GUÍA 2

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN Y POR PARTES

En las condiciones económicas actuales, una alternativa a la crisis del desempleo puede ser la actividad piscícola, si se dispone del espacio y las condiciones suficientes. El cálculo integral nos suministra modelos matemáticos que permiten hacer un seguimiento más racional a un criadero de peces, por ejemplo.

INDICADORES DE LOGRO

- Realiza de manera correcta el cambio de variable para poder aplicar el método de sustitución
- Integra algunas potencias de base compuesta y ciertos productos y cocientes por el método de sustitución
- Selecciona correctamente los elementos U y dv, base de la integración por partes
- Desarrolla, mediante ensayo y error, integrales que se resuelven mediante el método de integración por partes

- Hace uso racional de los recursos naturales **(RESPONSABILIDAD AMBIENTAL)**
- Mantiene ordenado su sitio de trabajo
- Participa activamente en los proyectos de mejoramiento ambiental que permiten su vinculación
- Demuestra actitud positiva hacia los problemas que afectan el medio ambiente
- Reconoce y analiza diferentes problemas del medio ambiente

Leemos e interpretamos en subgrupo lo siguiente:

En esta guía, y debido a la vital importancia que tiene la protección y conservación del medio ambiente para la supervivencia y desarrollo sostenible de la humanidad, volveremos a considerar la **C.L.G. RESPONSABILIDAD AMBIENTAL.** Centraremos nuestra atención en un documento de las Naciones Unidas, llamado "LA CARTA DE LA TIERRA", que empieza a gestarse en 1987 cuando la Comisión Mundial para el Ambiente y Desarrollo de las Naciones Unidas hizo un llamado para la creación de una carta que tuviera los principios fundamentales para el desarrollo sostenible. La redacción de la Carta de la Tierra fue uno de los asuntos inconclusos de la Cumbre de la Tierra de Río en 1992. En 1994 Maurice Strong, Secretario General de la Cumbre de la Tierra y Presidente del Consejo de la Tierra y Mikhail Gorbachov, Presidente de Cruz Verde Internacional, lanzaron una nueva iniciativa de la Carta de la Tierra con el apoyo del Gobierno de los Países Bajos (Holanda y Bélgica). A principios de 1997 la Comisión de la Carta de la Tierra formó un comité redactor internacional, quien ayudó a conducir el proceso internacional de consulta. La evolución y desarrollo del documento refleja el proceso de un diálogo mundial acerca de la Carta de la Tierra. Se comenzó con el Borrador de Referencia el cual fue editado por la Comisión y puesto en circulación internacional como parte del proceso de consulta. La versión final de la Carta fue aprobada por la Comisión en la reunión celebrada en las oficinas centrales de UNESCO en París en marzo del 2000. El documento completo se encuentra en Internet.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

1. Considere la expresión $x^2(1-x^3)^4dx$. Haga $U=1-X^3$; calcule $\frac{dU}{dx}$; ahora despeje dx; finalmente, reemplace lo que se pueda en la primera expresión y simplifique el resultado.

2. Calcule $\frac{d(uv)}{dx}$ (la derivada de un producto), siendo U y V funciones de x. Ahora multiplique los dos miembros de la igualdad por dx y simplifique el resultado; luego despeje Udv.

3. Elabore una lista de actividades que, según su criterio, atentan contra el medio ambiente en su entorno.

B

Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde y si es preciso, vuelvo a resolver los ejemplos para mecanizar los métodos.

Como se anotaba en la guía anterior, la dificultad del cálculo diferencial radica en que no existen modelos que permitan desarrollar cualquier integral. Los métodos de integración permiten reducir en gran medida, esta dificultad, transformando las integrales complejas en formas conocidas.

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Lo que acabo de hacer en la parte 1 del paso A es la base del método de integración por sustitución o cambio de variable que, básicamente, consiste en transformar la integral en otra que tenga la forma de una de las integrales inmediatas. Permite integrar algunos productos y cocientes y el éxito en su aplicación depende de la elección que se haga de U. El proceso es el siguiente: se escoge U, se halla $\frac{du}{dx}$, se despeja dx y por último se reemplaza lo que se pueda en la integral dada; al simplificar, debe de aparecer una integral inmediata que debe resolverse, para luego deshacer la sustitución inicial. Ejemplos:

a) $\int X^2(1-X^3)^4 dx$

Sol: $U = 1 - x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3x^2 \Rightarrow dx - \frac{du}{3x^3}$ (Eligiendo U, derivando y despejando dx). Si se reemplaza en la integral planteada, queda: $\int x^2 U^4 \left(-\frac{du}{3x^2}\right) = \int -\frac{U^4 du}{3}$

(Al sustituir lo que sea posible y simplificar, resulta una integral inmediata que se resuelve). Luego: $\int X^2(1-X^3)^4 = \int -\frac{1}{3}U^4du = -\frac{1}{3}\frac{U^5}{5}+C$. Si devolvemos la sustitución, queda: $\int x^2(1-x^3)^4dx = -\frac{(1-x^3)^5}{15}+C$, que es la solución, como puede comprobarse hallando la derivada: deberá obtenerse el integrando.

b) $\int Y^3\sqrt{1+Y^4}dy$

Sol: sea $U = 1+y^4 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 4y^3 \Rightarrow dy = \frac{du}{4y^3}$. Reemplazando, se tiene:

$\int y^3\sqrt{1+y^4}dy = \int y^3U^{\frac{1}{2}}\frac{du}{4y^3} = \int \frac{U^{\frac{1}{2}}}{4}du = \frac{1}{4}\frac{U^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$. Simplificando y reemplazando U,

resulta: $\int y^3\sqrt{1+y^4dy} = \frac{1}{6}(1+y^4)^{\frac{3}{2}}+C$

c) $\int \frac{dx}{(2-X)^3}$

Sol: Si $U = 2-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$. Si se reemplaza:

$\int \frac{dx}{(2-x)^3} = \int \frac{-du}{U^3} = \int -U^{-3}du = -\frac{U^{-2}}{-2}+C = \frac{1}{2U^2}+C$. Si reemplazamos U:

$$\int \frac{dx}{(2-x)^3} = \frac{1}{2(2-x)^2}+C$$

d) $\int 2Xe^{x^2}dx$

Sol: Si $U = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$. Reemplazando:

$\int 2Xe^{x^2}dx = \int 2Xe^u\frac{du}{2x} = \int e^udu = e^u+C$. Si de nuevo se reemplaza:

$\int 2Xe^{X^2}dx = e^{x^2}+C$, como puede comprobarse.

e) $\int e^{Seno} Cosxdx$

Sol: $SiU = Senx \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = Cosx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{Cosx}$. Reemplazando, queda:

$\int e^{Senx} Cosxdx = \int e^{u} Cosx(\dfrac{du}{Cosx}) = \int e^{u} du = e^{u} + C$. Luego:

$\int e^{Senx} Cosxdx = e^{Senx} + C$

f) $\int \dfrac{\ln^3 x}{x} dx$

Sol: $U = \ln x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dx = xdu$. Reemplazando, resulta:

$\int \dfrac{\ln^3 x}{x} dx = \Rightarrow \int \dfrac{U^3}{x} xdu = \int U^3 du = \dfrac{U^4}{4} + C$. Reemplazando, da:

$$\int \frac{\ln^3 xdx}{x} = \frac{(\ln x)^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

g) $\int Sen2xdx$

Solución: $SeaU = 2X \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2}$. Reemplazando, resulta:

$$\int Sen2xdx = \int SenU\left(\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2} CosU + C = -\frac{Cos2x}{2} + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Lo que realizado en la parte 2 del paso A es la base del método de integración por partes. En efecto, $\dfrac{d(U * V)}{dx} = U\dfrac{dv}{dx} + V\dfrac{du}{dx} \Rightarrow d(UV) = Udv + Vdu$. Luego:

$\int d(UV) = \int Uvd + \int Vdu$. Como la integral de d(UV)=UV, entonces. Y despejando una de las integrales, resulta: $\int Udv = UV - \int Vdu$.

En el método de integración por partes se recomienda seleccionar U y dv de tal manera que dv sea una expresión fácilmente integrable, pues de no ser así el problema se complica aún más. Se calcula $\frac{dU}{dx}$ y se despeja dU; a partir de dV se calcula V por integración. Luego se reemplaza en la expresión original y se verifica que $\int Vdu$ se pueda integrar de acuerdo con los métodos disponibles.

En ocasiones, la integral planteada aparece en varios términos de la igualdad, caso en el cual se reúnen los términos que contienen la integral pedida, para luego despejarla. También suele ocurrir que el método de integración por partes debe reiterarse.

Ejemplos:

a) $\int XSenxdx$

Sol: Para resolver por partes debe acomodarse a la forma general: $\int Udv = UV - \int Vdu$

$SeaU = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$ y $Seadx = Senxdx \Rightarrow \int dv = \int Senxdx \Rightarrow V = -Cosx$.

Si se reemplaza, queda:

$Udv = x(-Cosx) - \int -Cosxdx = -xCosx + \int Cosxdx = -xCosx + Senx + C$.

Luego $\int xSenxdx = -xCosx + Senx + C$, como puede comprobar derivando para obtener el integrando.

b) $\int xe^{3x}dx$

Solución: se necesita la forma general $\int Udv = UV - \int Vdu$

$SeaU = X \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$

$Seadv = e^{3x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{3x}dx$. Esta integral se resuelve por sustitución, así:

$SeaM = 3x \Rightarrow \frac{dM}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{dM}{3}$. Reemplazando en la anterior, queda:

$V = \int e^{3x}dx = \int e^{M}\frac{dM}{3} = \frac{e^{M}}{3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$. Reemplazando en la primera:

$\int Xe^{3x}dx = \int Udv = X\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) - \int \frac{e^{3x}}{3}dx$, $\int Xe^{3x}dx = \frac{Xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$ que se puede comprobar hallando la derivada de esta primitiva.

c) $\int e^{x} Cosxdx$

Solución: se necesita la forma general $\int Udv = UV - \int Vdu$.

$Sean U = s^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx$ y $dv = Cosxdx \Rightarrow V = Senx$.

Luego: $\int e^{x}Cosxdx = e^{x}SenX - \int e^{x}Senxdx$

(1). La última integral también se realiza por partes, así: Hacemos $U = e^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx$ y $dv = Senxdx \Rightarrow V = -Cosx$. Si se reemplaza, se tiene:

$\int e^{x}Senx = e^{x}(-Cosx) - \int -Cosx(e^{x})dx = -e^{x}Cosx + \int e^{x}Cosxdx$

Si se reemplaza en (1), queda: $\int e^{x}Cosxdx = e^{x}Senx - (e^{x}Cosx + \int e^{x}Cosxdx) \Rightarrow$

$\int e^{x}Cosxdx = e^{x}Senx + e^{x}Cosx - \int e^{x}Cosxdx)$, en donde se ve que el integral planteado aparece también al lado derecho de la igualdad.

Luego: $2\int e^{x}Cosxdx = e^{x}Senx + e^{x}Cosx \Rightarrow \int e^{x}Cosx = \frac{e^{x}Senx + e^{x}Cosx}{2} + C$

resultado que puede verificarse por derivación de la función.

d) $\int x^{2}Senxdx$

Solución: usamos la forma general $\int Udv = UV - \int Vdu$ de la integración por partes.

Aquí $U = X^{2} \rightarrow dU = 2Xdx$, y $dv = SenX \rightarrow V = -CosX$. Luego:

$\int X^{2}SenXdx = -X^{2}CosX + 2\int XCosXdx$. Ahora, en $\int XCosXdx = UV - \int Udu$,

se reitera el método: $U = X \rightarrow du = dx$ y $dv = CosX \rightarrow V = SenX$. Luego:

$\int XCosXdx = XSenX - \int SenXdx = XSenX + CosX$. Y remplazando:

$\int X^{2}SenXdx = -X^{2}CosX + 2\int XCosXdx = -X^{2}CosX + 2(XSenX + CosX) + C$, que se puede comprobar derivando este resultado.

e) $\int \ln x dx$

Solución: se integra por partes de acuerdo con $\int U dv = UV - \int V du$

$Sean U = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$ y $dv = dx \Rightarrow V = x$. Luego:

$\int \ln x dx = x \ln x - \int x\left(\dfrac{dx}{x}\right) = x \ln x - x + C$, como se puede verificar por derivación de la función.

f) Una ecuación diferencial como $\dfrac{dP}{dt} = kP^n$ se utiliza frecuentemente como modelo matemático que permite hallar aproximadamente el crecimiento (o decrecimiento) de una población P(t) de individuos en un instante t. El valor de la constante K debe determinarse generalmente por medio de experimentación, en tanto que n indica la forma en que cambia la población; en caso de que las tasas de natalidad y de mortalidad sean constantes, el valor de n es 1 y el modelo se convierte en $\dfrac{dP}{dt} = kP$. Usando estas consideraciones se aplica la integración para resolver situaciones como las siguientes:

1) Se sabe que cierta población se comporta de acuerdo con el modelo matemático $\dfrac{dP}{dt} = k\sqrt{P}$. Cuando $t = 0 y P = P_0$; calcular $P(t)$.

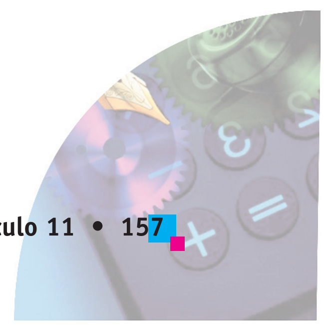
Solución: *si* $\dfrac{dP}{dt} = k\sqrt{P} \Rightarrow \dfrac{dP}{\sqrt{P}} = kdt \Rightarrow P^{2dP} = kdt$ (Separando variables).

$\int P^{-\frac{1}{2}} dP = \int kdt \Rightarrow \dfrac{P^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = kt + C \Rightarrow 2\sqrt{P} = kt + C$ (Resolviendo la ecuación diferencial).

$2\sqrt{P_0} = k(0) + C \Rightarrow C = 2\sqrt{P_0}$ (Reemplazando de acuerdo a la condición).

Luego: $2\sqrt{P} = kt + 2\sqrt{P_0} \Rightarrow \sqrt{P} = \dfrac{kt}{2} + \sqrt{P_0} \Rightarrow P = \left(\dfrac{kt}{2} + \sqrt{P_0}\right)^2$ y por lo tanto

$P(t) = \left(\dfrac{kt}{2} + \sqrt{P_0}\right)^2$.



2) Ahora supongamos que la población de su municipio satisface la ecuación diferencial dada en 1); en 1990 tenía 60000 habitantes y en el 2000 tenía 72000. Si el ritmo de crecimiento poblacional se mantiene, ¿dentro de cuántos años la población será de 100000 habitantes?

Solución: en 1990, t=0 y P_0 = 60000. Cuando t = 10 años, la población es de 72000 y si se reemplaza en =(1), se tiene:

$72000 = \left(\dfrac{k * 10}{2} + \sqrt{60000} \right)^2 \Rightarrow 72000 = \left(5k + \sqrt{60000}\right)^2$. Si se saca raíz cuadrada, resulta: $\sqrt{72000} = 5k + \sqrt{60000} \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{72000} - \sqrt{60000}}{5}$. Luego: k=4.676, aproximadamente. Finalmente, hacemos P(t) = 100000 y reemplazamos:

$1000 = \left(\dfrac{4.776 * t}{2} + \sqrt{60000} \right)^2$. Si se saca raíz cuadrada:

$$\sqrt{100000} = 2.338t + \sqrt{60000} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{100000} - \sqrt{60000}}{2.338} = 30.49 .$$

Luego la población será de 100000 habitantes dentro de 30 años y medio aproximadamente.

Las suposiciones hechas en algunos de los ejercicios propuestos deben cuestionarnos en cuanto a la responsabilidad que tenemos en el crecimiento desmesurado de la población, en la utilización indiscriminada de los recursos naturales disponibles y en los atentados que, muchas veces inconscientemente, hacemos contra la naturaleza.

Con el ánimo de que todos nos preocupemos por buscar soluciones que remedien la situación, se presentan los principios que rigen La Carta de la Tierra que se mencionó al principio de la guía. Vamos a leerlos y a comentarlos brevemente.

PRINCIPIOS

I. Respeto y cuidado de la comunidad de la vida

1. Respetar la Tierra y la vida en toda su diversidad

   a. Reconocer que todos los seres son interdependientes y que toda forma de vida, independientemente de su utilidad, tiene valor para los seres humanos.

b. Afirmar la fe en la dignidad inherente a todos los seres humanos y en el potencial intelectual, artístico, ético y espiritual de la humanidad.

2. Cuidar la comunidad de la vida con entendimiento, compasión y amor.

a. Aceptar que el derecho a poseer, administrar y utilizar los recursos naturales conduce hacia el deber de prevenir daños ambientales y proteger los derechos de las personas.

b. Afirmar que a mayor libertad, conocimiento y poder, se presenta una correspondiente responsabilidad por promover el bien común.

3. Construir sociedades democráticas que sean justas, participativas, sostenibles y pacíficas

a. Reconocer que la libertad de acción de cada generación se encuentra condicionada por las necesidades de las generaciones futuras.

b. Promover la justicia social y económica, posibilitando que todos alcancen un modo de vida seguro y digno, pero ecológicamente responsable.

4. Asegurar que los frutos y la belleza de la Tierra se preserven para las generaciones presentes y futuras.

a. Reconocer que la libertad de acción de cada generación se encuentra condicionada por las necesidades de las generaciones futuras.

b. Transmitir a las futuras generaciones valores, tradiciones e instituciones, que apoyen la prosperidad a largo plazo, de las comunidades humanas y ecológicas de la Tierra.

II. Integridad ecológica

1. Proteger y restaurar la integridad de los sistemas ecológicos de la Tierra, con especial preocupación por la diversidad biológica y los procesos naturales que sustentan la vida.

a. Adoptar, a todo nivel, planes de desarrollo sostenible y regulaciones que permitan incluir la conservación y la rehabilitación ambientales, como parte integral de todas las iniciativas de desarrollo.

b. Establecer y salvaguardar reservas viables para la naturaleza y la biosfera, incluyendo tierras silvestres y áreas marinas, de modo que tiendan a proteger los sistemas de soporte a la vida de la Tierra, para mantener la biodiversidad y preservar nuestra herencia natural.

c. Promover la recuperación de especies y ecosistemas en peligro.

d. Manejar el uso de recursos renovables como el agua, la tierra, los productos forestales y la vida marina, de manera que no se excedan las posibilidades de regeneración y se proteja la salud de los ecosistemas.

e. Manejar la extracción y el uso de los recursos no renovables, tales como minerales y combustibles fósiles, de forma que se minimice su agotamiento y no se causen serios daños ambientales.

2. Evitar dañar como el mejor método de protección ambiental y cuando el conocimiento sea limitado, proceder con precaución.

   a. Tomar medidas para evitar la posibilidad de daños ambientales graves o irreversibles, aun cuando el conocimiento científico sea incompleto o inconcluso.

   b. Imponer las pruebas respectivas y hacer que las partes responsables asuman las consecuencias de reparar el daño ambiental, principalmente para quienes argumenten que una actividad propuesta no causará ningún daño significativo.

   c. Prevenir la contaminación de cualquier parte del medio ambiente y no permitir la acumulación de sustancias radioactivas, tóxicas u otras sustancias peligrosas.

3. Adoptar patrones de producción, consumo y reproducción que salvaguarden las capacidades regenerativas de la Tierra, los derechos humanos y el bienestar comunitario.

   a. Reducir, reutilizar y reciclar los materiales usados en los sistemas de producción y consumo y asegurar que los desechos residuales puedan ser asimilados por los sistemas ecológicos.

   b. Actuar con moderación y eficiencia al utilizar energía y tratar de depender cada vez más de los recursos de energía renovables, tales como la solar y eólica.

c. Promover el desarrollo, la adopción y la transferencia equitativa de tecnologías ambientalmente sanas.

d. Asegurar el acceso universal al cuidado de la salud que fomente la salud reproductiva y la reproducción responsable.

Como en la integración no existen modelos que se ajusten a la solución de las diversas clases de integrales, es preciso ejercitar bastante para adquirir destreza en los diversos métodos. Por tanto, utilizando el método adecuado, y guiándome por lo expuesto en la sección B, desarrollo lo siguiente:

1. $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

2. $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}} dx$

4. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

5. $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}} dx$

6. $\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$

7. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$

8. $\int \frac{x}{x^2-1} dx$

9. $\int Sen\frac{x}{2} dx$

10. $\int Cos\,3xdx$

11. $\int Sen^2xCosxdx$

12. $\int \tan xdx$

13. $\int Secxdx$ (Primero se multiplican, tanto numerador como denominador por Secx + tan x).

14. $\int Sec^2 2axdx$

15. $\int \frac{Senx + Cosx}{Cosx}dx$

16. $\int \frac{Senydy}{Cos^2 y}$

17. $\int (1 + Tanx)^2 dx$ (Primero se desarrolla la potencia).

18. $\int e^{3Cos\,2x} Sen2xdx$

19. $\frac{dx}{1 + Cosx}$

20. $\int (Tan2x + Sec\,2x)^2 dx$ (Primero se desarrolla la potencia).

Acorde con la lista sobre problemas ambientales solicitada en la sección A, propongo posibles soluciones y si es pertinente trato de implementarlas en asociación con otros estamentos de la comunidad educativa, el vecindario en donde resido y con mi familia.

Como aplicación al tema desarrollado, resuelvo la siguiente situación problemática que se me puede presentar en la vida real.

Suponga que usted es un microempresario piscícola y adecúa un estanque en el que se siembran 1000 mojarras. Si el crecimiento de la población de peces está descrita por la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt}2k\sqrt{P+1}$:

a) Determino P(t) sabiendo que $P(0) = P_0$

b) Si después de 3 meses hay 1400 peces, cuántos habrá al final de un año?

c) Si el máximo número de mojarras que puede albergar el estanque es de 6000, ¿dentro de cuánto tiempo se alcanzará este límite?

d) Para la adecuación del estanque, ¿qué cuidados debo tener en cuenta, de tal manera que no cause perjuicios al medio ambiente?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA