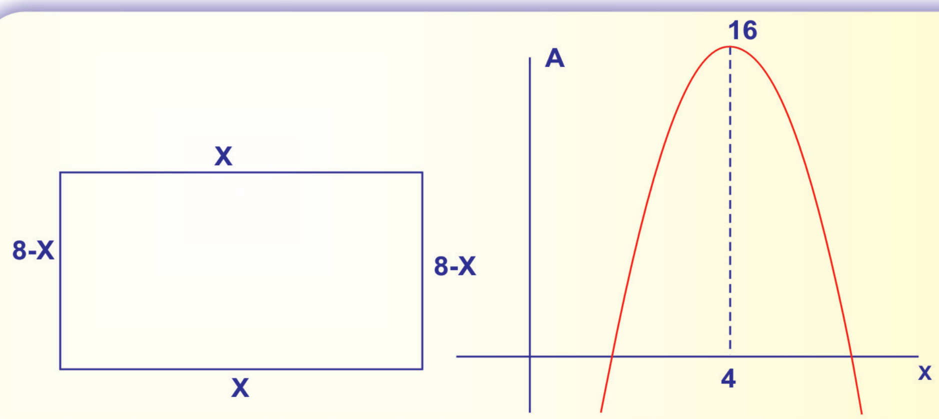
Guía 3

VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN: MÁXIMOS Ó MÍNIMOS



Si el perímetro (suma de sus lados) del rectángulo es 16, su base medirá X y su altura 8-X. Igualmente, su área A (que se muestra a la derecha) es el producto de la base por la altura, o sea: A=X*(8-X), cuyo valor más grande (16) ocurre cuando X sea igual a 4. Para otros valores de la base X, 6 por ejemplo, el área a es igual 12, que es menor que 16, aunque el perímetro sigue siendo 16. En el plano cartesiano se muestra el comportamiento de la base (x) contra el área (A).

INDICADORES DE LOGRO

- Dada la gráfica de una función, identifica claramente los valores extremos de la función
- Calcula correctamente los valores extremos de una función mediante el criterio de las aproximaciones en la primera derivada y usa el resultado para bosquejar la curva
- Determina con suficiencia los valores extremos de una función a través de la segunda derivada e igualmente, bosqueja la curva
- Identifica las diversas personas que se benefician o afectan de sus acciones y procesos **(ORIENTACIÓN AL SERVICIO)**
- Percibe algunas actitudes y necesidades de los otros
- Respeta el punto de vista de las personas a las que presta su servicio
- Contribuye a que los otros tomen decisiones, respetando su autonomía, sin forzarlos o presionarlos
- Maneja con amabilidad y cortesía las críticas de otros
- Proyecta a los demás sus conocimientos acerca de la empresa y los productos o servicios que ofrece
- Demuestra la vivencia de la solidaridad como valor humano

Con los compañeros leemos y analizamos el siguiente contenido:

Además de los valores extremos de una función que vamos a desarrollar en esta guía, trataremos la C.L.G. ORIENTACIÓN AL SERVICIO, que se define como "capacidad para reconocer cómo sus acciones y procesos inciden y aportan a la satisfacción de los otros".

Es la cualidad de ayudar a otros de manera pertinente, desarrollando la disposición y actitud para asegurar la satisfacción de las necesidades del cliente de manera atenta, oportuna y permanente.

La orientación al servicio permite ser consecuentes o razonables entre lo que se espera del servicio y lo que la empresa realmente provee a sus clientes.

La orientación al servicio no termina cuando se entrega el producto y por tanto se debe hacer un seguimiento a los resultados y objetivos propuestos, con el fin de alcanzar el mayor grado de satisfacción posible: la calidad no es un premio a un producto o servicio, es un reconocimiento a la gestión realizada.

Para la orientación al servicio es importante la gestión de la información, pues el conocimiento de qué es lo que se pretende lograr, mejora la calidad. Una adecuada interacción genera un mejoramiento continuo.

Evaluar conjuntamente los procesos establecidos, tomar acciones correctivas y realizar un seguimiento de lo que se quiere lograr mejora la calidad del servicio. El respeto a los puntos de vista y a las sugerencias hechas y su posterior evaluación conlleva a una gestión del cambio que busca generar una mejor calidad, en cualquier ámbito en el que nos desenvolvamos.

La crítica y el aporte de ideas propician un mejor ambiente de servicio que redunda en el beneficio general y que permite la participación de las instancias involucradas.

Atendamos, pues, las sugerencias que se hagan respecto de esta competencia.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero el siguiente contenido. (Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas).

Sea la función $Y = X^3 - 6X^2 + 9X$. Calculo los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función y uso el resultado para bosquejar la curva. ¿Cuántas concavidades tiene la curva?

¿Qué nombre podríamos darle a los puntos donde la curva cambia de creciente a decreciente? ¿Y de decreciente a creciente?

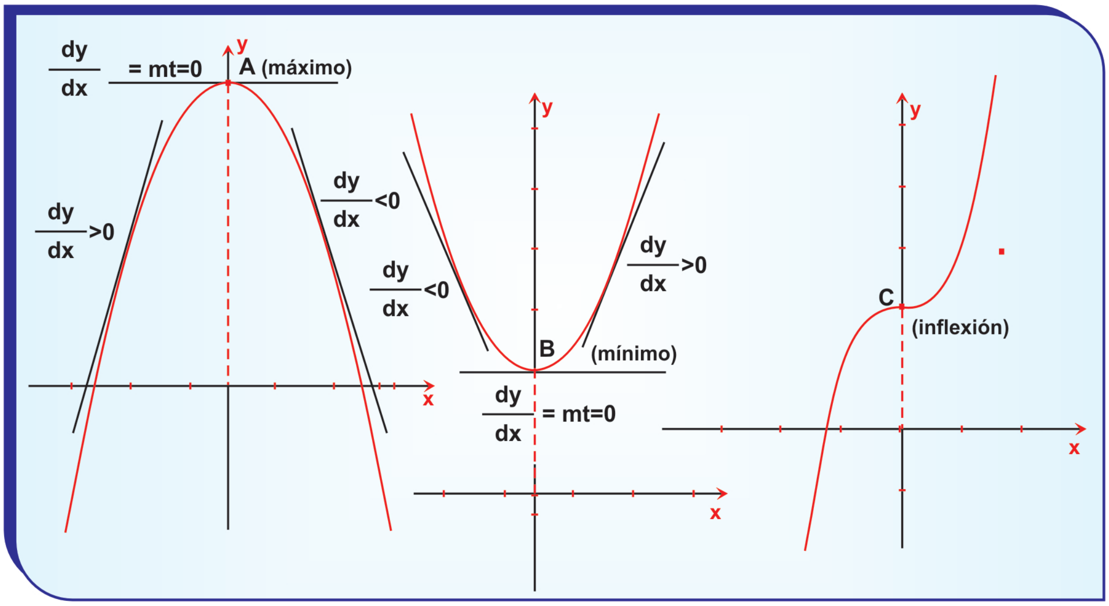
¿Qué tipo de servicio podría yo prestarle a mi compañero si presenta dificultades en la solución del ejercicio que plantea la vivencia?

Si tiene dificultades, revise la guía anterior o busque información a través de los recursos que tiene su institución, por ejemplo CABRI II. Resuelto el ejercicio, socializamos nuestro trabajo con otros subgrupos y con el profesor.

B

Con un compañero leemos, analizamos y consignamos en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde. Si es necesario volvemos a resolver comprensivamente los ejemplos dados:

En la guía anterior se vio que una función puede ser creciente o decreciente. Los puntos en donde la curva cambia de creciente a decreciente o de decreciente a creciente son los puntos extremos de la función y significa que en ellos la función toma o su valor MÁXIMO o su valor MÍNIMO, como se ve en la gráfica:



ANALICEMOS LA GRÁFICA

En el punto A, la curva pasa de CRECIENTE a DECRECIENTE y la ordenada de A es la más grande dentro de la concavidad hacia abajo y se dice entonces que el extremo A es un MÁXIMO RELATIVO. En el punto B, la curva cambia de DECRECIENTE a CRECIENTE y como la ordenada de B es la más pequeña dentro de la concavidad hacia arriba, se dice que el extremo B es un MÍNIMO RELATIVO. En el punto C no se forma concavidad y sólo se presenta un cambio en la dirección de la curva y se dice que en el extremo C se presenta un punto de INFLEXIÓN; se observa que antes de C la función CRECE y después de C, también.

PRIMER MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LOS EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

De acuerdo con lo expuesto antes, se darán los siguientes pasos para determinar los máximos o mínimos de una función:

1) Se busca la primera derivada de la función y se iguala a 0 (porque en un punto extremo la tangente geométrica es horizontal y por tanto su pendiente es igual a cero).

2) Se resuelve la ecuación resultante. Los valores que se obtienen para la variable se llaman VALORES CRÍTICOS, porque para dichos valores en la variable la función se hace extrema.

3) Se aproxima cada valor crítico, primero por la izquierda (un valor un poco

menor que el valor crítico y luego por la derecha (un valor un poco mayor que el valor crítico) y se sustituyen en la derivada para conocer su signo.

4) Se analizan los signos que toma la derivada en las aproximaciones:

a) Si el cambio es de + a - significa que la curva cambia de creciente a decreciente y por tanto hay un MÁXIMO relativo para dicho valor crítico.

b) Si el cambio es de - a +, significa que la curva cambia de decreciente a creciente y en consecuencia la función presenta un MÍNIMO relativo para dicho valor crítico.

c) Si no ocurre ningún cambio: + a + ó - a -, quiere decir que la curva no presenta concavidad ni hacia abajo ni hacia arriba y sólo ocurre un cambio en la dirección de la curva. En estos casos existe un punto de inflexión.

Ejemplo 1: calcular los máximos o mínimos o inflexiones de la función

$Y = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - 6X + 8$. Use los resultados para bosquejar la curva.

Solución:

1) $Y = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - 6X + 8$ (Función dada)

2) $Y' = X^2 + X - 6$ (Derivada de la función)

3) $X^2 + X - 6 = 0$ (Igualamos a 0, porque en un punto extremo Y'=m=0)

4) (X + 3)(X - 2) = 0 (Factorizando la 3)

5) Si X + 3 = 0 entonces X = -3 y si X - 2 = 0 entonces X = 2 (Se iguala cada factor a 0 y se resuelve la ecuación para obtener los valores críticos).

Tomamos aproximaciones a -3, primero por la izquierda y luego por la derecha y lo reemplazamos en la derivada para determinar el signo que toma en cada caso, así:

Si X = - 3.1 (que es menor que -3) entonces (-3.1+3)(-3.1-2) = (-0.1)(-5.1)= +0.51
Si X = - 2.9 (que es mayor que -3) entonces (-2.9+3)(-2.9-2) = (0.1)(-4.9)= - 0.49

Como el cambio es de + a -, entonces para el valor crítico X = -3 la función presenta un máximo cuyo valor es 21.5, valor que se obtiene reemplazando el valor crítico en la función dada.

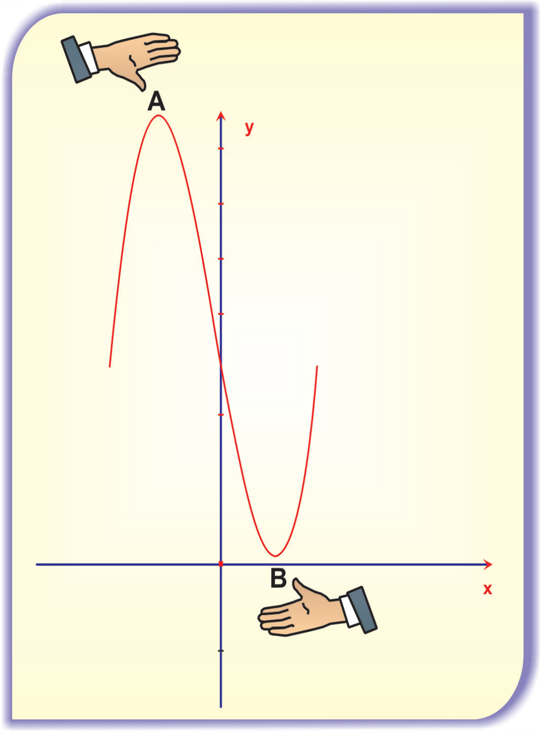
Ahora tomamos aproximaciones a 2, primero por la izquierda y luego por la derecha y sustituimos en la derivada para determinar su signo cuando se aproxima al valor crítico, así:

Si X = 1.9 (que es menor que 2) entonces (1.9 + 3)(1.9 - 2) = - (nótese que sólo interesa el signo).

Si X = 2.1 (que es mayor que 2) entonces (2.1+3)(2.1-2) = +.

Como el cambio es de - a +, entonces para el valor crítico X =2 la función presenta un mínimo relativo cuyo valor es $\frac{2}{3}$, valor que resulta de reemplazar el valor crítico en la función dada.

Para bosquejar la curva, se localizan los puntos extremos que son A $(-3\ \frac{43}{2})$ y B $(2,\frac{2}{3})$. Como en A hay un MÁXIMO relativo, se coloca la mano formando concavidad hacia abajo como se ve en la figura y se traza aproximadamente la curva, tratando de formar dicha concavidad; igualmente, en B, que es un MÍNIMO relativo, se coloca la mano con la concavidad hacia arriba y se dibuja aproximadamente la curva, tratando de formar esa concavidad. Finalmente, se suaviza un poco el trazado para darle la forma adecuada.



Ejemplo 2: calcular los máximos o mínimos o inflexiones de la función $Y = (2 - X)^3$.

Solución:

1) $Y = (2 - X)^3$ (Función dada)

2) $Y' = -3(2 - X)^2$ (Derivada de la función)

3) $-3(2 - X)^2 = 0$ (Porque en un valor extremo Y'=mt=0)

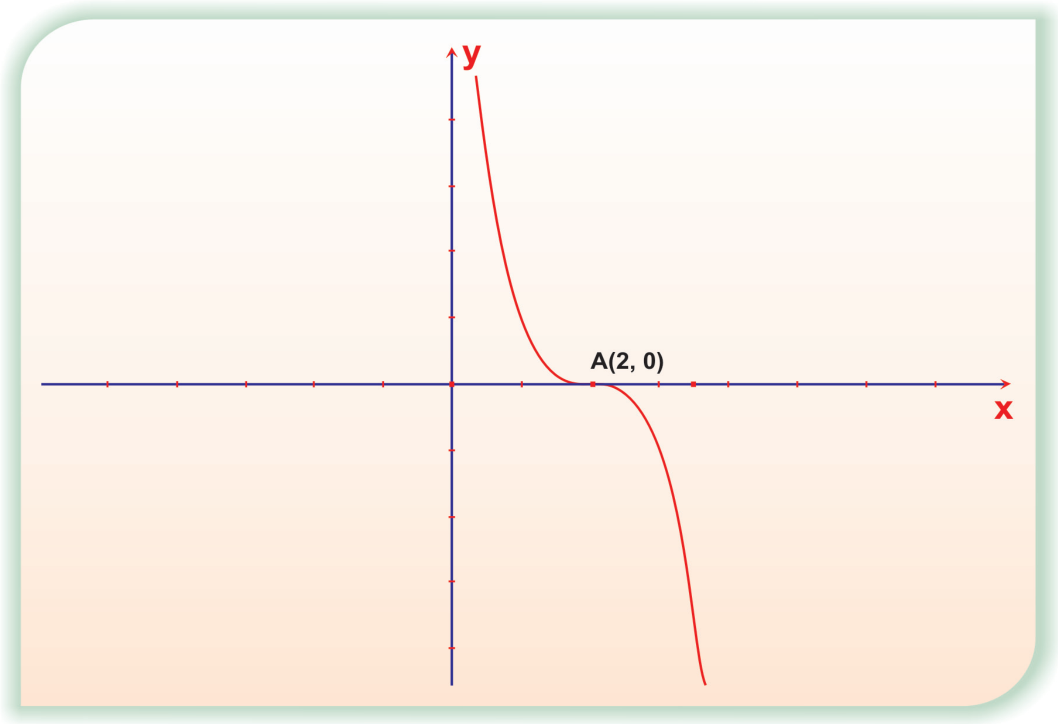
4) X = 2 (Resolviendo la ecuación anterior para obtener un valor crítico)

Ahora tomamos aproximaciones a 2, primero por la izquierda y luego por la derecha y sustituimos en la derivada para determinar su signo cuando se aproxima al valor crítico, así:

Si X = 1.9 (menor que 2) entonces $Y' = -3(2-1.9)^2 = -$ (Sólo interesa el signo)
Si X = 2.1 (que es mayor que 2) entonces $Y' = -3(2 - 2.1)^2 = -$.

Como la derivada no experimenta cambio (- a -), entonces para el valor crítico X =2 la función presenta un punto de INFLEXIÓN en A(2, 0).

Para bosquejar la curva se localiza el punto A(2, 0). Como a la izquierda de 2 la función decrece, se hace descender la curva; a la derecha de 2 la función sigue decreciendo, entonces sigue haciendo bajar la curva, pero con un cambio de dirección, como se ve en la figura:



SEGUNDO MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN

Si se tiene la derivada de una función, se llama segunda derivada de la función a la derivada de esa derivada, o sea, la segunda derivada de una función es la derivada de la derivada, la tercera es la derivada de la segunda derivada, y así sucesivamente. Por ejemplo: si $F(x) = X^4 - 2X^3 + 5X^2 + 3$ entonces la segunda derivada de F(x) respecto de x es:

$$F'(x)= \frac{dy}{dx} = Y' = 4X^3 - 6X^2 + 10X$$ (Primera derivada de Y respecto de X)

$$F''(x)= \frac{d^2y}{dx^2} = Y'' = 12X^2 - 12X + 10$$ (Segunda derivada de Y con respecto a X)

$$F'''(x)= \frac{d^3y}{dx^3} = Y''' = 24X - 12X$$ (Tercera derivada de Y con respecto de X)

Existe un método alternativo para calcular los valores extremos de una función, aplicando el criterio de la segunda derivada de la función respecto de la variable. El proceso es como sigue:

1) Se busca la primera derivada de la función, se iguala a cero y se resuelve la ecuación para hallar los valores críticos (Igual que en el método anterior).

2) Se calcula la segunda derivada de la función respecto de la variable y se sustituye en ella cada valor crítico para determinar su signo:

   a) Si la segunda derivada resulta POSITIVA, entonces hay un MINIMO RELATIVO para ese valor crítico.

   b) Si la segunda derivada resulta NEGATIVA, entonces existe un MÁXIMO RELATIVO para ese valor crítico.

   c) Si la segunda derivada resulta igual a cero y la tercera derivada es diferente de cero, entonces hay un punto de INFLEXIÓN.

Ejemplo 1: usando el criterio de la segunda derivada, hallar los valores extremos de la función $Y = \frac{X^3}{3} + 3X^2 + 8X + 5$.

Solución:

1) $Y = \frac{X^3}{3} + 3X^2 + 8X + 5$ (Función dada)

2) $Y' = X^2 + 6X + 8$ (Primera derivada de la función)

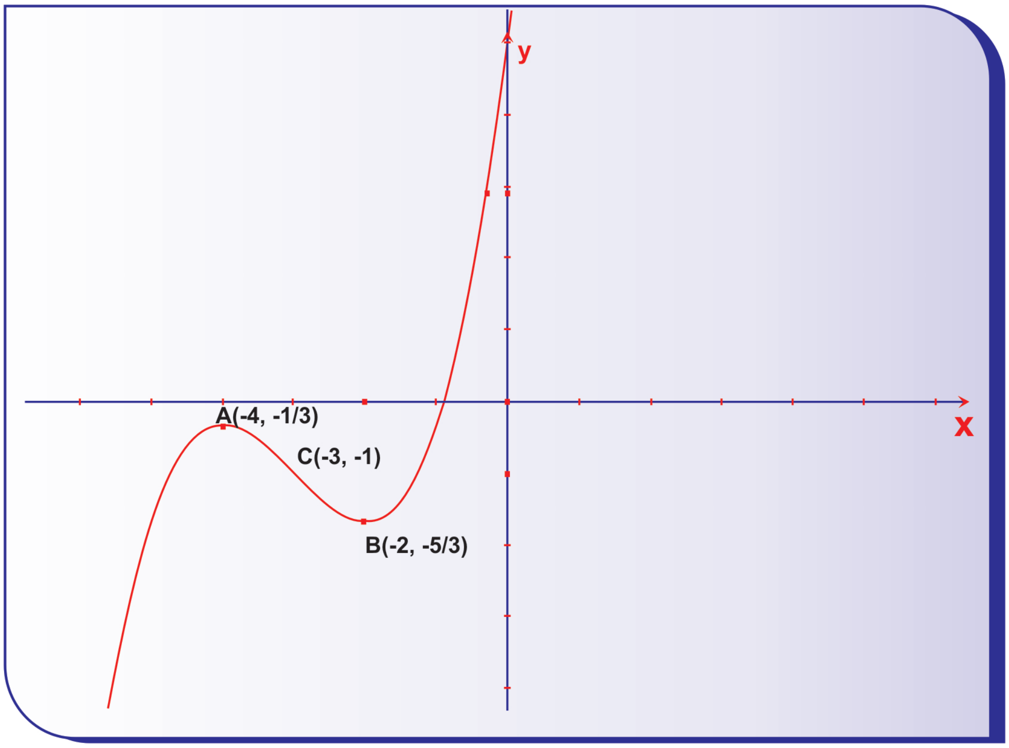
3) $X^2 + 6X + 8 = 0 \Rightarrow (X + 4)(X + 2) = 0 \Rightarrow X = -4 \vee X = -2$ (Se iguala la primera derivada a 0 y se resuelve la ecuación para hallar los valores críticos).

4) $Y'' = 2X + 6$ (Se halla la segunda derivada de la función)

Si X = -4, entonces Y″ = 2(-4) + 6 = - 2, que es menor que 0; luego hay un MÁXIMO relativo en A(-4, $-\frac{1}{3}$) (Se reemplaza el valor crítico -4 en la segunda derivada para determinar su signo).

Si X = - 2 entonces Y″ = 2(-2) + 6 = +2, que es mayor que 0; luego hay un MÍNIMO relativo en B(-2, $-\frac{5}{3}$) (Se reemplaza el valor crítico -2 en la segunda derivada para determinar su signo).

Si existe un punto de inflexión (donde la curva cambia de dirección sin formar concavidad), la segunda derivada debe ser igual a cero y la tercera derivada ha de ser diferente de cero. Por tanto, se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve, así: $2X + 6 = 0$ entonces $X = -3$; se busca la tercera derivada, así: $Y''' = 2$, que es diferente de 0 y por tanto hay un punto de INFLEXIÓN en C(-3, -1).
Si bosquejamos la curva, resulta:



Obsérvese que aproximándose a C, por la izquierda, la curva desciende, cambia de dirección y sigue descendiendo para poder formar la concavidad hacia arriba en el punto B, que es un MÍNIMO relativo como ya se dijo.

Se hace notar que por el método de las aproximaciones en la primera derivada los puntos de inflexión no siempre aparecen; en cambio, usando el método de la segunda derivada se pueden encontrar, siempre y cuando se satisfagan las dos condiciones: la segunda derivada debe ser igual a 0, pero la tercera derivada debe de ser diferente de 0.

Leo, analizo y resuelvo en el cuaderno de matemáticas los siguientes temas para comprobar mi avance en lo relacionado con los valores extremos de una función.

Finalizado el ejercicio y comprobados los aciertos y falencias, me dispongo a observar algunas actitudes manifestadas por algunos compañeros y si estoy en condiciones, ofrezco mis conocimientos, en pro del avance de los que así lo requieran.

Utilizando cualquiera de los dos métodos descritos antes, calculo los valores críticos, los intervalos en donde la función crece o decrece, los puntos de inflexión, los valores extremos y aprovecho los resultados para bosquejar la curva:

1) $Y = X^3 - 3X^2 - 9X + 10$

2) $Y = - X^2 + 8X - 6$

3) $Y = X^3 - 6X^2 + 12X - 7$

4) $Y = X^3 - 27 + 16$

5) $Y = X^3 - 9X^2 + 15X - 5$

6) $Y = (X^2 - 4)^2$

7) $Y = 2X^2 - X^4$

8) $Y = X^4 - 4X$

9) $Y = 2X^3 + 3X^2 - 12X - 4$

10) $Y = \dfrac{X^2 + X + 4}{X + 1}$

D

Usando la aplicación CABRI II, verifico los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores dando las instrucciones para construir las gráficas. Si es posible, las imprimo para hacer un análisis más detallado de los resultados.

En relación con mis desempeños en cuanto a la competencia, procedo como lo hice en la actividad C.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA