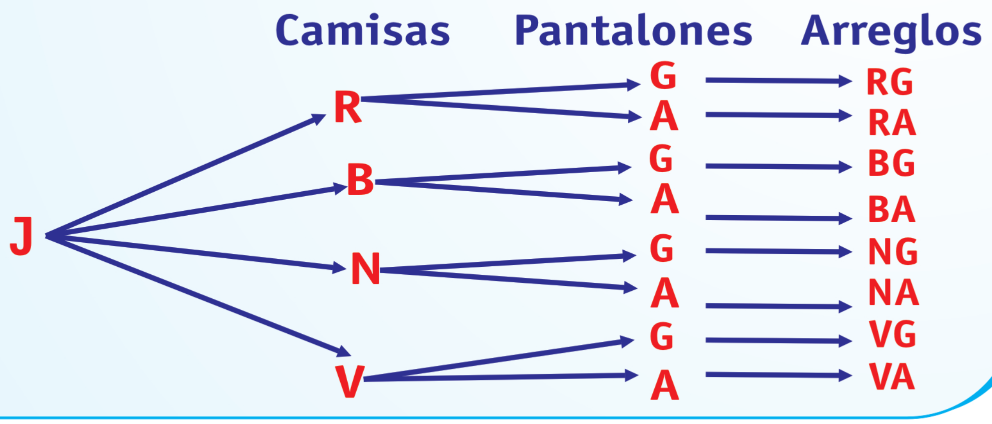
Guía 3

LA TEORÍA COMBINATORIA

Un joven dispone de cuatro camisas de colores: roja (R), blanca (B), negra (N) y verde (V); también tiene dos pantalones: gris (G) y azul (A).
Para determinar el número de combinaciones de las camisas con los pantalones puede usar un diagrama arbolar como el siguiente:



INDICADORES DE LOGRO

- Interpreta el principio fundamental de conteo y lo aplica correctamente para calcular ciertos arreglos de los elementos de un conjunto
- Define el concepto de permutación de los n elementos de un conjunto tomando r objetos cada vez y lo usa adecuadamente para resolver problemas de aplicación
- Define las combinaciones de los n elementos de un conjunto considerados en grupos de r objetos y las usa correctamente para resolver problemas de aplicación
- Identifica problemas, causas y consecuencias y establece una definición de éste.
  SOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- Aporta soluciones y evalúa alternativas
- Ejecuta en la medida de sus posibilidades, acciones que contribuyen a la solución
- Hace seguimiento a la solución y retroalimentación

A

Con un compañero analizamos y respondemos las siguientes cuestiones:

Dado un número natural n, ¿qué es el factorial de n y como se simboliza?
Calculamos 5! y 8!

B

Con los compañeros del subgrupo, leemos y analizamos la información que se presenta a continuación y respondemos las preguntas que encontremos. Si es preciso, copiamos los problemas resueltos.

Para iniciarnos en el tema veremos situaciones como las siguientes:

1) Una compañía de transportes que presta sus servicios en 100 poblaciones desea imprimir sus tiquetes de tal manera que en cada uno aparezca el nombre de la población que lo expide y el nombre de la población a que se destine. ¿Cuántos grupos de boletos se deben imprimir?

2) En Colombia, las placas de las motocicletas deben llevar 3 letras y un número de dos dígitos. Sin considerar CH, LL, RR, ¿cuántas placas distintas se pueden fabricar con ese diseño?

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO

Si un primer suceso puede verificarse de m1 modos diferentes y si después de haber ocurrido éste, puede verificarse un segundo suceso de m2 maneras diferentes, entonces los dos sucesos pueden verificarse en el orden mencionado de m1*m2 modos distintos.

Usando este principio se pueden solucionar los problemas planteados antes. En efecto:
En el planteo 1): Un tiquete, generalmente, indica el punto de origen y el punto de destino, es decir: De ________________ A ______________. En e ste caso, el nombre de la población de origen debe aparecer en el primer espacio en blanco; puesto que hay

100 poblaciones entre las cuales escoger, el hecho puede ocurrir de 100 modos diferentes. Luego m1=100. Después de escoger el primer nombre, quedan 99 posibilidades de elección para llenar el segundo espacio en blanco. Luego m2=99. Por el principio fundamental de conteo, el número de grupos de boletos que deben imprimirse es de m1*m2=100*99=9900.

Si el problema involucra más de dos sucesos, se puede ampliar el principio fundamental de conteo así: si después de haber ocurrido los dos primeros sucesos, puede ocurrir un tercero de m3 modos diferentes, un cuarto de m4 modos distintos y un enésimo de mn modos distintos, entonces los n sucesos pueden ocurrir de m1*m2*m3*m4*....*mn modos diferentes.

Ahora, se puede resolver el planteo 2). Como no hay restricciones, se pueden repetir letras o dígitos más de una vez en cada placa y por tanto BBB 22 es permitido. Ahora, la primera posición de las letras se puede llenar de m1=27 modos distintos; la segunda posición de m2=27 maneras diferentes y la tercera posición de m3=27 modos distintos. Puesto que cualquiera de los dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) se pueden usar en las otras dos posiciones, m4=10 y m5=10. Por tanto el número de placas posibles es:
m1*m2*m3*m4*m5 = 27*27*27*10*10 = 1968300

3) Para el enunciado anterior, determinar el número de placas posibles si una letra o un dígito no aparecen repetidos.

   En este caso, el primer lugar se puede llenar de 27 maneras distintas; como no se pueden repetir letras, la segunda posición sólo se puede llenar de 26 modos distintos y por idéntica razón, la tercera posición únicamente se puede llenar de 25 maneras diferentes; la primera cifra del número se puede llenar de 10 modos distintos, pero la segunda cifra sólo se puede llenar de 9 modos distintos. Por lo tanto, número placas distintas y con la restricción impuesta es:
   m1*m2*m3*m4*m5=27*26*25*10*9 = 1579500.

Con 15 jóvenes de su grupo, ¿Cuántos equipos de básquetbol, distintos, pueden formarse?

LAS PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS DIFERENTES TOMADOS EN GRUPOS DE r ELEMENTOS

Los problemas que tienen que ver con placas de identificación, como en los dos últimos problemas, comprenden la ordenación de cinco caracteres o símbolos colocados horizontalmente. Si los caracteres son diferentes, como en ANM43, toda ordenación de ellos, con la condición de que las letras se coloquen primero, conforma un número de placa válido. Esta situación permite aseverar que "toda ordenación de los n elementos de un conjunto, se llama **permutación** del conjunto".

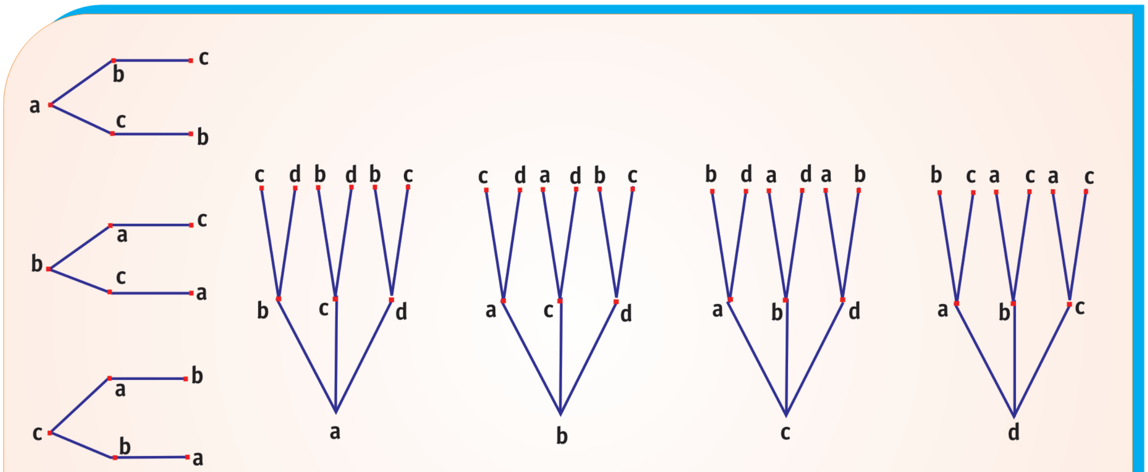
Por ejemplo, sean las letras a, b y c.

Las permutaciones unarias que podemos formar con ellos son a, b y c.

Las permutaciones binarias que podemos formar son ab, ac, ba, bc, ca y cb (para obtenerlas se agregan a las unarias cada uno de los otros elementos).

Las permutaciones ternarias que se pueden formar son abc, acb, bac, bca, cab y cba (resultan de agregarle a las binarias cada uno de los otros elementos).

En ocasiones resulta útil elaborar diagramas arbolares para mostrar las permutaciones de los elementos de un conjunto, como se ve en la figura:



A LA IZQUIERDA SE VE EL DIAGRAMA ARBOLAR PARA LAS PERMUTACIONES TERNARIAS DE 3 ELEMENTOS a, b, y c, A LA DERECHA, Y EN FORMA VERTICAL, LAS PERMUTACIONES TERNARIAS DE 4 ELEMENTOS a, b, c, d.

Para indicar las permutaciones de n elementos tomados en grupos de r objetos se escribe $_nP_r$. Como en la ordenación no se repiten elementos, el primer lugar se puede llenar de n modos; una vez llena esta posición quedan n-1 elementos para llenar la segunda; hecho esto, quedan n-2 elementos para llenar la tercera, y así sucesivamente hasta n - (r - 1) = n -r + 1 modos de llenar la posición r, es decir:

(1) $_nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-1+r)$.

Para continuar, se debe recordar que $n! = n(n-1)(n-2)(n-3).....2*1$, que se lee "n factorial es igual n por n-1 por n-2 por...por 2 por 1", o sea que el factorial de n es el producto de los n primeros números naturales. Así: 3! = 3*2*1 = 6;

5! = 5*4*3*2*1 = 120. Se acepta que 1! = 0! = 1.
Obsérvese que 6! = 6*5*4! y 8! = 8*7!, lo que nos permite afirmar que:
n! = n(n-1)(n-2)....(n - r + 1)(n - r)! Por tanto si la expresión (1) la multiplicamos

por $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$ la igualdad no se altera y en consecuencia:

(2) ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-1+r) * \frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$, fórmula que permite calcular

el número de permutaciones de n elementos tomándolos en grupos de r objetos.
Ejemplos:

$${}_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6*5*4*3*2!}{2!} = 360$$

$${}_{11}P_5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11*10*9*8*7*6!}{6!} = 55440$$

Problema 1: seis personas entran a una sala en la que hay diez sillas. ¿De cuántas maneras pueden ocupar las sillas?

Solución: el problema se reduce a calcular las permutaciones de 10 considerando grupos de 6, o sea:

$${}_{10}P_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4!}{4!} = 151200$$

Problema 2: ¿cuántos números distintos de 4 cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3 y 4?

Solución: se trata de determinar las permutaciones de las 4 cifras tomándolas en grupos de a 4, es decir:

$${}_4P_4 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4*3*2*1}{1} = 24$$

Problema 3: ¿de cuántas maneras diferentes pueden ordenarse las letras de la palabra DUPLETA?

Solución: se trata de encontrar las permutaciones de las 7 letras (todas distintas) en grupos de 7 elementos, así:

$$_7P_7 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{7!}{(7-7)!} = \frac{7!}{0!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{1} = 5040$$

Problema 4: ¿de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra ARACATACA?

Solución: el problema es similar al anterior, pero algunas letras están repetidas (la A 5 veces y la C en 2). Por tanto, el resultado de la permutación de las 9 letras en grupos de a 9, debe dividirse entre los factoriales del número de veces de las repeticiones

(5! y 2! en este caso), o sea:

$_9P_9 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{9!}{(9-9)!} = \frac{9!}{0!} = \frac{9*8*7*6*5*4*3*2*1}{1} = 362880$, pero las letras de cada grupo tienen que ser todas distintas. Por tanto:

Número ordenaciones $= \frac{362889}{5!*2!} = \frac{362880}{240} = 1.512$, que es la respuesta.

Ejemplo 5: con las cifras 1, 2, 6, 8, 5, ¿cuántos números de 3 cifras que empiecen por 5 se pueden formar?

Solución: como el 5 estará siempre al principio de cada número, entonces cada uno tendrá la forma 5NN. Por lo tanto n=5 - 1 = 4 y r= 3 - 1=2. En consecuencia,

$$_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Con las cifras 3, 4, 5, 6 ¿cuántos números distintos se pueden formar? Ayúdense de un diagrama arbolar para la solución.

COMBINACIONES

El problema de hallar el número de modos en que los elementos de un conjunto se pueden separar en subgrupos tales que si dos de ellos tienen igual número de elementos, se diferencien por lo menos en un elemento, es una combinación. Por ejemplo, con las letras a, b, c y d se pueden formar:

Combinaciones monarias: a, b, c, d (se toman de a 1).
Combinaciones binarias: ab, ac, ad, bc, bd, cd (se obtienen escribiendo a la derecha de cada letra todas las letras siguientes, de una en una.

Combinaciones ternarias: abc, abd, acd, bcd (Resultan de escribir a la derecha de cada binaria, una a una, las letras que siguen a la última de cada binaria.

Para indicar las combinaciones de n elementos tomándolos en grupos de r objetos se indica por ${}_nC_r$ y se pueden calcular mediante la expresión:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ .$$

Ejemplo: ${}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10*9*8*7*6!}{6!*4!} = 210$

Problema: ¿Cuántos comités de 8 personas se pueden formar con un conjunto de 50 personas?

Solución: el problema se resuelve buscando los grupos de 8 personas que pueden obtenerse de las 50 personas, o sea:

$${}_{50}C_8 = \frac{50!}{8!(50-8)!} = \frac{50!}{8!*42!} = \frac{50*49*48*47*46!*45*44*43*42!}{8!*42!}$$

${}_{50}C_8 = 536878650$ comités.

Problema: usted tiene una microempresa y desea darles empleo a 6 mujeres y a 4 hombres. ¿De cuántos modos puede hacer la selección del personal si los solicitantes son 9 mujeres y 6 hombres?

Solución: las mujeres pueden ser seleccionadas de ${}_9C_6$ y los hombres de ${}_6C_4$ modos. Por el principio fundamental de conteo, la selección puede hacerse de ${}_9C_6 * {}_6C_4$ Luego:

$${}_9C_6 * {}_6C_4 = \frac{9!}{6!(9-6)!} * \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{9!}{3!*4!*2!} = 1260$$

OBSERVACIÓN: para diferenciar en la resolución de un problema y determinar si es una permutación o una combinación se procede así: se forma un grupo cualquiera, según el enunciado del problema y con los mismos elementos de ese grupo se trata de formar otro grupo, si se consigue formar otro grupo diferente, el problema en cuestión es una permutación. Si no es posible formar otro grupo, se trata de una combinación.

Ejemplo 1: ¿cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Supongamos el número 375 y con estas mismas cifras tomemos, por ejemplo, el 753. Como los dos números son diferentes, entonces es una permutación de 7 elementos tomándolos de a 3. Luego: ${}_7P_3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 210$

Ejemplo 2: con las mismas cifras del problema anterior, ¿cuántas sumas, de 3 sumandos pueden formarse?

Tomemos, por ejemplo $5 + 3 + 4 = 12$; con los mismos elementos, hagamos otra suma: $4 + 5 + 3 = 12$. Como los resultados son iguales, se trata de una combinación de 7 elementos tomados de a 3. Por tanto, ${}_7C_3 = \dfrac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$

Para comprobar el avance en el conocimiento e interiorizar conceptos, con los compañeros del subgrupo desarrollamos lo siguiente, comparamos los resultados con los de otros subgrupos, discutimos hasta ponernos de acuerdo y compartimos con el profesor.

1. En una carrera de 100 metros planos participan 12 atletas. ¿De cuántas formas distintas podrán ser premiados los tres primeros lugares con medalla de oro, plata y bronce? (1320).

2. ¿Cuántas credenciales se pueden formar si el número de identificación de cada una consiste de una de las letras del alfabeto seguida de un número de tres dígitos? (27000).

3. ¿Cuántas credenciales de las del problema anterior no tienen dos dígitos iguales y el primero de los dígitos es diferente de cero? (13608).

4. ¿Cuántos grupos en los que haya una ficha blanca, una azul y una verde se pueden seleccionar de 15 fichas blancas, 18 azules y 6 verdes? (1620).

5. ¿Cuántos ramos de 4 especies diferentes de flores, se pueden formar con 7 gladiolos, 10 jacintos, 21 rosas y 14 margaritas? (20580).

6. En una reunión hay 10 mujeres y 7 hombres. ¿Cuántos grupos pueden formarse en los que estén presentes 5 mujeres y 4 hombres? (8820).

7. Se tienen 7 personas para formar comisiones de 3 personas:

    a) Si en las comisiones no hay jerarquía, es decir, todas desempeñan la misma labor, ¿cuántas comisiones distintas se pueden formar? (35).

    b) Si en las comisiones una misma persona tiene que estar presente, ¿cuántas son las comisiones que pueden formarse? (15).

D

Como aplicación a la teoría combinatoria, desarrollo los siguientes problemas de aplicación.

1. En nuestro medio una lotería premia a quien acierte un número de cuatro cifras y una de las 150 series. ¿De cuántos billetes consta la emisión de esa lotería?

2. El juego del baloto consiste en acertar 6 de los números que contienen unas balotas numeradas del 1 al 45 (que son pesadas y revisadas por organismos de control) y que son extraídas al azar por un mecanismo especial. ¿Cuántos formularios distintos pueden elaborarse?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA