GUÍA 3

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES E INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para fechar elementos tan antiguos como los hallados en las Pirámides de Egipto, los Arqueólogos han recurrido al método del Carbono Catorce, que se basa en la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt}=kN$, cuya solución se hace mediante el Cálculo Integral.

INDICADORES DE LOGRO

- Identifica las fracciones algebraicas propias e impropias
- Dada una fracción impropia, la expresa como la suma del cociente, más una fracción propia, mediante la división algebraica
- Establece y aplica correctamente los casos que pueden presentarse para convertir expresiones racionales en suma de fracciones parciales

- Integra expresiones racionales que pueden convertirse en sumas de fracciones parciales
- Maneja adecuadamente las principales identidades trigonométricas
- Selecciona las identidades adecuadas para transformar el integrando hasta convertirlo en una integral inmediata o en una que se pueda resolver por alguno de los métodos vistos
- Comprende, interpreta, analiza y produce diferentes tipos de textos según sus necesidades. **(COMUNICACIÓN)**
- Expresa con autonomía lo que quiere y lo que piensa en forma verbal y no verbal
- Usa un lenguaje verbal y no verbal adecuado al medio
- Demuestra respeto por los conceptos emitidos por los otros
- Reconoce la diferencia entre procesos de información y comunicación
- Identifica algunas características básicas que debe poseer la persona para el desempeño en el trabajo

Con los compañeros de subgrupo leemos, analizamos y comentamos el siguiente contenido.

En esta guía volvemos a analizar situaciones que se refieren a la **Competencia Laboral General COMUNICACIÓN,** debido a la vital importancia que tiene esta competencia en nuestro futuro, tanto en lo personal como en lo laboral, amén de facilitarnos nuestra interacción con quienes nos rodean.

El valor de la comunicación nos ayuda a intercambiar de forma efectiva pensamientos, ideas y sentimientos con las personas de nuestro entorno, en un ambiente de cordialidad y buscando el enriquecimiento personal de ambas partes.

Algunas personas tienen una conversación agradable y tienen la capacidad de comunicarse efectivamente y pueden aportar mucho con su conocimiento y experiencia, pero con la mala costumbre de no dar oportunidad a otros para expresar sus puntos de vista. Tengamos cuidado para no llegar a estos excesos.

La buena comunicación tiene algunas características como: escuchar con atención, no acaparar la palabra, evitar interrumpir, utilizar un lenguaje claro y moderado, lo cual demuestra educación y trato delicado hacia las personas. He aquí algunos elementos que mejoran nuestra comunicación:

a. Interés por la persona. Cuando una persona se acerca a nosotros es porque considera que tiene algo importante que decirnos; pongámosle toda la atención del caso, seamos corteses e intentemos hacer el momento más agradable.

b. Saber preguntar. Si al expresar las ideas se tiene dificultad para comprender el mensaje, ya sea por desconocimiento del tema, distracción, cansancio, no nos quedemos con la duda y pidamos aclaración de lo que nos parece incorrecto o equivocado para evitar situaciones incómodas que sólo dejan resentimientos.

c. Aprender a ceder. No debemos empecinarnos y llegar a pensar que tenemos la verdad revelada y en consecuencia creer de antemano que todas las personas deben plegarse a nuestros puntos de vista, y menos tratar de obligarlos a pensar como nosotros. La comunicación efectiva es comprensiva, condescendiente y conciliadora para obtener los mejores frutos y estrechar las relaciones interpersonales.

No existe medio más eficaz que la comunicación para hacer amistades, elegir a la pareja y estrechar los lazos familiares, profesionales y de amistad. Todos deseamos vivir en armonía. Por eso, este es el momento de reflexionar y decidirse a dar un nuevo rumbo hacia una mejor comunicación con quienes nos rodean.

A

Leo, analizo y resuelvo los interrogantes que a continuación se formulan para poder estudiar la integración por fracciones parciales y de algunas integrales trigonométricas. Si tengo dificultades, consulto en las fuentes adecuadas.

1) ¿Cómo se divide un polinomio entre otro? Doy ejemplos.

2) ¿Qué es factorizar? Propongo y resuelvo ejemplos en donde haya FACTOR COMÚN, DIFERENCIA DE CUADRADOS, SUMA o DIFERENCIA DE CUBOS, TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.

3) ¿Cómo se ejecuta la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma x - a de manera sintética? Propongo y resuelvo algunos ejemplos.

4) Usando cualquier método, probar que (2, 1) es la solución del sistema simultáneo:

(1) $4X - 11Y = -3$

(2) $6X + 7Y = 19$

5) Descomponga Sen^3x , Sen^4x y Sen^5x en dos factores de modo que uno de los exponentes sea múltiplo de 2.

6) Exprese Tan^2x en función de $Secx$ y Cos^2x a través de $Senx$.

7) Exprese $Cos2x$ a través de $Senx$ y de $Cosx$.

8) En las expresiones anteriores despeje senx y cosx, respectivamente y luego cambie el ángulo x por $\frac{x}{2}$ para obtener $Sen\frac{x}{2}$ y $Cos\frac{x}{2}$

9) Calcule $Sen2a$.

10) ¿La comunicación con mis compañeros en el colegio y con mis familiares ha sido la adecuada? Si he tenido dificultades, elaboro una lista de ellas y reflexiono sobre las posibles soluciones. Comparto con el subgrupo y con el profesor para tratar de beneficiarnos todos.

Leo, analizo e interpreto con un compañero de subgrupo, aplicando los conceptos de comunicación analizados en la presentación de la competencia, los conceptos que se describen a continuación. Escribo en mi cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde y si es preciso vuelvo a realizar los problemas propuestos y resueltos.

Recordemos que un polinomio en x es una función de la forma:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, en donde los coeficientes son constantes, $a_0 \neq 0$ y n un número entero positivo cualquiera, incluso 0.

Además, si dos polinomios DEL MISMO GRADO toman iguales valores numéricos para cualquier valor de la variable, entonces los coeficientes de los términos de igual grado, en ambos polinomios, son iguales. Por ejemplo, si $2x^3 - 4x + 1 = ax^3 + bx - c \Rightarrow a = 2$, $b = -4$ y $c = -1$.

Todo polinomio de coeficientes reales se puede expresar (al menos en teoría) como producto de factores reales lineales de la forma ax + b, y de factores cuadráticos reales irreductibles, de la forma $ax^2 + bx + c$.

Una fracción de la forma $\frac{F(x)}{G(x)}$, en donde *F(x)* y *G(x)* son polinomios, recibe el nombre de fracción racional.

Si el grado de *F(x)* es menor que el de *G(x)*, la fracción es PROPIA y en caso contrario es IMPROPIA.

Toda fracción racional impropia se puede expresar (por lo menos teóricamente) como suma de un polinomio y una fracción propia. En efecto, por el algoritmo de la división “el dividendo D es igual al divisor d por el cociente c, más el residuo r”, o sea:

$D = dc + r$. Si se divide a los dos lados de la igualdad por d, queda:

$$\frac{D}{d} = \frac{c}{d} + \frac{r}{d} \Rightarrow \frac{D}{d} = c + \frac{c}{d}.$$

Toda fracción racional propia se puede expresar (por lo menos teóricamente) como una suma de fracciones simples cuyos denominadores son de la forma $(ax + b)^n$ o $(ax^2 + bx + c)^n$, siendo n un entero positivo; de acuerdo con la naturaleza de los factores, se pueden presentar cuatro situaciones:

1. Todos los factores del denominador son de primer grado y ninguno de ellos está repetido.

2. Todos los factores del denominador son de primer grado y algunos de ellos se encuentran repetidos, o sea, son de la forma $(ax + b)^n$.

3. El denominador contiene factores irreducibles de segundo grado, ninguno de los cuales se encuentra repetido.

4. El denominador contiene factores irreducibles de segundo grado y algunos de ellos están repetidos, es decir, toman la forma $(ax + bx + c)^n$.

Veamos qué debe de hacerse en cada caso:

1. A todo factor ax+b (que no aparezca repetido) del denominador, le corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{A}{ax+b}$, en donde A es una constante a determinar.

2. A todo factor $(ax + b)^n$ del denominador le corresponden las fracciones parciales: $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots \frac{A_k}{(ax+b)^n}$, en donde $A_1 - A_2, \ldots A_k$ y son constantes a determinar.

3. A todo factor irreducible de segundo grado $ax^2 + bx + c$ del denominador (que no aparezca repetido) le corresponde la fracción parcial $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, en donde A y B son constantes a determinar.

4. Si $ax^2 + bx + c$ es irreducible, entonces a todo factor $(ax^2 + bx + x^n)$ del denominador le corresponden fracciones parciales de la forma:
$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$, en donde $A_1, A_2, \ldots A_k$ y $B_1, B_2 \ldots B_k$ son constantes a determinar.

Ejemplos: descomponer en fracciones parciales:

a. $\frac{2}{(X-1)(3X-1)}$. Es una fracción propia y se trata del caso en el que aparecen factores distintos en el denominador. Luego: $\frac{2}{(X-1)(3X-1)} = \frac{A}{(X-1)} + \frac{B}{3X-1}$. Si se eliminan denominadores, resulta:

2= A(3X -1) + B(X-1) $\Rightarrow$ 2 =3Ax - A + BX - B. Reuniendo términos semejantes, da: 0X + 2 = (3A + B)X + (-A - B) $\Rightarrow$ 3A + B = 0 y -A - B =2. Resolviendo el sistema, resulta que A = 1 y B = -3. Por tanto, si se reemplaza, queda:

$\frac{2}{(X-1)(3X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{3}{3X-1}$, que es la solución como puede comprobarse efectuando la suma de la derecha para obtener el resultado de la izquierda.

Método alternativo: si en 2=A(3X-1) + B(X-1) se reemplazan los valores de x que anulan el denominador (primero x =1 y luego, $x = \frac{1}{3}$), resulta:

$2 = A(3*1-1) + B(1-1) \Rightarrow 2 = 2A + 0 \Rightarrow A = 1$; ahora, para $x = \frac{1}{3}$, se tiene:

$2 = A(3*\frac{1}{3} - 1) + B(\frac{1}{3} - 1) \Rightarrow 2 = 0 - \frac{2B}{3} \Rightarrow B = -3$, valores para A y B iguales a los obtenidos por el método anterior, con la ventaja de que se llega más rápido al resultado.

b. $\frac{3X+9}{X^2+X-2}$. Fracción propia. Si se factoriza, da: $\frac{3X+9}{(X+2)(x-1)}$, situación que se acomoda al mismo caso anterior. Luego, $\frac{3X+9}{(X+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$. Si se reduce a común denominador, queda:

$3x+9 = A(x-1) + B(x+2) \Rightarrow 3x+9 = Ax - A + Bx + 2B \Rightarrow 3x+9 = (A+B)x + (-A+2B)$

Comparando coeficientes de polinomios iguales, da: A + B = 3 y -A + 2B = 9. Resolviendo el sistema, resulta: A = -1 y B = 4. Luego, $\frac{3X+9}{X^2+X-2}$ es equivalente con $-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x-1}$, como puede probarse realizando la suma.

Por el método alternativo, basta sustituir los valores que anulan el denominador (X=-2, X=1) en $3x+9=A(x-1)+B(x+2)$, obteniéndose primero:

$3(-2)+9=A(-2-1)+B(-2+2)\Rightarrow\ 3=-3A\Rightarrow\ A=-1$. Ahora para X = 1:,
$3(1)+9=A(1-1)+B(1+2)\Rightarrow\ 12=3B\Rightarrow\ B=4$ resultado igual al hallado por el primer método.

c. $\dfrac{3x^2+5x+1}{x^3+3x^2-4}$. Es una fracción propia. Para factorizar el denominador, usamos la división sintética, como se ve enseguida:

$Si G(x)=x^3+3x^2-4\Rightarrow G(1)=1+3-4=0\Rightarrow x-1$ es factor de G(x). Si se efectúa la división sintética, disponiendo en forma de coeficientes separados, queda:

	1	3	0	-4	x -1
a=1		1	4	4	
	$1x^2$	4x	4	0	

Luego, $G(x)=x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)$. Como el segundo factor es un trinomio cuadrado perfecto, se obtiene $G(x)=x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$

Por tanto $\dfrac{3x^2+5x+1}{x^3+3x^2-4}=\dfrac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2}$. Como en el denominador hay un factor no repetido y uno repetido porque aparece al cuadrado, se presenta una combinación de las dos primeras opciones. Luego: $\dfrac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$.

Eliminando denominadores, queda $3x^2+5x+1=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$

Operando, resulta $3x^2+5x+1=(A+B)x^2+(4A+B+C)x+(4A+2B-C)$. Comparando coeficientes y planteando el sistema simultáneo, da:

(1) A + B = 3
(2) 4A + B - C = 5
(3) 4A - 2B - C = 1

Cuya solución es A = 1; B = 2 y C = - 1. Luego:

$$\frac{3x^2+5x+1}{x^3+3x^2-4}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}$$, como puede verificarse efectuando la suma algebraica del consecuente.

Por el método abreviado, basta reemplazar los valores de x que anulan los denominadores (x = 1, x = - 2) en la ecuación: $3x^2 + 5x + 1 = A(x + 2)^2 + B(x + 1)(x + 2) + C(x - 1)$ se obtienen dos de los valores (los de A y C, respectivamente); para hallar el otro valor, el de C, se le asigna a x cualquier valor (0, por ejemplo) y se reemplazan, tanto el valor de x como los de A y C en la misma ecuación y se despeja B.

d. $\frac{-x^2+x+8}{(x-1)(x^2+3)}$. Es fracción propia. Como aparecen un factor lineal y uno cuadrático irreducible, se acomoda a los casos 1 y 3. Por lo tanto:

$$\frac{-x^2+x+8}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$. Eliminando denominadores, queda:

$-x^2 + x + 8= A(x^2 + 3) + (Bx + C)(x + 1)$. Operando y transformando:

$-x^2 + x + 8 =(A + B)x^2 + (- B + C)x + (3A - C)$ Comparando coeficientes, se plantea el sistema simultáneo:

(1) A + B = -1

(2) C - B = 1

(3) 3A - C = 8

Cuya solución es A = 2, B = -3, C = - 2. Luego, el resultado es:

$$\frac{-x^2+x+8}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{2}{x-1}-\frac{3x+2}{x^2+3}$$, como puede comprobarse efectuando la suma que aparece en el consecuente de la igualdad.

Como entre los valores que anulan el denominador hay cantidades imaginarias, el método alternativo no es recomendable por el desperdicio de tiempo.

e. $\frac{x^4-x^3-3x^2+5x+1}{x^2-x}$. Es una fracción impropia, porque el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador. Se efectúa primero la división (Como se muestra en la gráfica) para luego aplicar $\frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$ enunciada al principio de esta sección.

$$
\begin{array}{l|l}
\textbf{Dividendo} & \textbf{Divisor} \\
x^4 \;\; -x^3 \;\; -3x^2 \;\; +5x \;\; +1 & x^2 \;\; -x \\ \cline{2-2}
-x^4 \;\; +x^3 & x^2 -3 \\ \cline{1-1}
0 \;\; +0 \;\; -3x^2 \;\; +5x & \textbf{Cociente} \\
\qquad\quad +3x^2 \;\; -3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 \;\; +2x \;\; +1 & \\
\qquad\quad \textbf{Residuo} &
\end{array}
$$

De donde $\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x+1}{x^2-x}=(x^2-3)+\dfrac{2x+1}{x^2-x}$. Ahora se descompone la fracción propia $\dfrac{2x+1}{x^2-x}$. Si se factoriza el denominador, queda $\dfrac{2x+1}{x^2-x}=\dfrac{2x+1}{x(x-1)}$ que corresponde al caso en el que hay factores lineales no repetidos en el denominador. Por tanto: $\dfrac{2x+1}{x(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$. Eliminando denominadores, da:

$2x + 1 = A(x-1) + Bx$. Desarrollando y comparando coeficientes, queda:

$2x+1=Ax-A+Bx \Rightarrow 2x+1=(A+B)x-A$. Luego:

(1) $A + B = 2$

(2) $-A = 1$

Cuya solución es $A = -1$ y $B = 3$. Por tanto: $\dfrac{2x+1}{x^2-x}=\dfrac{2x+1}{x(x-1)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-1}$ y en consecuencia $\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x+1}{x^2-x}=(x^2-3)-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-1}$ que es la solución al ejercicio propuesto como puede comprobarse realizando la suma que aparece en el consecuente de la igualdad.

INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES

Es un artificio que permite integrar ciertas fracciones racionales que pueden convertirse en fracciones parciales (como se comprobó en los ejemplos anteriores) cuyos elementos se pueden acomodar a integrales inmediatas u otras en donde se pueden aplicar otros métodos. Por ejemplo:

$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx$. Como no es una integral inmediata ni tampoco se pueden aplicar los métodos de sustitución ni por partes, intentamos descomponer el integrando en fracciones parciales.

Por división sintética, se factoriza el denominador, así:

$x^3+x^2-x-1=(x-1)(x^2+2x+1)$. Factorizando el trinomio queda:

$x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)(x+1)=(x-1)(x+1)^2$. Luego:

$\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}=\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}$. Por tanto:

$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$. Planteando y resolviendo el sistema, resultan:

$A=\frac{3}{2}, B=-\frac{1}{2}$ y $C = -1$. De donde:

$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}$. Integrando

$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx=\int\left(\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$. Luego:

$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$, que es el resultado, como se puede comprobar derivando para obtener el integrando.

A continuación veremos aquí algunas integrales trigonométricas cuya solución se basa en ciertas identidades y en alguno de los métodos de integración ya vistos. Para tener éxito en este tipo de integrales es condición sine qua non manejar con propiedad, las principales identidades trigonométricas.

Las ecuaciones diferenciales trigonométricas más comunes se pueden integrar fácilmente transformándolas en integrales inmediatas mediante reducciones trigonométricas sencillas. Los casos más frecuentes son:

Para evaluar $\int Sen^2 U du$ e $\int Cos^2 U du$, que se presentan con frecuencia, se usan las identidades $Sen^2\theta = \frac{1}{2}(1 - Cos2\theta)$ y $Cos^2\theta = \frac{2}{2}(1 + Cos2\theta)$.

Por ejemplo: $\int Sen^2 3x = \int \frac{1}{2}(1 - Cos6x)dx$, que se puede integrar por sustitución.

Si $U = 6x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6dx = \frac{du}{6}$. Reemplazando:

$$\int Sen^2 3x = \int \frac{1}{2}(1 - Cos6x)dx = \frac{1}{2}\int (1 - CosU)\frac{du}{6} = \frac{1}{12}(U - SenU) + C.$$

Luego: $\int Sen^2 3xdx = \frac{1}{12}(6x - Sen6x) + C$.

Para integrar $\int Tan^2 x$ y $\int Cot^2 x$ se usan las identidades $1 + Tan^2 x = Sec^2 x$ y $1 + Cot^2 x = Csc^2 x$. Por ejemplo:

$\int Cot^2 3xdx = \int (Csc^2 3x - 1)dx$. Si $U = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$. Luego:

$\int Cot^2 3xdx = \int (Csc^2 3x - 1)dx = \int (Csc^2 U - 1)\frac{du}{3} = \frac{1}{3}(-CotU - U) + C$. O sea:

$$\int Cot^2 3xdx = -\frac{1}{3}Cot3x - x + C.$$

Para calcular integrales de la forma $\int Sen^m x Cos^n x dx$ se utilizan las sustituciones U = Senx ó U = Cosx dependiendo de la paridad de m ó n.

Puede ocurrir que por lo menos uno de los números m ó n sea un entero impar y positivo y el otro cualquier real; o que tanto m como n son enteros positivos pares. En el primer caso la integral puede reducirse a una inmediata de la forma $\int X^k dx$, mediante transformaciones trigonométricas adecuadas. Por ejemplo, si m es impar, escribimos $Sen^m xdx = Sen^{m-1} x Senx$; y como m-1 es par, el primer factor del segundo miembro será una potencia de $Sen^2 x$ y podremos entonces expresarlo como potencias de Cos^2x, para obtener una integral de la forma: $\int$ (suma de términos que contienen $Cosx$)*$Senxdx$. Si el impar es n, se hace la descomposición de $Cos^n x$ y se expresa como potencias de Sen^2x, para obtener $\int$ (suma de términos que contienen $Senx$)*$cosxdx$. De manera análoga, se aplica el procedimiento para resolver $\int Sen^n udu$ ó $\int Cos^n udu$, cuando n es impar.

Ejemplo: probar que $\int Sen^2xCos^5xdx = \frac{Sen^3x}{3} - \frac{2Sen^5x}{5} + \frac{Sen^7}{7} + C$. En efecto:

$$\int Sen^2xCos^5xdx = \int Sen^2xCos^4xCosxdx$$ (n es impar positivo).

$$\int Sen^2xCos^5xdx = \int Sen^2x(Cos^2x)^2Cosxdx = \int Sen^2x(1-Sen^2x)^2Cosxdx$$

(por ser $Sen^2x + Cos^2x = 1$). Si $U = Senx \Rightarrow \frac{du}{dx} = Cosx \Rightarrow dx = \frac{du}{Cosx}$. Luego:

$$\int Sen^2xCos^5xdx = \int U^2(1-U^2)^2Cosx\frac{du}{Cosx} = \int(U^2 + 2U^4 + U^6)du$$

$$\int Sen^2xCos^5xdx = \frac{U^3}{3} - \frac{2U^5}{5} + \frac{U^7}{7} + C = \frac{Sen^3x}{3} - \frac{2Sen^5x}{5} + \frac{Sen^7}{7} + C$$

como se pide en la expresión original.

Ejemplo: probar que $\int Sen^3\frac{x}{2}dx = -2Cos\frac{x}{2} + \frac{2}{3}Cos^3\frac{x}{2} + C$. En efecto:

$$\int Sen^3\frac{x}{2}dx = \int Sen^2\frac{x}{2}Sen\frac{x}{2}dx = \int(1-Cos^2\frac{x}{2})Sen\frac{x}{2}dx$$

$$Si\ U = Cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}Sen\frac{x}{2} \Rightarrow dx = -\frac{2du}{Sen\frac{x}{2}}$$ Luego:

$$\int Sen^3\frac{x}{2}dx = \int(1-U^2)Sen\frac{x}{2}\left(-\frac{2du}{Sen\frac{x}{2}}\right) = \int 2(U^2-1)du = 2\int(U^2-1)du$$

$\int Sen^3\frac{x}{2}dx = \frac{2U^3}{3} - 2U + C = \frac{2}{3}Cos^3\frac{x}{2} - 2Cos\frac{x}{2} + C$, como se planteó al principio del ejercicio.

Integrales de la forma $\int Tan^n udu$ ó $\int Cot^n udu$. Para resolver cualquiera de estas integrales se descompone el integrando de modo que aparezca una segunda potencia de Tanu o de Cotu, para poderla expresar a través de Sec^2u ó de Csc^2u, respectivamente.

Ejemplo: probar que $Tan^4xdx = \frac{Tan^3}{3} - Tanx + x + c$. En efecto:

$Tan^4xdx = \int Tan^2xTan^2xdx = \int (Sec^2x - 1)Tan^2xdx$. Operando:

$\int Tan^4xdx = \int (Sec^2xTan^2x - Tan^2)dx = \int Sec^2xTan^2xdx - \int (Sec^2 - 1)dx$.

Si $U = Tanx \Rightarrow \frac{du}{dx} = Sec^2x \Rightarrow dx = \frac{du}{Sec^2x}$. Luego:

$\int Tan^4xdx = \int Sec^2xU^2(\frac{du}{Sec^2x}) - Tan^2x + x + C$.

Ahora: $\int Tan^4xdx = \frac{U^3}{3} - Tanx + x + C = \frac{1}{3}Tan^3x - Tanx + x + C$, como se pide en el enunciado.

Ejemplo: probar que $\int Cot^3 2xdx = -\frac{Cot^2 2x}{4} - \frac{\ln|Sen2x|}{2} + C$

$\int Cot^3 2xdx = \int Cot^2 2cCot2xdx = \int (Csc^2 2x - 1)$. Operando:

$\int Cot^3 2xdx = \int (Csc^2 2xCot2x - Cot2x)dx$. Separando sumandos:

$\int Cot^3 2xdx = \int Csc^2 2xCotxdx - \int Cot2Xdx$. Para la primera integral tomamos

$U{=}Cot2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2Cos^2 2x \Rightarrow dx = -\frac{du}{2Csc^2 2x}$. Para la segunda, tomamos

$U = Sen2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2Cos2x \Rightarrow dx = -\frac{du}{2Cos2x}$. Y reemplazando en ambas:

$\int Cot^3 2xdx = \int Csc^2 2xU(-\frac{du}{2Csc^2}) - \int \frac{Cos2x}{U}(\frac{du}{2Cos2x})$. Luego:

$\int Cot^3 2xdx = \int -\frac{1}{2}Udu - \int \frac{1}{U}du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\ln U + C$. Reemplazando:

$\int Cot^3 2xdx = -\frac{Cot^2 2x}{4} - \frac{\ln|Sen2x|}{2} + C$, como se pidió al principio.

Integrales de la forma $\int Sec^n xdx$ ó $\int Csc^n xdx$, cuando n es entero, positivo, par. Se descompone de modo que uno de los factores tenga una segunda potencia, que puede expresarse o al través de tanx o de cotx.

Ej: probar que $\int Sec^4 xdx = \frac{Tan^3 x}{3} + Tanx + C$. En efecto:

$\int Sec^4 xdx = \int Sec^2 xSec^2 xdx = \int (1 + Tan^2 x)Sec^2 xdx$. Haciendo:

$U = Tanx \Rightarrow \frac{du}{dx} = Sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{Sec^2 x}$. Reemplazando:

$\int Sec^4 xdx = \int (1 + U^2)Sec^2 x\frac{du}{Sec^2 x} = \int (1 + U^2)du = U + \frac{U^3}{3} + C$,

$\int Sec^2 xdx = \frac{Tan^3 x}{3} + Tanx + C$ como se deseaba probar.

Integrales que contienen el producto Sen*a*Sen*b*, Sen*a*cos*b*, CosaCos*b*.

Estas formas se pueden transformar en la suma o la diferencia de funciones trigonométricas homónimas, de acuerdo con las siguientes identidades:

1. $Sena + Senb = 2Sen(\frac{a+b}{2})Cos(\frac{a-b}{2})$

2. $Sena + Senb = 2Sen(\frac{a+b}{2})Cos(\frac{a-b}{2})$

3. $Cos a + Cosb = 2Cos(\frac{a+b}{2})Cos(\frac{a-b}{2})$

4. $Cosa - Cosb = -2Sen(\frac{a+b}{2})Sen(\frac{a-b}{2})$

Ejemplo: $\int Sen3xSen2xdx$. Como aparece un producto de senos, usamos la identidad 4, pero se ve que falta el factor -2. Por tanto multiplicamos por -2 tanto el numerador como el denominador, establecemos la equivalencia y la usamos para plantear un sistema simultáneo de ecuaciones:

$\frac{-2Sen3xSen2x}{-2} = -\frac{1}{2}(-2Sen3xSen2x)$. Luego: $(1)\frac{a+b}{2} = 3x$ y

$(2)\frac{a-b}{2} = 2x$, cuya solución es $a = 5x$ y $b = x$. Reemplazando:

$\frac{-2Sen3xSen2x}{-2} = -\frac{1}{2}(-2Sen3xSen2x) = -\frac{1}{2}(Cos5x - Cosx)$. Luego:

$\int Sen3xSen2dx = \int -\frac{1}{2}(Cos5x - Cosx)dx$. Para integrar $Cos5x$ basta hacer $U = 5x$,

para obtener $dx = \frac{du}{5}$. Luego:

$$\int Sen3xSen2xdx = -\frac{1}{2}(\frac{1}{5}Sen5x - Senx) = -\frac{1}{10}Sen5x + \frac{1}{2}Senx + C .$$

En guía anterior vimos el modelo $\frac{dP}{dt} = kP$, cuya solución es $P(t) = P_0e^{kt}$, en donde $P_0 = P(0)$ y k es la diferencia entre las tasas de natalidad y de mortalidad, es la ecuación de crecimiento natural.

Supongamos ahora una muestra de material que contiene N(t) átomos de cierto isótopo (cuerpo que tiene los mismos elementos químicos que otro, pero de peso atómico diferente) en el instante *t*. Experimentalmente se ha comprobado que una fracción constante de esos átomos radioactivos decaen en forma espontánea, es decir, se convierten en átomos de otro elemento o de otro isótopo del mismo elemento en cada intervalo de tiempo. Por tanto, la muestra se comporta igual que una población con una tasa de mortandad constante, sin que ocurran nacimientos. Para expresar un modelo matemático que permita analizar esta situación se usa la ecuación $\frac{dN}{dt} = -k$ que podemos escribir separando variables, así: $\frac{dN}{N} = -kdt \Rightarrow \int\frac{dN}{N} = \int -kdt \Rightarrow \ln N = -kt + C$. Si se toman los dos miembros de la ecuación como exponentes, resulta que $e^{\ln N} = e^{-kt+C}$ y por las propiedades de las funciones exponenciales y de los logaritmos, se tiene que $N = e^{-kt}e^{C}$. En el instante en el que t = 0, $N = N_0$ y reemplazando resulta: $N_0 = e^{0}e^{C} = e^{C}$. De donde $N(t) = N_0 e^{-kt}$, en donde $N_0 = N(0)$ es el número de átomos radioactivos del isótopo original presentes en la muestra en el instante t = 0.

El valor de la constante k de decaimiento depende del isótopo en particular que se considere y se especifica con relación a la vida media m que se define como "el tiempo necesario para que la mitad de la muestra del isótopo decaiga". De acuerdo con esta definición: $t = m$ y $N = \frac{1}{2}N_0$. Si se reemplaza en N(t),

resulta: $\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-km} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-km}$. Aplicando ln a los dos lados:

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-km} \Rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -km \ln e \Rightarrow -\ln 2 = -km \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{k}.$$

Los conceptos anteriores son la base del método de fechado con el radiocarbono catorce $\left({}^{14}C\right)$, isótopo que tiene una vida media de 5.700 años.

Problema: de acuerdo con una teoría cosmológica, había igual cantidad de los isótopos de uranio ${}^{235}U$ y ${}^{238}U$ en el momento de la creación del universo (la gran explosión o BIG BANG), En la actualidad hay 137.7 átomos de ${}^{238}U$ por cada átomo de ${}^{235}U$. Si las vidas medias de estos isótopos son 4.51 miles de millones de años para el ${}^{238}U$ y 0.71 miles de millones de años para el ${}^{235}U$, ¿Cuál es la edad del universo? (Tomado de "CÁLCULO", Edwards y Penney, 4ª edición).

Solución: sean $N_8(t)$ y $N_5(t)$ el número de átomos de ${}^{238}U$ y ${}^{235}U$, respectivamente en el instante t, en miles de millones de años desde la creación del universo. De acuerdo con la ecuación para N(t) se tiene: $N_8(t) = N_0 e^{-kt}$ y $N_5(t) = N_0 e^{-k_1 t}$. Si se usa la ecuación para calcular la vida media m y se despeja la constante, queda:

$k = \dfrac{\ln 2}{m_8}$ y $k_1 = \dfrac{\ln 2}{m_5}$ y reemplazando: $k = \dfrac{\ln 2}{4.51}$ y $k_1 = \dfrac{\ln 2}{0.71}$

Si se dividen N_8 entre N_5, queda: $\dfrac{N_8}{N_5} = \dfrac{e^{-kt}}{e^{-k_1 t}} = \dfrac{137.7}{1}$ entonces:

$e^{(k_1 - k)t} = \dfrac{137.7}{1}$. De donde $\ln e^{(k_1 - k)t} = \ln 137.7$, luego:

$(k_1 - k)t = \ln 137.7 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 137.7}{\dfrac{\ln 2}{0.71} - \dfrac{\ln 2}{4.51}} \Rightarrow t \approx 5.99$, o sea que el universo tiene una edad de unos 6 mil millones de años.

En los conceptos desarrollados vemos como los modelos matemáticos son valiosos elementos descubiertos por los científicos y que nos permiten a nosotros, los legos, aprovecharlos a través de un proceso de comunicación adecuado.

Precisamente, requerimos de la comunicación para procurar y mantener las buenas relaciones en todas las actividades de nuestra vida, particularmente en la familia, en el colegio y con las personas más cercanas a nosotros. En muchas ocasiones enfrentamos desacuerdos y discusiones sin sentido, provocadas talvez por una comunicación deficiente. Entender y hacerse comprender, nos facilita la convivencia y la armonía con quienes nos rodean.

De acuerdo con lo anterior, evaluemos cómo se está dando el proceso de comunicación en el desarrollo de la guía. Si se han presentado dificultades, busquemos las soluciones en forma inmediata.

A continuación se plantean dos series de ejercicios, de los cuales debo resolver con un compañero cinco de cada una, para afianzar los conocimientos sobre integrales. Compartan sus resultados con otros compañeros y con el profesor, tratando de ser muy claros en los mensajes.

Calcular las siguientes integrales por descomposición en fracciones parciales:

1. $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

2. $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx$

3. $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx$

4. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

5. $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}dx$

6. $\int \frac{4x+3}{4x^3+8x^2+3x}dx$

7. $\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}dx$

8. $\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx$

9. $\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx$

Probar las siguientes integrales:

1. $\int Sen^3xdx = \frac{Cos^3x}{3} - Cosx + C$

2. $\int Sen^2xCosxdx = \frac{Sen^3x}{3} + C$

3. $\int Tan^3xdx = \frac{Tan^2x}{2} + \ln|Cosx| + c$

4. $\int Sen^2 2xdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} Sen2xCos2x + C$

5. $\int Tan^4 xdx = \frac{Tan^3 x}{3} - Tanx + x + C$

6. $\int Sen^2 xCos^3 xdx = \frac{1}{3} Sen^3 x - \frac{1}{5} Sen^5 x + C$

7. $\int Sen^4 xdx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} Sen2x + \frac{1}{32} Sen4x + C$

8. $\int Sen2xCos4xdx = \frac{1}{4} Cos2x - \frac{1}{12} Cos6x - C$

9. $\int Cos3xCos2xdx = \frac{1}{2} Senx + \frac{1}{10} Sen5x + C$

10. $\int Sen5xSenxdx = \frac{1}{8} Sen4x - \frac{1}{12} Sen6x + C$

Finalizados, discutidos y compartidos los resultados, ¿creen que los mensajes fueron interpretados por todos de igual manera? Si no fue así, ¿cuáles fueron las posibles causas de la diversidad de interpretaciones?

Ahora, con el mismo compañero, leemos y analizamos el siguiente relato:

El Coronel al capitán

Mañana a las nueve, habrá un eclipse de sol, fenómeno que no pasa cada día. Ordene que salga la tropa al patio en vestido de campaña para que puedan observar esta rareza natural, y yo estaré presente para explicarla. Si llueve no se verá nada, por tanto, ordenará que se lleve la tropa al gimnasio.

El capitán al teniente

Por orden del coronel, mañana habrá un eclipse de sol. Si llueve no se podrá ver desde el patio, en consecuencia, en vestido de campaña, el eclipse tendrá lugar en el gimnasio, fenómeno que no ocurre cada día.

El teniente al sargento

Mañana a las nueve, en vestido de campaña, el coronel eclipsará al sol en el gimnasio, fenómeno que pasa cada día si hace buen tiempo. Si llueve, el acto tendrá lugar en el patio.

El Sargento al Cabo

Mañana a las nueve, el eclipse del coronel en vestido de campaña por el sol, tendrá lugar en el gimnasio. Si allí llueve, fenómeno que no pasa cada día, la tropa formará en el patio.

Comentarios entre la tropa

Mañana, si llueve, el sol eclipsará al coronel en el gimnasio. Lástima que este fenómeno no pase cada día.

Hagan una lista de las posibles causas que ocasionaron la distorsión de la información original. Compartan con otros compañeros.

D

Como aplicación a los conceptos dados sobre cálculo integral y basándome en lo expuesto en la última parte de la sección B, le doy solución a la siguiente situación.

Un pedazo de carbón de leña encontrado por un arqueólogo contiene el 63% de carbono catorce $\left({}^{14}C\right)$ con respecto de una muestra de carbón actual. Utilizando el modelo $\frac{dN}{dt} = -kN$, con $N_0 = N(0)$. ¿Cuál es la edad de la muestra? (3800 años aproximadamente).

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA