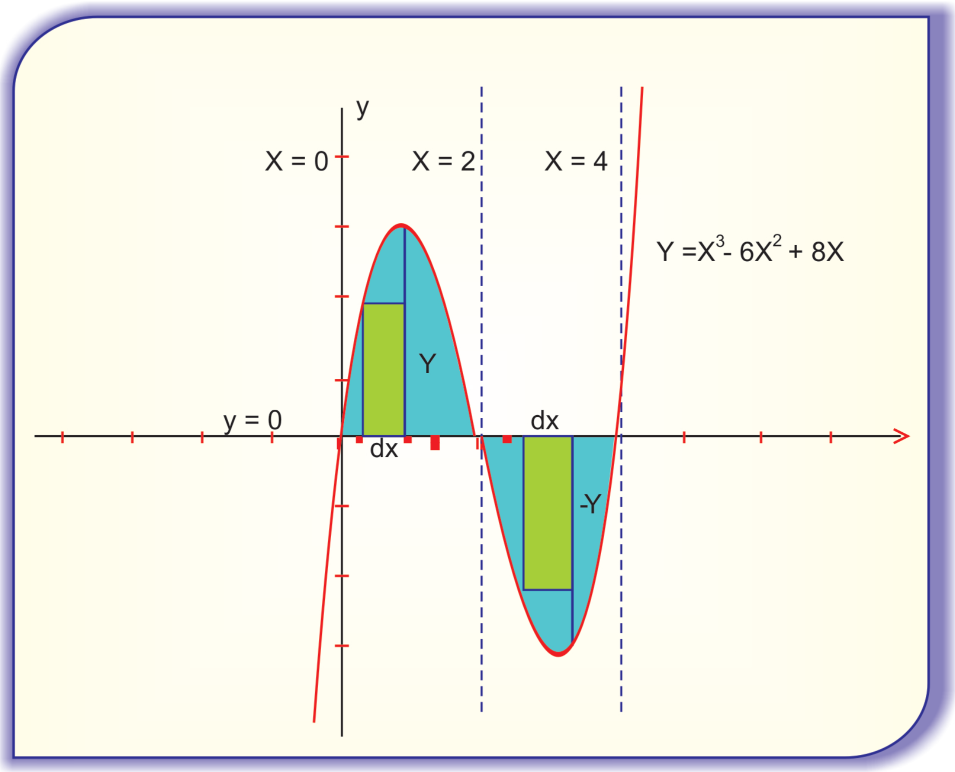
En el paso 3: $Área = \int_2^6 -(X^2 - 7X + 6)dx = \left[-\frac{X^3}{3} + \frac{7X^2}{2} - 6X\right]_2^6$. Luego:

$$Área = \left[-\frac{6^3}{3} + \frac{7(6^2)}{2} - 6*6\right] - \left[-\frac{2^3}{3} + \frac{7(2^2)}{2} - 6*2\right].$$ O sea:

$$Área = (-72 + 126 - 36) - (-\frac{8}{3} + 14 - 12) = \frac{56}{3}$$ unidades cuadradas.

Ejemplo 2: hallar el área comprendida entre $Y = X^3 - 6X^2 + 8X$ y el eje X.

Solución: de manera similar, se siguen los pasos indicados antes, con la diferencia de que en el problema no se dan las fronteras laterales. Pero al trazar la gráfica de la función se ve que es preciso calcular los puntos de corte de la curva con el eje horizontal, lo que se logra haciendo Y = 0. Al resolver la ecuación resultan los valores requeridos, así: $0 = X^3 - 6X^2 + 8X \Rightarrow X(X-2)(X-4) = 0 \Rightarrow X = 0, X = 2, X = 4$, que son las fronteras laterales. En la gráfica siguiente se ven esos elementos, incluso las franjas y los rectángulos correspondientes:



Como hay dos superficies, una por encima y otra por debajo del eje x, se deben considerar los dos rectángulos genéricos cuyas áreas son Ydx y -Ydx, respectivamente. Y estableciendo las dos integrales, resulta:

$$Área = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$, o sea:

$$Área = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4$$. Luego:

$$Área = (4 - 16 + 16) + [(-64 + 128 - 64) - (-4 + 16 - 16]\cdot$$

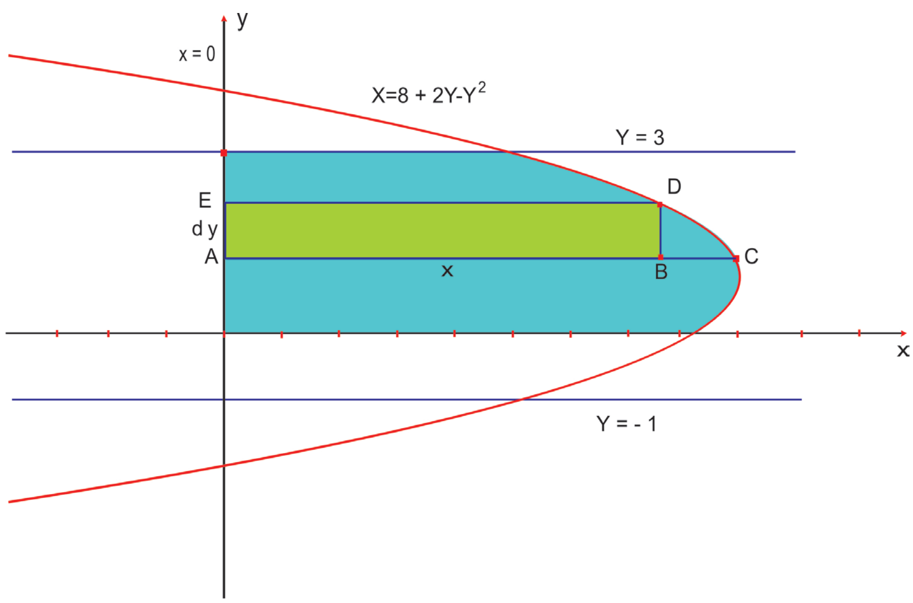
$Área = 4 + 4 = 8$ unidades cuadradas.

Ejemplo 3: hallar el área comprendida entre la parábola $X = 8 + 2Y - Y^2$, el eje Y y las rectas Y=-1 y Y=3.

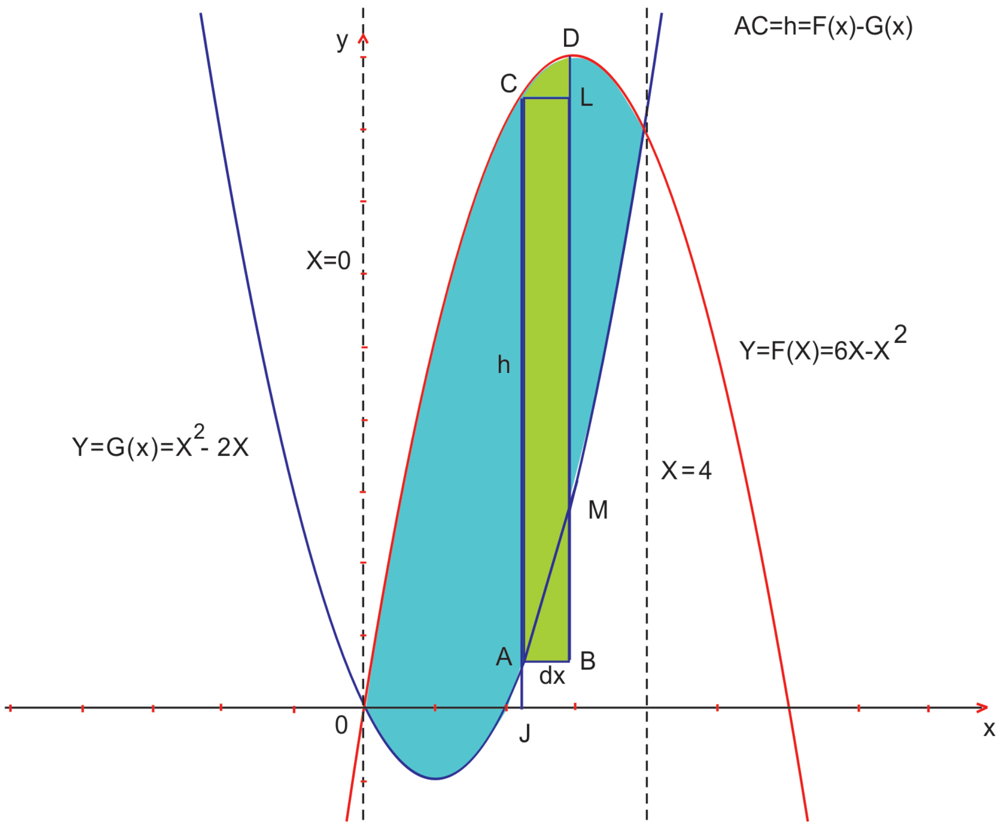
Solución: se trata de una parábola de eje horizontal y cuyas ramas se abren a la izquierda, razón por la cual es más cómodo tomar la franja representativa ABCDE y el rectángulo genérico ABDE en posición horizontal de manera que la altura del rectángulo es X y su base es dy, como se ve en la figura que hay más abajo. Por tanto:

$$Área = \int_{-1}^3 Xdy = \int_{-1}^3 (8 + 2Y - Y^2)dx = \left[8Y + Y^2 - \frac{Y^3}{3}\right]_{-1}^3$$ .Luego:

$Área = 24 + 9 - 9 - (-8 + 1 + \frac{1}{3}) = \frac{92}{3}$ unidades cuadradas.



Ejemplo 4: hallar el área comprendida entre $Y = 6X - X^2$ y $Y = X^2 - 2X$, cuya gráfica es:



Solución: se trata de una superficie OAMKDC, limitada por dos curvas: la de color rojo que corresponde a la función $F(x) = Y = 6X - X^2$ y la azul a $G(x) = Y = X^2 - 2$.

Para obtener las fronteras laterales, es preciso resolver el sistema simultáneo conformado por las dos ecuaciones, así:

(1) $Y = 6X - X^2$

(2) $Y = X^2 - 2X$

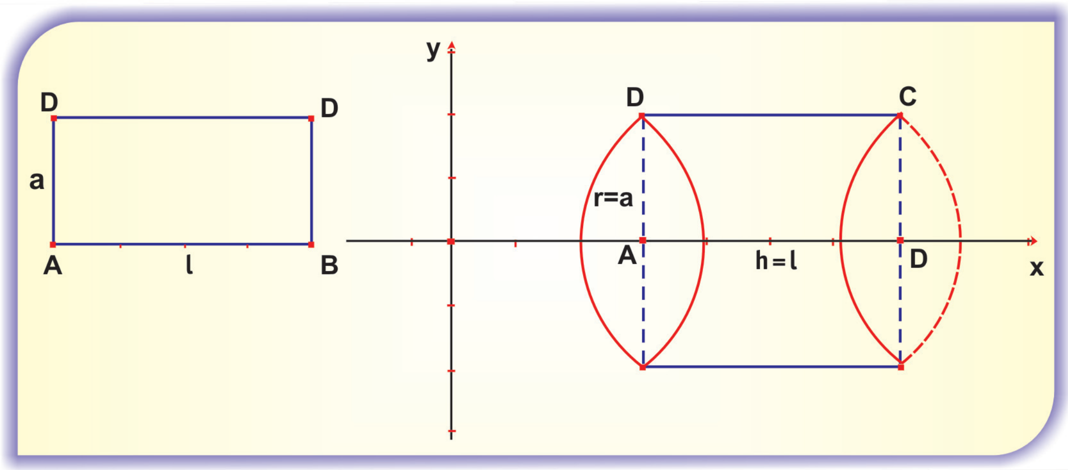
$6X - X^2 = X^2 - 2X \Rightarrow 2X^2 - 8X = 0 \Rightarrow 2X(X-4) = 0 \Rightarrow X = 0 \vee X = 4$ que son las fronteras laterales.

La franja representativa es la AMDC y el rectángulo genérico es ABLC que tiene por base dx y por altura h = AC = JC - JA. Pero JC es la misma F(x) y JA es igual a G(x), como se ve en la figura. Por tanto, h = F(x) - G(x). Luego:

$$Área = \int_0^4 h\,dx = \int_0^4 (6X - X^2) - (X^2 - 2X)dx = \int_0^4 (8X - 2X^2)dx = \left[4X^2 - \frac{2X^3}{3}\right]_0^4$$

$$Área = 4(4^2) - \frac{2(4^3)}{3} = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$$ unidades cuadradas.

Cálculo del volúmen de sólidos de revolución

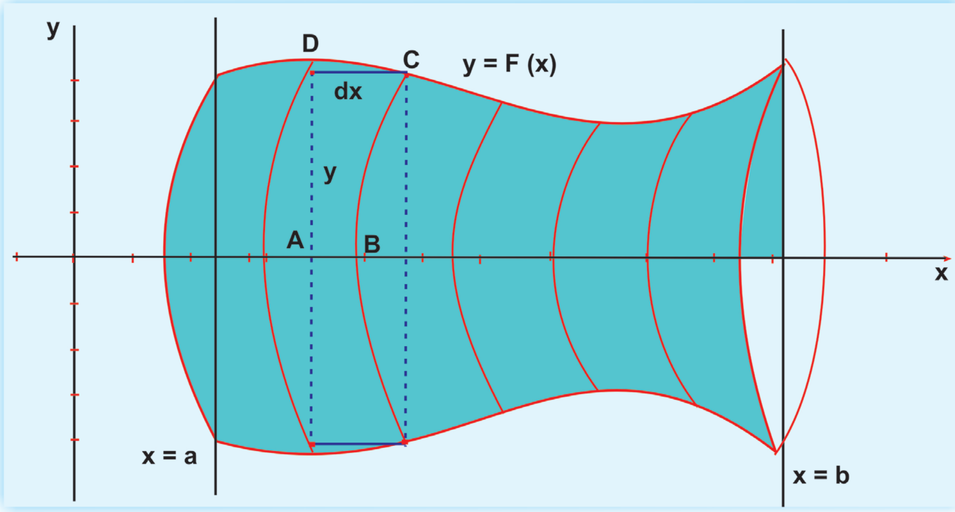


Un sólido de revolución se origina por la rotación de un área plana alrededor de un eje de revolución. Por ejemplo, si ABCD es un rectángulo cuya base es l y cuya altura es a (gráfica de la izquierda). Si se hace rotar dicho rectángulo sobre uno de sus lados en ángulo de 360º alrededor de un eje (el eje x en este caso), se genera un sólido de revolución llamado cilindro, que tiene como radio de la base un lado del rectángulo y por altura el otro lado. (Gráfica de la derecha).

Si se desea calcular el volumen V del cilindro, se usa la fórmula: Área de la base del cilindro multiplicada por su altura h. Y como la base es un círculo de radio r, entonces $V = \pi r^2 h$, que es la conocida expresión de la geometría.

Cálculo del volúmen mediante la integración

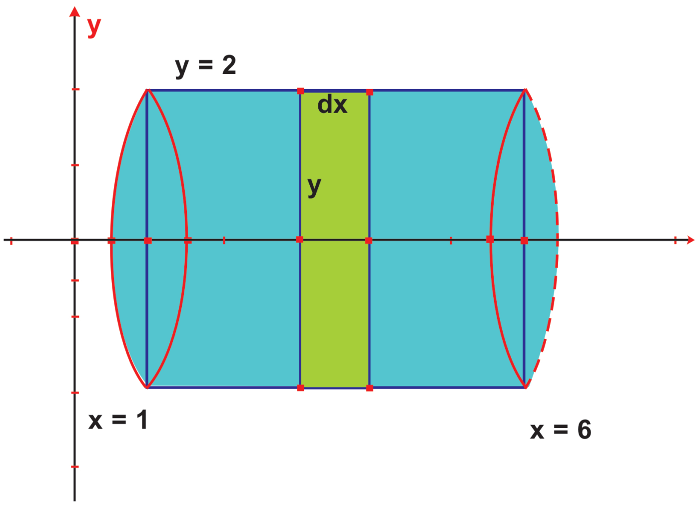
En la guía 4 de esta misma unidad se vio que el área bajo una curva se puede descomponer en franjas rectangulares de ancho muy pequeño, tendiendo a 0 y que por sumatoria de las áreas de todos esos rectángulos se llegaba a encontrar el valor del área bajo la curva, cuando el número de rectángulos tiende al infinito. Con un razonamiento similar, se puede pensar en que los rectángulos de ancho muy pequeño (tendiendo a o) se hacen girar alrededor de un eje en un ángulo de 360º para generar cilindros de altura muy pequeña, algo así como "rebanadas", y al hacer la sumatoria de los volúmenes de todas esas rebanadas, cuando su número tiende al infinito, da como resultado el volumen V del sólido. La siguiente figura ilustra el razonamiento:



La gráfica de la función y = F(x), en el intervalo $[a,b]$ se descompone en rectángulos como el ABCD que al rotar alrededor del eje x genera un cilindro que tiene por altura dx y por radio de la base a F(x). El volumen de ese cilindro genérico es $=\pi y^2 dx$. Y de acuerdo con lo dicho antes, el volumen V del sólido es:

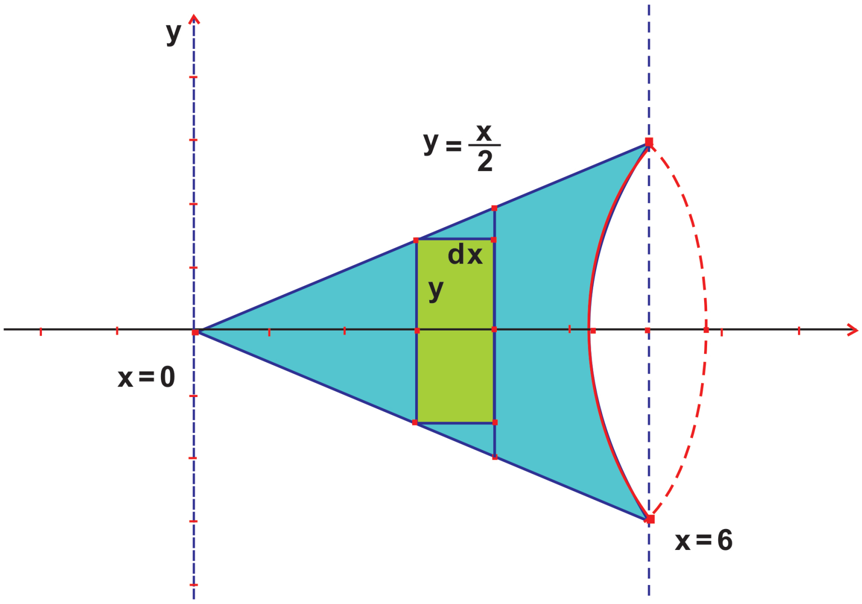
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \pi \left(f(x_j) \right)^2 dx_j \Leftrightarrow V = \int_a^b \pi \left(F(x) \right)^2 dx.$$

Como aplicación, calcular el volumen del sólido generado por F(x) = Y = 2 en el intervalo $[1,6]$, como se muestra en la figura:



Solución: aquí, el rectángulo genérico (el de color verde) tiene por dimensiones dx y 2, y su rotación origina un pequeño cilindro cuyo volumen es πy^2. Por tanto: $V = \int_1^6 \pi y^2 dx = \int_1^6 \pi (2)^2 dx = \int_1^6 4\pi dx = \left[4\pi x\right]_1^6 = 4\pi(6) - 4\pi(1) = 20\pi$ unidades cúbicas, como se puede comprobar aplicando la fórmula para calcular el volumen de un cilindro de altura 5 y radio de la base igual a 2, así: $V = \pi r^2 h = \pi(4)(5) = 20\pi$ unidades cúbicas, igual al resultado anterior.

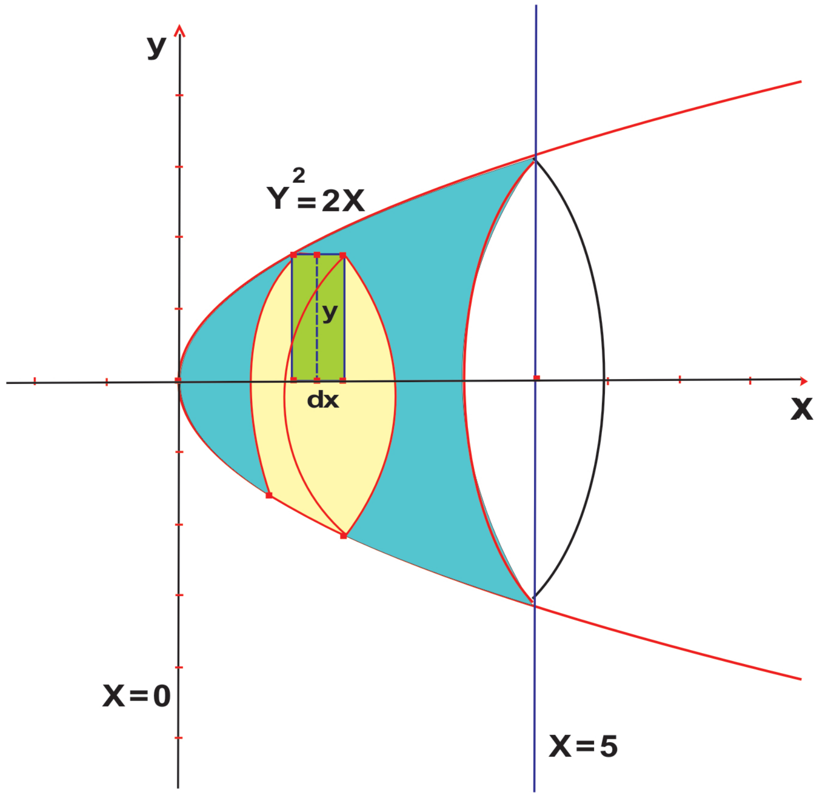
Otro ejemplo: hallar el volumen generado por la rotación de la recta $y = \dfrac{x}{2}$ cuando gira alrededor del eje x en el intervalo $[0,6]$, como se ve en la gráfica:



Solución: en este caso el rectángulo genérico (el de color verde) tiene por dimensiones dx y $\dfrac{x}{2}$ y su rotación origina un pequeño cilindro cuyo volumen es $\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Por tanto: $V = \int_0^6 \left(\dfrac{\pi x^2}{4}\right) dx = \left[\dfrac{\pi x^3}{12}\right]_0^6$. Luego:

$V = \dfrac{\pi(6)^3}{12} = \dfrac{216\pi}{12} = 18\pi$ unidades cúbicas, como se puede comprobar aplicando la fórmula para hallar el volumen de un cono de altura 6 y radio de la base igual a 3, así: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi(3)^2 * 6}{3} = \dfrac{54\pi}{3} = 18\pi$ unidades cúbicas, igual al resultado anterior.

Otro ejemplo: hallar el volumen generado por la rotación sobre el eje x de la función $Y = +\sqrt{2X}$ en el intervalo $[0,5]$, como se ve en la gráfica:



Solución: el rectángulo genérico (el de color verde) al girar alrededor del eje x engendra un cilindro que tiene por altura dx, por radio de la base a y, con un volumen de πy^2. Por tanto, el volumen V del sólido está dado por:

$$V = \int_0^5 \pi y^2 dx = \int_0^5 2\pi x dx = \left[\pi x^2\right]_0^5 = 25\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

Concluida la revisión de los ejercicios habrán notado que algunos de los integrantes del subgrupo son más hábiles en estos menesteres. Si trabajamos en equipo, podemos imaginar que cada uno de los integrantes somos eslabones de una cadena en donde, por lo general, alguno de nosotros, como mínimo, resulta menos fuerte que los otros, pero con la colaboración de todos es probable que se haya evitado la ruptura de la cadena y en consecuencia todos alcanzamos las metas, pues trabajando en equipo "el todo es mayor que la suma de las partes", aunque se viole un conocido principio de las matemáticas. Así, pues, para trabajar el siguiente paso de la guía, tengamos en cuenta los resultados del trabajo hecho en A, en relación con los compañeros.

Con el fin de afianzar conceptos y adquirir agilidad para graficar funciones, identificar elementos y manejar la integral definida para el cálculo de áreas y volúmenes, desarrollamos en equipo los siguientes planteamientos:

De acuerdo con los datos, graficamos los elementos que se dan (las fronteras) en cada problema e identificamos el área del rectángulo genérico. Luego, calculamos por integración el área y si es posible comprobamos el resultado (que está dado en unidades cuadradas) mediante fórmulas de la geometría:

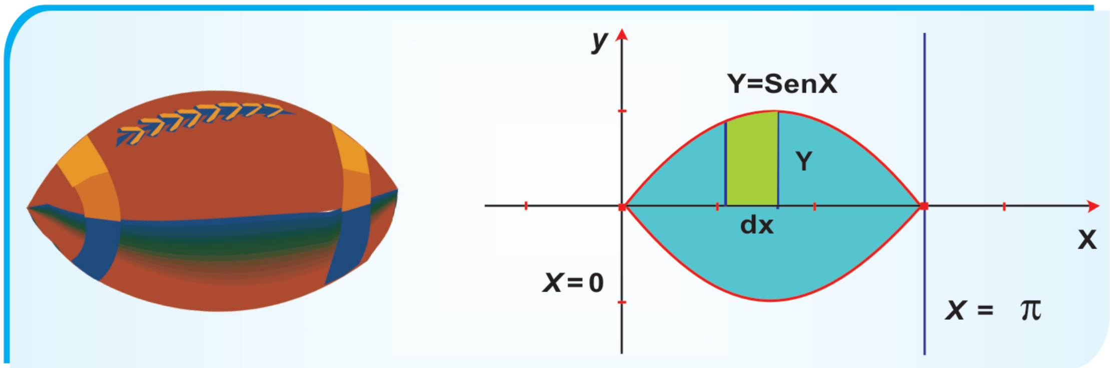
1. La recta Y = 2X, el eje X y la recta X = 4 (16)
2. La recta X + Y = 10, el eje de las X y las rectas X=1 y X=8. (38,5)
3. $Y = X^2$, el eje X y las rectas X=2, X=4; (56/3)
4. Y = 9 - X2, Y=0, X=0, X=3; (18)
5. Y = X3 + 3X2 +2X, Y=0, X=-3, X=3; (54)

Acorde con los datos, graficamos los elementos que se dan, visualizamos el sólido de revolución, identificamos el cilindro genérico y su volumen (que está dado en unidades cúbicas); luego calculamos el volumen del sólido mediante la técnica de la integración.

1. $Y = 2X^2$, X = 0, X =2, rotación sobre el eje x. (128Pi/5)
2. $Y^2 = X^3$, X = 0, X = 2; rotación sobre el eje x. (4Pi)
3. $4X^2 + 9Y^2 = 36$, rotación sobre el eje x. (16Pi)

Como aplicación a los conocimientos que nos ha aportado el contenido de la guía, desarrollamos en equipo el siguiente problema:

Supongamos que ustedes tienen una microempresa que distribuye implementos deportivos y entre ellos balones de fútbol americano, que tienen la forma de la figura de la izquierda de la gráfica. Este sólido de revolución se genera cuando la región plana correspondiente a Y=SenX rota sobre el eje x en el intervalo $[0,\pi]$, como se muestra a la derecha de la imagen que se ve enseguida:



Para efectos de determinar cuál es la caja de embalaje más económica, es preciso conocer cuál es el volumen de cada balón, aplicando cálculo integral. (Pi^2/2 unidades cúbicas).

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA