GUÍA 2

¿Y QUÉ SON LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA?

La espiral LOGARÍTMICA es la que más se prodiga en la naturaleza. Si observamos las hojas de una rosa, las piñas de piñones o las margaritas, podemos contemplar familias enteras de espirales logarítmicas.
En los efectos devastadores de un tornado encontramos esta curva y los pequeños tornados que se producen en los lavabos dibujan espirales. También existe un molusco llamado NAUTILUS, que presenta la espiral logarítmica.

INDICADORES DE LOGRO

- Identifica y describe las funciones exponencial y logarítmica con sus elementos y construye sus gráficas, ya sea manualmente o usando una aplicación como CABRI
- Maneja la equivalencia entre las funciones exponencial y logarítmica y pasa de una a otra nomenclatura
- Interpreta y usa adecuadamente las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica
- Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- Reconoce las fórmulas para diferenciar las funciones exponencial y logarítmica, las mecaniza y las usa adecuadamente

- Plantea y resuelve problemas de aplicación
- Comprende algunas de sus emociones y sentimientos **(PERSONAL)**
- Reconoce sus factores motivacionales
- Manifiesta en forma apropiada sus sentimientos y emociones
- Identifica algunas emociones de los demás
- Identifica qué cambios debe realizar en su comportamiento y actitud personal
- Se apropia de elementos para la formulación de su proyecto de vida
- Asume la diversidad y sus errores como una oportunidad de aprendizaje

Con un compañero leemos y comentamos el siguiente contenido:

Fuera del tema de matemáticas que trataremos en esta guía, haremos alusión a la **C.L.G. PERSONAL** que “es la capacidad que tiene la persona para reconocer y valorar sus potencialidades, limitaciones emocionales, afectivas e intelectuales”.

1. Estoy próximo a graduarme como bachiller. Es el momento de hacer un inventario de las decisiones que he tomado, al igual que las que debo tomar para orientar mi vida; de la misma manera, reflexionar sobre las expectativas y los temores que despierta en mí el hecho de estar a punto de salir del colegio. Es definitivo aplicar estas reflexiones al campo laboral, ya que las emociones inciden profundamente en el desempeño personal en el mundo del trabajo. La motivación o desmotivación, las emociones que generan insatisfacción, las consecuencias de actuar impulsivamente, etc., son aspectos que deben tenerse en cuenta.

2. Como ya me conozco, elaboro un listado que tenga que ver con los siguientes aspectos:

   a. Decisiones tomadas.

   b. Decisiones que debo tomar hacia el futuro.

   c. Expectativas que tengo al terminar mi bachillerato.

   d. Los temores e inseguridades que tengo frente a mi futuro.

A

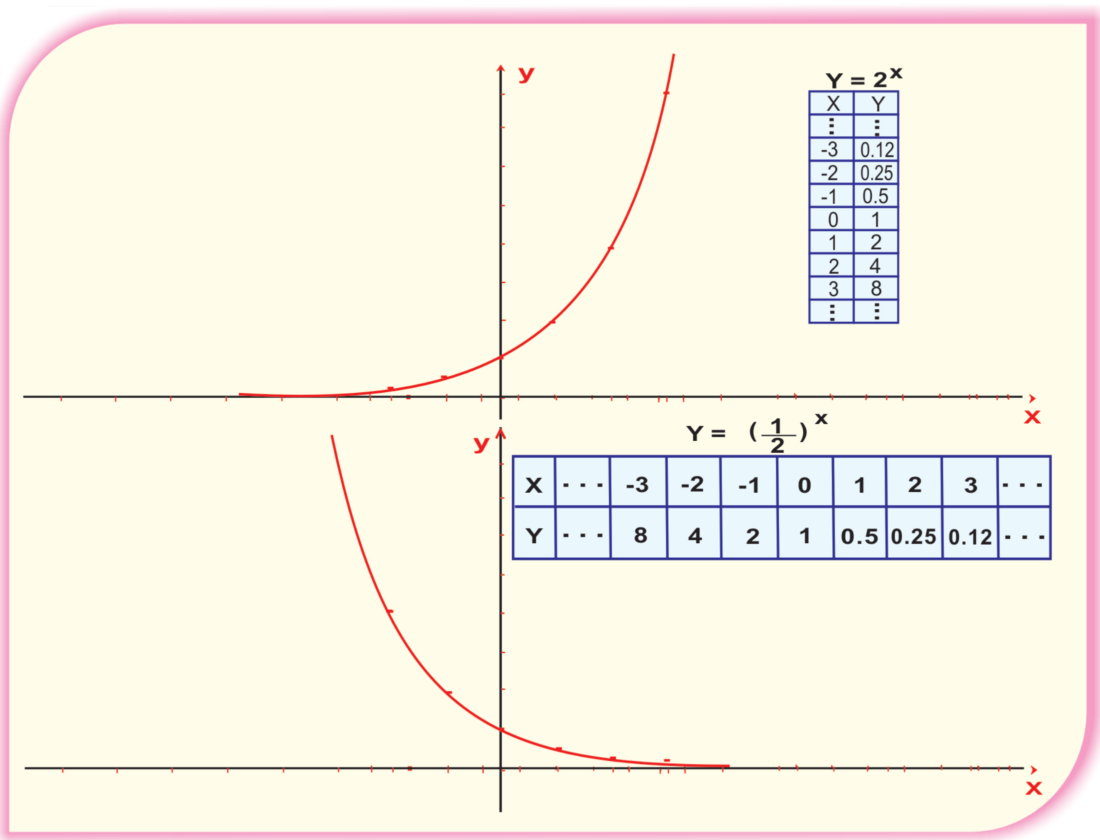
Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

- Defino el dominio y el recorrido de una relación R de A sobre B.
- ¿Cómo puedo obtener la relación inversa?
- ¿Cómo son entre si las gráficas cartesianas de una relación y de su inversa?

  Discuto mis respuestas con otros compañeros del subgrupo y por último compartimos con el profesor para lograr mayor comprensión.

Con los compañeros de subgrupo nos disponemos a analizar los conceptos que sobre funciones exponencial y logarítmica encontramos a continuación. Debe anotarse en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde. Es el momento de conocernos como personas y cómo estamos en relación con esta competencia al realizar nuestro trabajo.

La función exponencial toma la forma $Y = F(x) = b^x$, en donde la base b es un real positivo diferente de 1. Esta función tiene por dominio los reales y por recorrido los reales positivos, como puede comprobarse si se tabulan y grafican las funciones $Y = 2^x$ y $Y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, por ejemplo, como se ve en la gráfica:



$Y = 2^x$

X	Y
⋮	⋮
-3	0.12
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8
⋮	⋮

$Y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

X	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Y	...	8	4	2	1	0.5	0.25	0.12	...

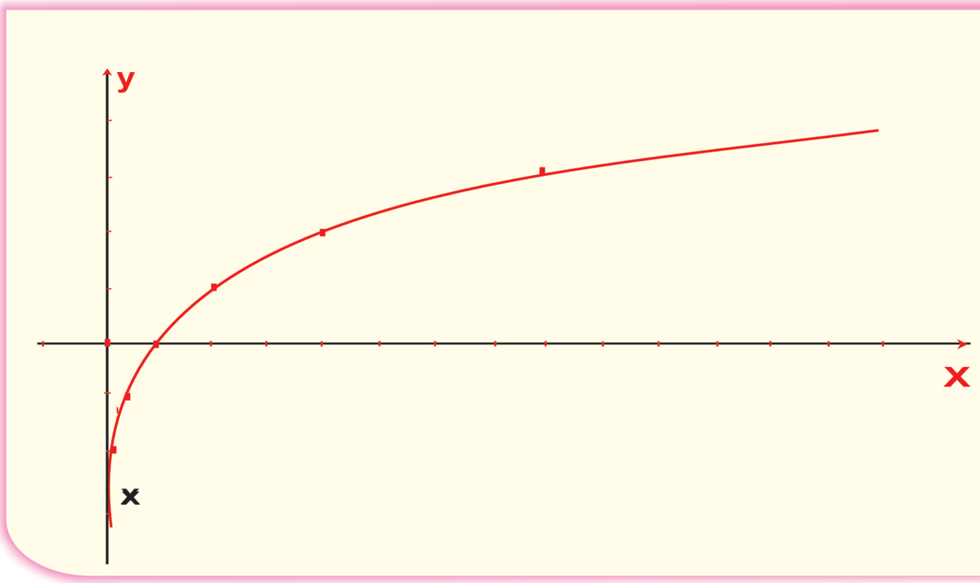
Nótese que en la función exponencial la base es constante y el exponente es variable, a diferencia de las potencias (como en $Y = X^n$), en donde la base es variable y el exponente es constante.

De acuerdo con la gráfica anterior, independientemente del valor de la base b, ¿para cuáles valores de x es b^x igual a 1?

Como propiedades de la función exponencial se tienen: si $b^x = b^y$, entonces $x = y$ (si las bases son iguales, los exponentes también son iguales); y si $a^x = b^x$, entonces $a = b$ (si los exponentes son iguales, las bases también son iguales).

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. En efecto, si en Y=bx se intercambian el dominio y el recorrido para obtener la inversa, resulta X=by, expresión que equivale a $Y = Log_bX$, que es la función logarítmica.

Por definición de inversa, la función logarítmica tiene por dominio los reales positivos y por recorrido los reales, lo que puede verificarse construyendo la gráfica de $Y = Log_2X$, por ejemplo:



$Y=Log_2x$

Y	X
⋮	⋮
0.12	-3
0.25	-2
0.5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3
⋮	⋮

Para obtener la tabla es suficiente invertir los valores de la tabla correspondiente a $Y = 2^x$ elaborada antes, aunque podría calcularse reescribiendo la función logarítmica en su equivalente exponencial y usando luego las propiedades anotadas antes, así:

$Y = Log_2 X \Leftrightarrow 2^y = X$

Si $X = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^y \Rightarrow 2^{-3} = 2^y \Rightarrow Y = -3$ (Si las bases son iguales, los exponentes también lo son).

Si $X = 8 \Rightarrow 8 = 2^y \Rightarrow 2^3 = 2^y \Rightarrow Y = 3$ (Por la misma razón).

Para la construcción de la curva basta localizar los puntos indicados en la tabla y luego interpolar con un trazo suave. Si se desea elaborar dicha gráfica usando CABRI, por ejemplo, debe tenerse en cuenta que la calculadora sólo maneja los logaritmos de base 10 y los de base natural (en base e) y por tanto un logaritmo que esté en otra base debe ser convertido a uno de estos sistemas mediante la equivalencia: $Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}$, como se demostrará más adelante. En el ejemplo propuesto, podemos pasar el logaritmo en base 2 a base 10, así: $Log_2 X = \frac{Log_{10} X}{Log_{10} 2}$.

Para cualquier valor posible de la base b, ¿cuáles valores de x hacen que su logaritmo sea igual a 0? y ¿para cuáles es igual a 1?

Por definición, existe una equivalencia entre las funciones exponencial y logarítmica que puede expresarse así: $n = b^m \Leftrightarrow m = Log_b n$, y resulta muy útil para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En la definición se observa que el logaritmo de un número real positivo n es el exponente m al que debe elevarse la base b para reproducir el número.

Existen infinidad de sistemas de logaritmación, pues la base b es cualquier real mayor que 0 y diferente de 1, pero en las calculadoras (o en tablas ya elaboradas) sólo se utilizan el decimal (base 10) y el natural o neperiano (base e, cuyo valor es aproximadamente igual a 2.71828). El logaritmo decimal de un número N se escribe LogN, omitiendo la base y el logaritmo natural de un número N se escribe lnN.

Ejemplos: escribir las siguientes expresiones en una notación equivalente.

a) $Log_5 25=2$; b) $2^3=8$; c) $Log_3(1/9)=-2$; d) $32^{\frac{2}{5}} = 4$; e)Log 0.001=-3; f)lnX=a;

Solución:

a) $Log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$

b) $2^3 = 8 \Leftrightarrow Log_2 8 = 3$

c) $Log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$;

d) $32^{\frac{2}{5}} = 4 \Leftrightarrow Log_{32} 4 = \frac{2}{5}$

e) $Log 0.001 = -3 \Leftrightarrow 10^{-3} = 0.001$;

f) $\ln X = a \Leftrightarrow e^a = X$

Usando la equivalencia entre las dos notaciones, calcule X ó Y ó b, según el caso:

a) $Y = Log_4 8$. Sol: $Y = Log_4 8 \Leftrightarrow 4^Y = 8 \Rightarrow (2)^{2Y} = 2^3 \Rightarrow 2^Y = 3 \Rightarrow Y = \frac{3}{2}$

b) $Log_3 X = -2$. Sol: $Log_3 X = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = X \Rightarrow X = \frac{1}{9}$

c) $Log_b 1000 = 3$. Sol: $Log_b 1000 = 3 \Leftrightarrow b^3 = 10^3 \Rightarrow b = 10$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. $Log_b(XY) = Log_b X + Log_b Y$

   En efecto: si $m = Log_b X$ y $h = Log_b Y \Rightarrow X = b^m$ y $Y = b^h$

   Si multiplicamos ordenadamente queda: $XY = b^{m+h}$

   Y pasando a la forma logarítmica se tiene: $Log_b(XY) = m+h$

   Reemplazando resulta: $Log_b(XY) = Log_b X + Log_b Y$,
   como se quería demostrar.

2. $Log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = Log_b X - Log_b Y$

   En efecto, si en la primera ecuación de la demostración anterior dividimos ordenadamente, resulta: $\frac{X}{Y} = b^{m-h}$

   Y escribiendo en notación logarítmica: $Log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = m-h$

   Reemplazando: $Log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = Log_b X - Log_b Y$, como se quería probar.

3. $Log_b X^n = nLog_b X$

En efecto: si $u = Log_b X \Rightarrow X = b^u$

Si elevamos a la n los dos miembros: $X^n = b^{un}$

Y pasando a notación logarítmica: $Log_b X^n = nu$

Reemplazando: $Log_b X^n = nLog_b X$ como se deseaba demostrar.

4. $Log_a X = \dfrac{Log_b X}{Log_b a}$

En efecto: Si $Y = Log_a X \Rightarrow a^Y = X$

Si tomamos log con base b en los dos lados, resulta:

$Log_b a^Y = Log_b X$, o sea: $YLog_b a = Log_b X$

Despejando queda: $Y = \dfrac{Log_b X}{Log_b a}$

Reemplazando la primera ecuación: $Log_a X = \dfrac{Log_b X}{Log_b a}$ como se quería demostrar.

5. En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero y el logaritmo de la base es uno.

En efecto, $Log_b 1 = 0$, porque toda base $b \neq 0$, elevada a la 0 es 1; y $Log_b b = 1$, porque la base **b** elevada a la 1 es igual a **b**.

Como aplicación de las propiedades enunciadas, encontremos formas logarítmicas más sencillas en los siguientes casos:

a) $Log_b\left(\dfrac{r}{uv}\right)$. Sol: $Log_b\left(\dfrac{r}{uv}\right) = Lob_b r - Log_b (uv) = Log_b r - Log_b u - Log_b v$

(Primero se aplica logaritmo de un cociente y luego logaritmos de un producto).

b) $Log_b\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{3}{5}}$. Sol: $Log_b\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{5} Log_b\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{3}{5}(Log_b m - Log_b n)$ (Primero se usa logaritmo de una potencia y luego logaritmo de un cociente).

c) $Log_b \sqrt[5]{mq}$. Sol: $Log_b \sqrt[5]{mq} = Log_b (mq)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5} Log_b (mq) = \dfrac{1}{5}(Log_b m + Log_b q)$.

(Primero se reescribe la expresión sin el radical; se aplica logaritmo de una potencia y luego logaritmo de un producto).

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Son aquellas en las cuales aparecen como variable alguno de los elementos de éstas funciones. Su solución se fundamenta en las propiedades de esas mismas funciones.

En los siguientes casos, resolver la ecuación:

a) $7^{X+2} = 343$. Sol: $7^{X+2} = 343 \Rightarrow 7^{X+2} = 7^3 \Rightarrow X + 2 = 3 \Rightarrow X = 1$
(Si las bases son iguales, los exponentes también lo son).

b) $Log_8(X+1) + Log_8(X+3) = 1$. Sol: $Log_8(X+1) + Log_8(X+3) = 1 \Leftrightarrow$

$Log_8(X+1)(X+3) = +Log_8 8$ (Inversión del logaritmo de un producto y por ser el logaritmo de la base igual a 1).

(X+1)(X+3)=8 (Eliminando Log_8 a los dos lados de la igualdad). Luego:

$$X^2 + 4X + 3 - 8 = 0 \Rightarrow (X+5)(X-1) = 0 \Rightarrow X = -5 \vee X = 1$$

(Resolviendo la ecuación cuadrática resultante). De estas raíces se descarta el - 5 porque a un número negativo no se le puede sacar logaritmo y la solución es X = 1.

RECORDERIS: el interés se llama compuesto cuando los intereses que gana el capital se le suman periódicamente al capital prestado, a intervalos iguales de tiempo, constituyéndose de esa manera en un nuevo capital al final de cada unidad de tiempo.

Si c es un capital inicial, prestado a un tanto por uno anual r durante t años, la fórmula para calcular el capital final o monto C es: $C = c(1 + r)^t$, que como se observa es una función exponencial cuya solución puede hacerse de manera sencilla al tomar logaritmos a los dos lados, aplicar las propiedades y luego despejar la variable que se desee.

A propósito, la tasa de interés bancario corriente en Colombia la fija cada mes, la Superintendencia Bancaria y, por ejemplo, para el mes de mayo de 2005 será de 19.02 por ciento anual.

Con respecto a la tasa de interés de usura el Código Penal en el artículo 305 señala:

ARTÍCULO 305 - Usura. El que reciba o cobre, directa o indirectamente, a cambio de préstamo de dinero o por concepto de venta de bienes o servicios a plazo, utilidad o ventaja que exceda en la mitad del interés bancario corriente que para el período correspondiente estén cobrando los bancos, según certificación de la Superintendencia

Bancaria, cualquiera sea la forma utilizada para hacer constar la operación, ocultarla o disimularla, incurrirá en prisión de dos (2) a cinco (5) años y multa de cincuenta (50) a doscientos (200) salarios mínimos legales mensuales vigentes.

Lo anterior significa que tasas de interés que excedan 1.5 veces el interés bancario corriente son de usura. Por ejemplo, tasas de interés superiores al 28,53 por ciento efectivo anual serán usura en mayo de 2005.

Ejemplo 1: cuál es el monto de un capital inicial de $500000 impuesto al 18% anual durante 3 años.

Solución: aquí el capital inicial es c=500000; como el interés es 18% anual entonces cada peso en un año producirá un interés r= $\frac{18}{100} = 0.18$ el tiempo en años es t=3.

Luego: $LogC = Log500000 + 3\log 1.18 \Rightarrow$C=821516 (Monto o capital final).

Ejemplo 2: resolver el problema anterior capitalizando trimestralmente, es decir, sumando los intereses al capital cada 3 meses.

Solución: el capital inicial es c=500000; como en un año hay 4 trimestres, en un trimestre el valor del interés por peso es $r = \frac{0.18}{4} = 0.045$; el tiempo en trimestres es t=12. Por tanto: $LogC = Log500000 + 12\log 1.045$. Luego C= 847940.71, que es el monto o capital final.

Ejemplo 3: en cuánto tiempo un capital de $200000 a un interés anual del 20% se habrá duplicado.

Solución: el capital inicial es c=200000; en un año un peso rinde $\frac{20}{100} = 0.2$; el monto o capital final es C=400000. Luego: $LogC = Logc + tLog(1 + r)$; despejando t, queda: $t = \frac{LogC - Logc}{Log(1 + r)}$; reemplazando: $t = \frac{Log400000 - Log200000}{Log1.2}$; t=3.8 años.

Ejemplo 4: un modelo matemático del crecimiento de la población mundial, para periodos cortos de tiempo, está dado por $P = P_0e^{rt}$, donde:

P_o = Población cuando t = 0

r = Tasa o índice de crecimiento anual (a cierto porcentaje anual)

t = Tiempo en años

P = Población en el tiempo t

¿Cuánto tardará en duplicarse la población de la tierra si continúa creciendo a un ritmo del 1.3% anual?

Aquí, la población inicial es P_o, su duplo será 2 P_0 , $r = \frac{1.3}{100} = 0.013$. Luego:

$P = P_0 e^{rt} \quad \Rightarrow \quad 2P_0 = P_0 e^{0.013t} \Rightarrow 2 = e^{0.013t}$ Si tomamos ln a los dos lados, queda:

$\ln 2 = 0.013t$. Y despejando: $t = \frac{\ln 2}{0.013} = 53.3$ años.

FÓRMULAS PARA DERIVAR LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

El número e se define así: $\lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!} = 2.71828\ldots$

1. Si $Y = Log_b U \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dLog_b U}{dx} = \frac{1}{U} Log_b e \frac{dU}{dx}$, si U=f(x)

En efecto: sea $Y = Log_b U$. Si calculamos valores finales, resulta:

$Y + \Delta y = Log_b (U + \Delta u)$, y despejando: $\Delta y = Log_b (U + \Delta u) - Log_b U$

Por las propiedades de los logaritmos: $\Delta y = Log_b \frac{U + \Delta u}{U} = Log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{U}\right)$

Luego: $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u} Log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{U}\right) = \frac{1}{U} * \frac{U}{\Delta u} Log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{U}\right) \Rightarrow$

Por tanto: $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{U} Log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{U}\right)^{\frac{U}{\Delta u}}$. Si se calcula $\frac{dy}{du}$ queda:

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{U} \lim_{\Delta u \to 0} Log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{U}\right)^{\frac{U}{\Delta u}} = \frac{1}{U} Log_b \left\{ \lim_{\Delta u \to 0} \left(1 + \frac{\Delta u}{U}\right)^{\frac{U}{\Delta u}} \right\}$$

Como se dijo antes, la expresión que está entre llaves corresponde a la definición de e. Luego: $\frac{dy}{du}=\frac{1}{U}Log_b e$. Y como U=F(x), se tiene: como se quería probar.

2. Si $Y=b^U \Rightarrow \frac{dY}{dx}=\frac{db^U}{dx}=b^U \ln b\frac{dU}{dx}$ si U = F(x). En efecto:

$Y=b^U \Rightarrow Log_b Y = ULog_b b$ (tomando logaritmos a los dos lados de la igualdad original). Si se deriva implícitamente, resulta:

$\frac{d}{dx}Log_b Y=\frac{d}{dx}U \Rightarrow \frac{1}{Y}Log_b e\frac{dY}{dx}=\frac{dU}{dx}$. Y despejando: $\frac{dY}{dx}=\frac{Y}{Log_b e}\frac{dU}{dx}$.

Como $Y=b^U$ y $Log_b e=\frac{\ln e}{\ln b}=\frac{1}{\ln b}$ al reemplazar queda: $\frac{db^U}{dx}=b^U\ln b\frac{dU}{dx}$

como se deseaba probar.

Ejemplos: calcular $\frac{dY}{dx}$ en los siguientes casos:

a) $Y=Log_b(3X^2-5)$

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d}{dx}Log_b(3X^2-5) \Rightarrow \frac{dY}{dx}=\frac{1}{3X^2-5}Log_b e\frac{d(3X^2-5)}{dx}=\frac{6X}{3X^25}Log_b e$$

b) $Y=\ln(X+3)^2 \Rightarrow Y=2\ln(X+3) \Rightarrow \frac{dY}{dx}=\frac{d2\ln(X+3)}{dx} \Rightarrow$

c) $Y=\ln(X+3)^2 \Rightarrow \frac{dY}{dx}=\frac{d\ln^2(X+3)}{dx}=2\ln(X+3)\frac{d\ln(X+3)}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{dY}{dx}=2\ln(X+3)\left(\frac{1}{X+3}\right)\ln e\frac{d(X+3)}{dx}=\frac{2}{X+3}$$

d) $Y=\ln\frac{X^4}{3X-4} \Rightarrow Y=\ln X^4-\ln(3X-4) \Rightarrow Y=4\ln X-\ln(3X-4) \Rightarrow$

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d\,4\ln X}{dx}-\frac{d\ln(3X-4)}{dx}=4\left(\frac{1}{X}\right)-\frac{1}{3X-4}*3=\frac{4}{X}-\frac{3}{3X-4}$$

e) $Y=2^{3X^2} \Rightarrow \frac{dY}{dx}=2^{3X^2}\ln 2\frac{d3X^2}{dx}=2^{3X^2}\ln 2*6X$

f) $Y = X^2 3^X \Rightarrow \dfrac{dY}{dx} = X^2 \dfrac{d3^X}{dx} + 3^X \dfrac{dX^2}{dx} \Rightarrow \dfrac{dY}{dx} = X^2 * 3^X \ln 3 + 2X * 3^X$

He trabajado las funciones exponencial y logarítmica. Es posible que haya sido un tema complejo para mí, lo que pudo haber generado alguna de las siguientes situaciones, las cuales debo analizar para el conocimiento personal y así proponerme a mejorar estos aspectos.

1) Timidez, temor a las relaciones sociales, apocamiento;

2) Irascibilidad, susceptibilidad, tendencia exagerada a sentirse ofendido;

3) Falta de capacidad de dar y recibir afecto;

4) Recurro a la simulación, la mentira o el engaño;

5) Exceso de autoindulgencia ante mis errores;

6) Dificultad para controlarme en la comida, bebida, tabaco, etc.;

7) Hablar demasiado, presumir, exagerar, fanfarronear, escuchar poco;

8) Resistencia a aceptar las exigencias ordinarias de la autoridad;

9) Dificultad para comprender a los demás y hacerme comprender por ellos;

10) Dificultad para trabajar en equipo y armonizarme con los demás; etc.

¿Cómo puedo superar mis falencias? (Escribo mi respuesta en mi carpeta personal).

Si es mi voluntad, comparto mi autoevaluación con el subgrupo. Esto será de gran utilidad en mi desempeño laboral.

Si se desea afianzar conocimientos, es necesario practicar lo aprendido, pues sólo así alcanzaremos nuestra meta. Por tanto, con un compañero desarrollamos las siguientes actividades:

Escribir las siguientes expresiones en notación exponencial:

1. $Log_2 4 = 2$
2. $Log_5 125 = 3$
3. $Log_9 \dfrac{1}{81} = -2$
4. $Log 1000 = 3$
5. $Log 0.01 = -2$
6. $Log_3 \dfrac{1}{27} = -3$
7. $Log \dfrac{1}{1000} = -3$
8. $\ln 1 = 0$
9. $Log_{125} \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{3}$
10. $Log_b X = Y$

Escribir en notación logarítmica las siguientes expresiones:

11. $25 = 5^2$
12. $27 = 3^3$
13. $10000 = 10^4$
14. $\dfrac{1}{100} = 10^{-2}$
15. $\dfrac{1}{8} = 2^{-3}$
16. $1 = 2^0$
17. $6 = 36^{\frac{1}{2}}$
18. $2 = 8^{\frac{1}{3}}$
19. $81 = 27^{\frac{4}{3}}$
20. $\dfrac{1}{2} = 16^{-\frac{1}{4}}$

Usando las propiedades adecuadas, resuelva la ecuación:

21. $Log_5 X = 2$

22. $Log_{16} X = \frac{1}{2}$

23. $Log_{25} X = -\frac{1}{2}$

24. $Log X = 3$

25. $\ln X = -2$

26. $\ln X = -\frac{1}{2}$

27. $Log_x 4 = \frac{1}{2}$

28. $Log_x \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}$

29. $Log_{(x+1)} 24 = Log_3 24$

30. $Log_2 (X - 1) = Log_2 10$

Calcular la derivada de la función con respecto de la variable en:

31. $Y = 10^x$

32. $Y = 2^{X^2}$

33. $Y = \frac{3^X}{4^X}$

34. $Y = Log Cos X$

35. $Y = 7^{Cos X}$

36. $Y = 2^X 3^{X^2}$

37. $Y = 2^{\ln X}$

38. $Y = Log_3 (2X)$

39. $Y = \pi^X + X^\pi + \pi^\pi$

40. $XY + e^{2X} = Y^2 - \ln X$

El desarrollo de la guía hasta este paso, pudo haber dejado en mí una autoestima ALTA Y POSITIVA ó por el contrario, BAJA.

Ahora, determino cómo está mi autoestima mediante el siguiente test; para cada pregunta opto por la respuesta que se acerque más a la manera en que hablo conmigo mismo, pienso en mí o siento dentro de mí mismo. Al escoger cada respuesta, reflexiono sobre como incidirá, positiva o negativamente, en el campo del trabajo.

1. Cuando me levanto por la mañana y me miro al espejo, ¿qué es lo que digo?

   a) ¡Me veo muy bien esta mañana y estoy a punto de tener un gran día!

   b) ¡Oh, no, otra vez me encuentro, no es posible, qué jartera!

2. Cuando fallo en algo o cometo un grave error, ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

a) Todo el mundo tiene derecho a fallar o cometer errores todos los días.

b) ¡Ya la embarré otra vez! ¿Es que no puedo hacer nada bien? Parece como si no supiera.

3. Cuando tengo éxito en algo, ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

   a) ¡Felicidades, debo sentirme orgulloso de mí mismo!

   b) Podría haberlo hecho mejor si me hubiera esforzado lo suficiente.

4. Acabo de hablar con alguien que tiene autoridad sobre mí (como uno de mis padres, un entrenador, o un maestro), ¿qué es lo que me digo a mi mismo?

   a) He llevado este asunto muy bien.

   b) ¡He actuado de una manera tan estúpida! Siempre digo bobadas.

5. Acabo de salir de la primera reunión del club en el que me inscribí, ¿qué me digo a mí mismo?

   a) Estuvo divertido, conocí a algunas personas que me agradaron. Y hasta se rieron del chiste que conté.

   b) Hablé demasiado y no le caí bien a nadie. A todo el mundo le desagradó mi chiste.

6. Acabo de salir de la casa de un amigo, después de jugar juntos, ¿qué me digo a mí mismo?

   a) Fue muy divertido. ¡Realmente le caigo bien a mi amigo!

   b) Mi amigo solamente me hizo creer que le caía bien. Probablemente nunca me volverá a invitar.

7. Cuando alguien me dice un cumplido o dice “me caes bien”, ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

   a) ¡Me lo merezco!

b) Nadie me dice un cumplido a menos que quiera algo de mí. Además no me lo merezco.

8. Cuando alguien a quien estimo me falla, ¿qué me digo a mí mismo?

a) Han herido mis sentimientos, pero me repondré. Después puedo tratar de averiguar qué fue lo que pasó.

b) Esto prueba que no le caigo bien a esa persona.

9. Cuando le fallo a una persona que estimo, ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

a) No es bueno, y no es gracioso, pero algunas veces las personas llegan a fallar. Reconozco lo que hice y sigo adelante con mi vida.

b) ¿Cómo pude hacer algo tan terrible? Debería sentirme avergonzado de mí mismo.

10. Cuando me siento necesitado o inseguro, ¿qué me digo a mí mismo?

a) Todos se sienten así algunas veces. Me acuesto abrazado a mí almohada, y pronto me sentiré bien.

b) ¡Debo madurar! No puedo ser tan infantil. ¡Eso es muy desagradable!

Para la calificación, anótese 10 puntos por cada respuesta (a) y 5 puntos por cada respuesta (b). Después sume los valores asignados y use la siguiente convención para encontrar la calificación de su autoestima:

90-100 su autoestima es ALTA y POSITIVA.

75-90 su autoestima PODRÍA SER MEJOR.

60-75 su autoestima es BAJA. Pero ahora ya lo sabe y podrá cambiar.

50-60 su autoestima es BAJÍSIMA, pero tratará de superarse.

Como aplicación de las funciones exponencial y logarítmica, desarrollo las siguientes cuestiones:

Las funciones exponencial y logarítmica, amén de abreviar algunas operaciones, tienen aplicación en la solución de problemas relacionados con el crecimiento de poblaciones grandes, en el cálculo de la edad de fósiles con la técnica del carbono 14... Usando el modelo matemático que se indica, desarrollo lo siguiente:

1) De acuerdo con datos de la ONU, la población mundial en el 2000 era de seis mil cien millones. Si la tasa de crecimiento anual es de 1.4%, uso el modelo matemático $P(t)=P_0e^{Kt}$, en donde P_0 es la población en miles de millones cuanto t=0; K es la tasa de crecimiento anual (n% = $\frac{n}{100}$) y está calculada teniendo en cuenta las tasas de natalidad y de mortalidad de la población; t el tiempo en años y P es la población en el tiempo t. Calculo:

    a) De acuerdo con el modelo, ¿Cuál será la población mundial en el 2010?

    b) ¿En cuántos años se duplicará la población?

    c) ¿Cuándo la población mundial será de 50 mil millones? (ésta es la cantidad que los demógrafos creen será la máxima para que el planeta pueda proporcionar alimento).

2) Alcohol y conducción de vehículos

Es posible determinar la concentración de alcohol en la sangre de una persona mediante un dispositivo que mide el grado de alcoholemia. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico obedece aproximadamente al modelo matemático $R=6e^{KX}$, donde x: es la concentración de alcohol en la sangre y k una constante.

a) Al suponer una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% (R = 10) de sufrir un accidente, ¿cuál es el valor de la constante? (Use las propiedades de los logaritmos para despejar k).

b) Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo para diferentes concentraciones de alcohol (0.17, 0.19,...).

c) Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100%.

d) Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser inmovilizado y multado?.

e) En el espacio laboral, si soy el conductor de una empresa y manejo con un grado de alcoholismo no permitido, ¿qué consecuencias se pueden presentar para mi estabilidad laboral?

f) ¿Qué sentimientos despierta en usted una persona que conduce en estado de embriaguez?

g) Si usted ha conducido un vehículo habiendo consumido licor, ¿cómo considera esta conducta y qué propósito puede formular para corregirse?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA