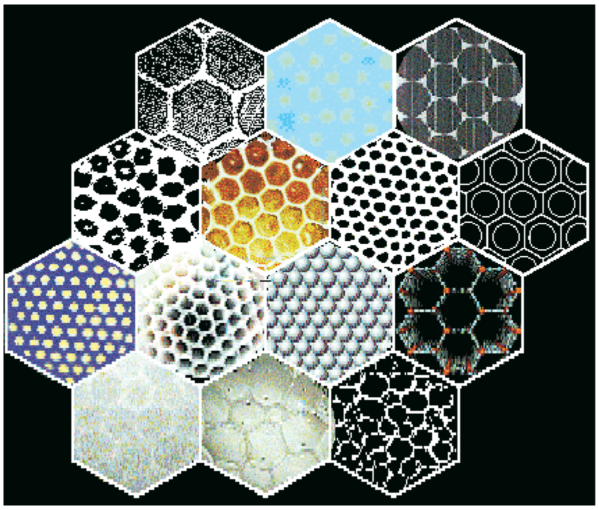
GUÍA 4

LA DERIVADA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS



Hexágonos en un mundo empaquetado

Los hexágonos están en todas partes. Tanto en células vivas, dispositivos artificiales o colonias de abejas, podemos encontrar un tipo característico de orden hexagonal y es lo que se conoce como empaquetamiento compacto y es de hecho el más efectivo para acomodar el mayor número de objetos (un máximo) en el menor espacio (un mínimo).
¡Parece que la naturaleza supiera cálculo!

INDICADORES DE LOGRO

- Plantea y desarrolla correctamente problemas que involucran máximos o mínimos de funciones reales
- Diseña y construye instalaciones agropecuarias, aplicando correctamente los máximos o mínimos de funciones
- Manifiesta curiosidad intelectual **(CREATIVIDAD)**
- Combina, elige y extrapola la información que posee para resolver problemas de su vida cotidiana
- Demuestra empatía (participación activa, y por lo general emotiva, de una persona en una realidad ajena) hacia las ideas diferentes a las suyas
- Posee capacidad de análisis y síntesis

En esta guía, además de los problemas sobre máximos y mínimos, trataremos la C.L.G CREATIVIDAD, que es "el proceso de presentar un problema a la mente con claridad (ya sea imaginándolo, suponiéndolo, meditándolo, visualizándolo, comparándolo, etc.) y luego brindar o inventar una idea, concepto, noción o esquema según líneas nuevas o no convencionales. Supone el estudio y la reflexión antes de la acción".

"Es la capacidad de ver nuevas posibilidades y hacer algo al respecto, ir más allá del análisis de un problema o intentar poner en práctica una solución, produciendo un cambio. El ser creativo conlleva a ser productivo".

"Creatividad es la capacidad de ver nuevas posibilidades y hacer algo al respecto. Cuando una persona va más allá del análisis de un problema e intenta poner en práctica una solución se produce un cambio. Esto se llama creatividad: ver un problema, tener una idea, hacer algo sobre ella, tener resultados positivos. Los miembros de una organización tienen que fomentar un proceso que incluya oportunidades para el uso de la imaginación: experimentación y acción".

Como uno de los propósitos en el grado 11 es formular nuestro proyecto de vida, haremos en esta guía unas consideraciones sobre ¿cuál será mi trabajo en el futuro?

Estemos, pues, atentos a las sugerencias que se hagan sobre esta competencia.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero la siguiente información. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

Para calcular el área de un triángulo se usa: AreaTriángulo = $\frac{Base\ x\ Altura}{2} = \frac{bh}{2}$. De manera similar, escribo las fórmulas para hallar el área de: el rectángulo, el cuadrado, el triángulo equilátero en función del lado, el círculo, el trapecio, el rombo, la esfera, el área lateral y total del cilindro, el área lateral y total del cono.

¿Qué otras formas puedo utilizar para calcular el área de las figuras indicadas? Comparto mi respuesta con las de otros compañeros y adoptamos las más eficientes. Para hallar el perímetro de un triángulo, basta expresar la suma de sus lados, así:

Perímetro = a + b + c. Similarmente, escribo el perímetro de: el rectángulo, el cuadrado, el círculo (la circunferencia).

Para calcular el volumen del paralelepípedo (una caja) se utiliza la fórmula:
V = largo x ancho x altura =lah. De forma similar, escribo las fórmulas para calcular el volumen de: el cubo, el cilindro, el cono, la esfera.

La vivencia nos permite actualizar conocimientos importantes para la vida laboral, ya que generalmente se requieren a todo momento. La persona que pueda realizar acertadamente este tipo de cálculos, desempeña con mayor seguridad un trabajo o toma decisiones sobre su propia empresa.

Si tengo dificultades para obtener los resultados, consulto la información en las fuentes adecuadas.

B

Analizo y reflexiono sobre lo siguiente:

La sinéctica es una disciplina que desarrolla métodos o estrategias cuyo propósito es desarrollar la creatividad y la productividad.

- La creatividad está latente en casi todas las personas en grado mayor que el que generalmente se cree.
- Cuando se trata de creatividad e inventiva, lo emocional y no racional es tan importante como lo intelectual y lo racional.
- Muchas de las mejores ideas nacen cuando no se está pensando conscientemente en el problema que se tiene entre manos. La inspiración surge durante un período de “incubación”, como cuando un hombre está manejando camino al trabajo o regando su jardín o jugando.

El desarrollo de la creatividad es determinante en la decisión que deben tomar las personas para enrutar su vocación en su proyecto de vida lo que les permitirá ser exitosos en lo laboral.

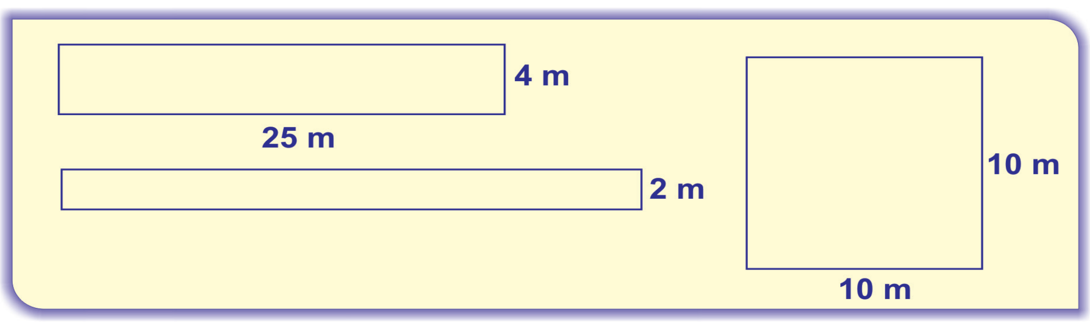
CUALIDADES DE LA PERSONA CREATIVA

Aunque no existe un modelo bien definido de las personas creadoras, todas presentan ciertas similitudes como:

- Manifiestan una gran curiosidad intelectual.
- Tienen en sus mentes amplia información que pueden combinar, elegir y extrapolar para resolver problemas.
- Demuestran empatía hacia la gente y hacia las ideas divergentes.
- No están pendientes de lo que los otros piensan sobre ellos y se hallan bastante liberados de restricciones e inhibiciones convencionales.
- Poseen capacidad de análisis y síntesis.
- Poseen capacidad de redefinición, es decir para reacomodar ideas, conceptos, gente y cosas, para trasponer las funciones de los objetos y utilizarlas de maneras nuevas.

Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde y si es preciso, elaboro diagramas e intento resolver por mis propios medios los ejercicios propuestos.

Sean los rectángulos que se muestran en la figura y que representan tres lotes de terreno que se desea cercar con alambrina. ¿En cuál de los rectángulos se gasta menos alambrina? Si se busca el perímetro en cada caso se ve que para uno es de 58 metros; para otro es 104 metros y para el otro es de 40 metros. Es evidente que el más económico es el de 40 metros (el cuadrado de lado 10m).



El hecho de maximizar o minimizar una magnitud es una de las aplicaciones más importantes que tiene el cálculo diferencial y cuya utilidad en cuestiones de economía es innegable, toda vez que un arquitecto, por ejemplo puede diseñar el edificio más económico y con máxima capacidad, una constructora de envases puede diseñar un recipiente de mínimo costo y máximo volumen, etc., como lo comprobaremos a través de ejemplos. Como no existe una regla general aplicable a todos los casos, los siguientes pasos permitirán resolver con éxito algunos problemas sencillos:

1) Si es posible, se construye un gráfico aproximado acorde con las condiciones del problema.

2) Se identifica la magnitud que se desea extremar y se expresa a través de la variable o variables que intervienen en el problema.

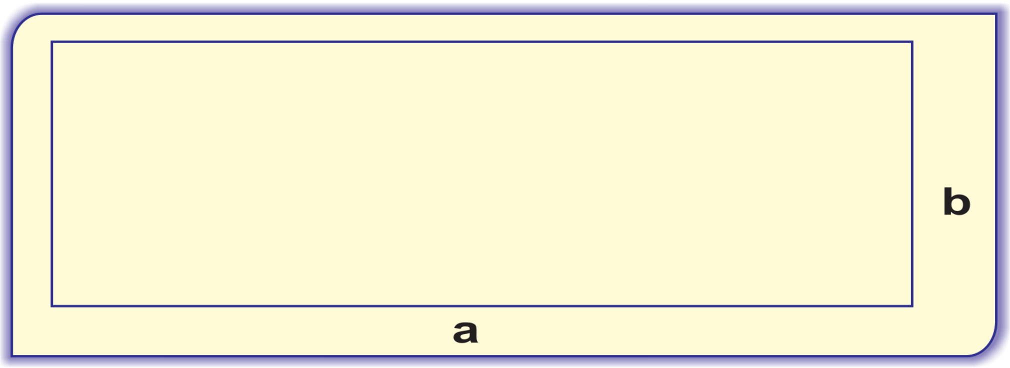
3) Si en la relación anterior hay más de una variable, el enunciado siempre aporta los datos suficientes para plantear una nueva relación que permita ligar las variables que intervienen.

4) Se sustituye una de las variables en la relación planteada en el punto 2, logrando de este modo expresar la función que se va a extremar a través de una sola variable.

5) Se calculan los máximos o los mínimos a la función transformada.

Ejemplo 1: el perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Calcular sus dimensiones para que el área sea máxima (es el problema que ya se resolvió por ensayo y error, al iniciar esta sección).

Paso 1: la gráfica.



Paso 2: se desea extremar (hacer máxima en este caso) el área A del rectángulo. Luego: A = ab. La función A queda expresada a través del largo **a** y del ancho **b** del rectángulo.

Paso 3: como en la ecuación anterior hay más de una variable, es preciso buscar la relación que existe entre las dos variables usando los datos del problema. Esa relación es el perímetro P. Luego: P = 2a + 2b = 40, entonces a + b = 20; si despejamos una de las variables (a, por ejemplo), así: a = 20 - b.

Paso 4: se reemplaza el valor de a en la ecuación obtenida en el paso 2, así:
$A = (20 - b)*b$, entonces $A = 20b - b^2$ que es el área del rectángulo expresada a través de la variable **b.**

Paso 5: se calculan los extremos de la función anterior. Luego:

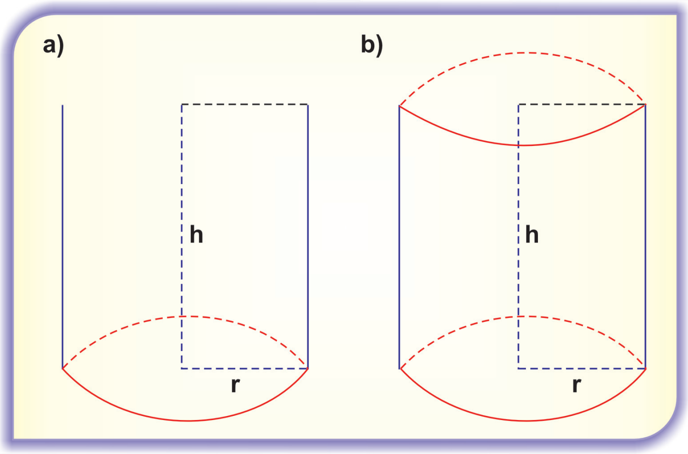
$A' = 20 - 2b$
$20 - 2b = 0$ entonces $b = 10$. Si se reemplaza en la relación obtenida en el paso 3, resulta: $a = 20 - 10 = 10$.

Por tanto las dimensiones buscadas son largo = 10 m y ancho = 10 m, es decir se trata de un cuadrado cuya área es 10 m * 10 m = 100 metros cuadrados.

Para probar que para el valor crítico b = 10 la función A presenta un máximo, calculamos la segunda derivada: $A'' = -2b^o$ y reemplazamos el valor de **b**:
$A'' = -2(10^o) = -2 < 0$, entonces para b = 10 la función presenta un máximo cuyo valor es $A = 20(10) - 100 = 100$ metros cuadrados.

Ejemplo 2: se desea construir un recipiente cilíndrico de hojalata cuya capacidad sea de 64 centímetros cúbicos. Determinar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material requerida en su construcción sea la menor posible, suponiendo que: a) El recipiente es abierto por encima; b) El recipiente es cerrado.

Paso 1: la gráfica para las dos situaciones planteadas es:



Paso 2: se desea extremar (hacer mínima en este caso) el área A del cilindro. En la parte a) lo consideramos sin tapa y por tanto se deben tomar el área lateral y el área de una base. Luego: $A = 2\pi rh + \pi r^2$La función A queda expresada a través del radio r y de la altura h.

Paso 3: como en la ecuación anterior hay más de una variable, es preciso buscar la relación que existe entre las dos variables, que en este caso es el volumen del cilindro, pues $V = \pi r^2 h = 64$ y de aquí podemos despejar h, por ejemplo, para obtener: $h = \dfrac{64}{\pi r^2}$

Paso 4: se reemplaza el valor de h en la ecuación obtenida en el paso 2, así:

$A = 2\pi r\left(\dfrac{64}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 \Rightarrow A = \dfrac{128}{r} + \pi r^2$, que es el área del cilindro expresada en función del radio r.

Paso 5: se calculan los extremos de la función anterior. Luego: $A' = 2\pi r - \dfrac{128}{r^2}$

$2\pi r - \dfrac{128}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 - 128 = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{64}{\pi} \Rightarrow r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$. Si se reemplaza en la relación obtenida en el paso 3, resulta: $h = \dfrac{64}{\pi\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} \Rightarrow h = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

Por tanto las dimensiones buscadas son $r = h = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\, cm$. Para probar que se trata de un mínimo el valor del radio en la segunda derivada de la función:

$A'' = 2\pi + \dfrac{256}{r^3}$. Como $r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, al reemplazar este valor positivo en A″ resulta mayor que cero y por tanto hay un mínimo para el valor crítico de r.

Para la posibilidad b) el paso 1 ya está dado en el caso anterior.

Paso 2: la magnitud que se va a extremar es también el área y para expresar la función basta agregar al área la superficie de la tapa, es decir: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Paso 3: es igual al paso 3 anterior, pues la relación que liga las variables r y h es el mismo volumen.

Paso 4: si se reemplaza el valor de h, queda: $A = 2\pi r(\dfrac{64}{\pi r^2}) + 2\pi r^2 \Rightarrow A = 2\pi r^2 + \dfrac{128}{r}$, que es el área del cilindro expresada en función del radio r.

Paso 5: se hallan los extremos de la función anterior:

$$A' = 4\pi r - \frac{128}{r^2}$$

$$4\pi r - \frac{128}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 128 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{32}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

$$h = \frac{64}{\pi(\sqrt[3]{\frac{32}{\pi}})^2} = \frac{64}{\pi\sqrt[3]{\frac{32^2}{\pi^2}}} = 4\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}.$$ Luego las dimensiones del cilindro son

Radio $r = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ cm y altura $h = 2r = 4\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ cm.

Para probar que se trata del área mínima buscamos la segunda derivada y sustituimos por el valor crítico $r = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$. En efecto: $A'' = 4\pi + \dfrac{256}{r^3}$: luego, $A'' = 4\pi + \dfrac{256}{(2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}})^3}$ resulta mayor que cero y por tanto el área se hace mínima.

Ejemplo 3: hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y en forma tal que el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

Paso 1: sean X e Y los dos números.

Paso 2: se desea extremar (hacer máximo en este caso) el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, o sea: $P = X^2 Y^3$.

Paso 3: como en la función anterior hay dos variables, X e Y, es preciso buscar la relación que las liga, que para el efecto es la suma de los dos números:
X + Y = 20. Si despejamos X, por ejemplo, queda: X = 20 - Y.

Paso 4: se reemplaza el valor de X en la función P obtenida en el paso 2:
$P = (20 - Y)^2 Y^3 \Rightarrow P = (400 - 40Y + Y^2)Y^3$

$P = 400Y^3 - 40Y^4 + Y^5$

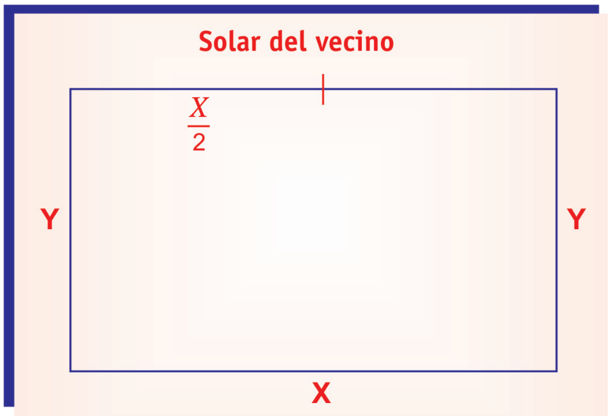
Paso 5: se hallan los máximos o mínimos de la función anterior:
$P' = 1200\,Y^2 - 160\,Y^3 + 5\,Y^4$ (Se busca la derivada de P respecto de Y)
$1200\,Y^2 - 160\,Y^3 + 5Y^4 = 0 \Rightarrow 240Y^2 - 32Y^3 + Y^4 = 0$
$Y^2(240 - 32Y + Y^2) = 0 \Rightarrow Y^2(Y - 12)(Y - 20) = 0$. Luego:

Y = 0 ó Y = 12 ó Y = 20. Los valores críticos 0 y 20 deben descartarse porque en cualquiera de los casos el producto sería cero. Por tanto, si Y = 12 reemplazamos en el paso 3: $X = 20 - 12 = 8$.

Para probar que cuando Y = 12 la función P presenta un máximo, sustituimos el valor crítico 12 en la segunda derivada de la función, así:
$P'' = 2400Y - 480Y^2 + 20Y^3$ entonces P'' = 2400(12) - 480(144)+20(1728)
entonces P'' = -5820 que es menor que cero y por tanto la función P presenta un valor máximo.

Ejemplo 4: una parcela rectangular ha de proyectarse al lado del solar de un vecino y ha de tener un área de 10800 metros cuadrados. Si el vecino conviene en pagar la mitad de la cerca medianera, ¿cuáles deben ser la dimensiones de la parcela para que el costo de cercarla sea, para el dueño, el mínimo?

Paso 1: se elabora la gráfica:



Paso 2: la magnitud que debe extremarse es la longitud que se va a cercar, o sea:

$L = 2Y + X + \frac{X}{2}$ (Recuérdese que el vecino paga la mitad de la cerca medianera).

Paso 3: como en la función anterior hay dos variables X e Y, debe buscarse la relación que las liga para poder eliminar una de ellas. Si el área del rectángulo es conocida, entonces: XY = 10800, entonces $Y = \frac{10800}{X}$.

Paso 4: reemplazamos el resultado anterior en el paso 2: $L = 2(\frac{10800}{X}) + \frac{3X}{2}$, en donde la función L aparece expresada en función de X.

Paso 5: se calculan los máximos o mínimos de la función transformada.

$L' = \frac{3}{2} - \frac{21600}{X^2}$ (Derivada de la función)

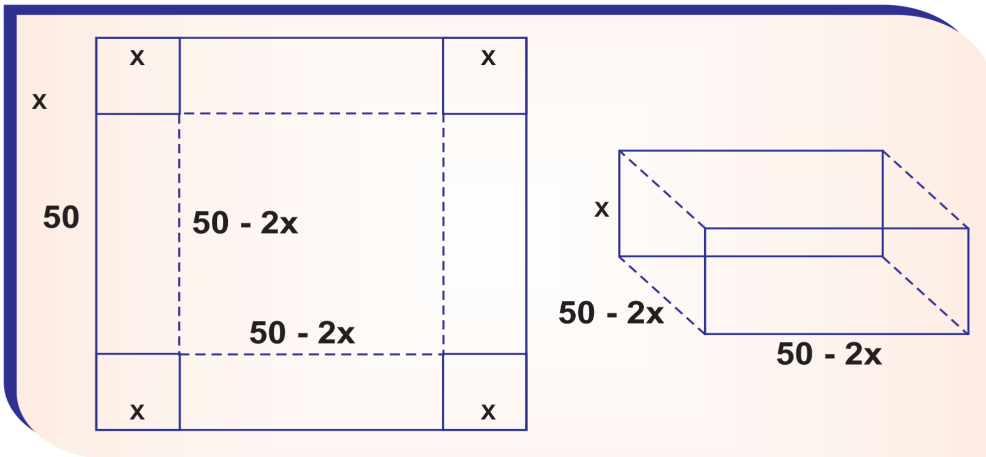
$\frac{3}{2} - \frac{21600}{X^2} = 0 \Rightarrow 3X^2 - 43200 = 0 \Rightarrow X^2 = 14400 \Rightarrow X = \pm 120$.

Si se toma la raíz positiva, X = 120, entonces Y = 90 (Reemplazando en el paso 3).

Luego, las dimensiones son 120 metros x 90 metros.
Para probar que para el valor crítico X = 120 la función presenta un mínimo, sustituimos el 120 en la segunda derivada, así: $L'' = \frac{43200}{X^3}$, entonces $L'' = \frac{43200}{120^3}$ que resulta mayor que cero y por tanto la función L presenta un mínimo.

Ejemplo 5: de una pieza cuadrada de hojalata de lado 50 centímetros, se desea construir una caja, abierta por arriba, del mayor volumen posible, cortando de las esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba la hojalata para formar las caras laterales. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

Paso 1: gráficamente, el enunciado se representa así:



Paso 2: lo que se va a extremar (hacer máximo) es el volumen de la caja, o sea: $V = (50 - 2X)^2 X \Longrightarrow V = 2500X - 200X^2 + 4X^3$

Paso 3: no se requiere porque la función V está expresada a través de una sola variable.

Paso 4: se calculan los máximos o mínimos de la función V:

$V' = 2500 - 400X + 12X^2$ V′	(Derivada de V respecto de x)
$2500 - 400X + 12X^2 = 0$	Se iguala a cero para buscar los valores críticos.
$3X^2 - 100X + 625 = 0$	(Dividiendo por 4)
$(3X)^2 - 100(3X) + 18755 = 0$	
$3X^2 - 100X + 625 = 0$	
$(3X - 75)(3X - 25) = 0$	
$3X - 75 = 0$ entonces $X = 25$	
$3X - 25 = 0$ entonces $X = \frac{25}{3}$.	

La primera raíz se descarta porque si X = 25 en tal caso la hojalata se agotaría y no quedaría material para construir la caja.

Si $X = \frac{25}{3}$, el volumen de la caja se hace máximo y tomaría un valor de:

$V = (50 - 2*\frac{25}{3})^2 * \frac{25}{3} \Rightarrow V = \frac{250000}{27} cm^3$ En efecto: V'' = 24X -400 y reemplazando por el valor crítico $\frac{25}{3}$ se tiene: V'' = 24* - 400 = - $\frac{800}{3}$, valor menor que cero y por tanto hay un máximo.

Luego cada cuadradito tiene un lado $X = \frac{25}{3}$.

Guiándome por mis apuntes y por los ejercicios resueltos, desarrollo concienzudamente los siguientes problemas, discuto mis resultados con los compañeros del subgrupo y con el profesor para corregir posibles fallos.

Es muy posible que en el campo laboral a usted se le proponga desempeñarse en actividades de elaboración de recipientes para empacar alimentos (potes cilíndricos, cajas, etc.). Para un buen desempeño necesita: aplicar con propiedad las derivadas para el cálculo de valores máximos o mínimos de una función y fundamentalmente se le exigirá gran creatividad en el diseño y producción, por ejemplo de empaques más económicos o de mayor capacidad, lo que contribuirá a que su desempeño laboral sea exitoso.

1) Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y de tal modo que: a) Su producto sea máximo; b) La suma de sus cuadrados sea mínima.

2) Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de 5 centímetros de radio.

3) Se desea construir una caja de madera de base cuadrada de 108 decímetros cúbicos de volumen. La parte de arriba debe estar abierta. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que la cantidad de material empleada en su construcción sea mínima?

4) Se desea construir una caja paralelepípeda, abierta por encima, con una hoja rectangular de cartón de dimensiones 8 dm x 15 dm, recortando de las esquinas un pequeño cuadradito. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?

5) Una etiqueta impresa debe contener 50 cm^2 de texto con un margen de 4 cm arriba y abajo y de 2 cm a los lados. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja de papel de modo que su área sea mínima?

6) Hallar los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 20 cm para que engendre un cono de volumen máximo al girar alrededor de uno de sus catetos.

7) Determinar las dimensiones de un cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio 10 centímetros. (Ver figura 1, al final de los enunciados).

8) Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 centímetros de radio. (Ver figura 2, al final de los enunciados).

9) En un instante determinado, un barco B en altamar, se encuentra a 65 kilómetros al ESTE de otro barco A. El barco B comienza a navegar hacia el OESTE con una velocidad de 10 Km/hora, mientras que el barco A se desvía hacia el SUR con una velocidad de 15 Km/hora. Si las rutas iniciales no se modifican, calcular el tiempo transcurrido hasta que la distancia que los separa sea mínima. Hallar además la distancia a que se encuentran. (Ver figura 3, de la siguiente gráfica).

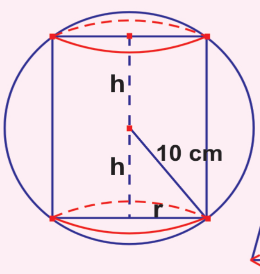


Figura 1

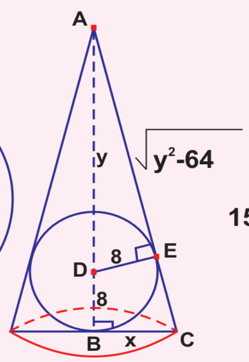


Figura 2

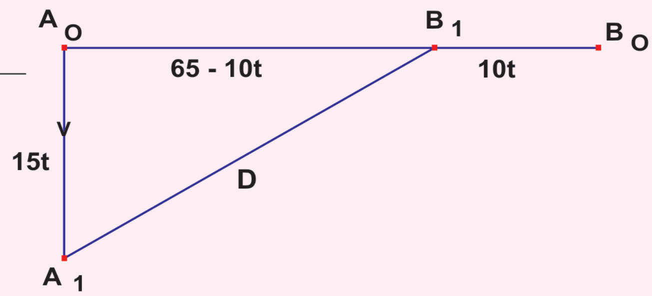


Figura 3

ALGUNAS ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR LA CREATIVIDAD

- Dividan al subgrupo en dos, luego uno de ellos lista una serie de seres vivientes y el otro hace una lista de cosas. Ahora, ambos grupos leen el primer término (uno podría decir “elefante” y el otro diría “lápiz”), luego formulen la pregunta: ¿qué le dice el elefante al lápiz? Esperen respuestas y después continúen con el siguiente par de términos y así sucesivamente. Discutan creativamente sus respuestas, así resulten situaciones absurdas. Todo redundará en el fortalecimiento de la competencia.

- Muchas de las grandes innovaciones, inventos, mejoras, avances, empezaron como un “sueño”. ¿Acaso no ha escuchado a aquellos que después de haber logrado algo con mucho éxito expresan que les parecía un sueño?

Resuelvo las siguientes situaciones:

a) ¿Cómo me agradaría que fuera mi institución, comunidad o país?

b) ¿Qué cambios haría si hoy fuera elegido docente, director o presidente de la república?

c) Escribo 5 deseos que me agradaría que se realicen.

D

Como comprobación de mis avances, planteo y resuelvo los siguientes problemas de aplicación.

a. Un granjero desea cercar con una alambrada su parcela, la cual es un campo rectangular de 5000 metros cuadrados de área y uno de cuyos bordes lo constituye el cauce de un río (supuesto linealmente en esa parcela). Si no es preciso cercar la parte que está limitada por el río, calcular: a) Las dimensiones de la parcela para que el costo de cercarla sea el más económico; b) ¿Qué cantidad de alambre debe adquirir si desea colocarle 6 hiladas de alambre de púas?

b. Un campesino dispone de 100 metros de malla metálica y con ella desea hacer un cercado utilizando una pared y cerrando sobre ella un rectángulo. ¿Qué dimensiones debe dar al rectángulo para que el área cercada sea la más grande posible?

c. Suponga que usted tiene una microempresa que produce bocadillos de guayaba que tienen la forma de un paralelepípedo de 4 cm de largo, 3 cm de ancho y 1 cm de espesor. Diseñe una caja de cartón de base cuadrada, con tapa, que permita empacar 2 docenas de bocadillos y de tal manera que se requiera la menor cantidad posible de material, es decir, la caja que resulte la más económica.

Comparta sus respuestas con otros compañeros y, si es posible, asóciense para desarrollar estos problemas en la vida real. Discutan sus proyectos con el profesor para estimar su factibilidad.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA