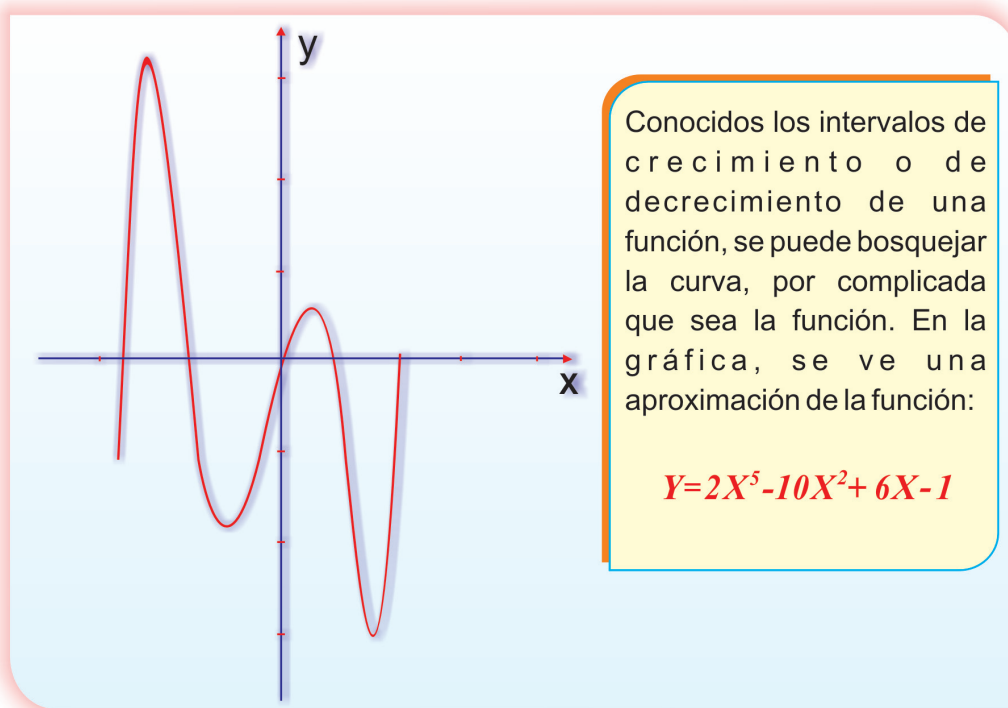


## CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO DE FUNCIONES



### INDICADORES DE LOGRO

- Define e interpreta los conceptos creciente o decreciente aplicado a una función bajo los criterios algebraico, geométrico y analítico
- Calcula e interpreta adecuadamente los intervalos donde una función crece o decrece
- Utiliza los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de una función para graficar aproximadamente la curva, es decir, bosquejarla
- Analiza las ventajas y desventajas de las alternativas posibles, para elegir la más adecuada (**TOMA DE DECISIONES**)
- Asume responsabilidad por las decisiones tomadas
- Comunica sus decisiones en forma oportuna
- Toma decisiones en el momento conveniente



Con los compañeros leemos y analizamos la siguiente información:

Fuera del tema de los extremos de una función, trataremos la C.L.G. TOMA DE DECISIONES, entendida como un proceso que se extiende a lo largo de toda la vida, pues es prácticamente imposible imaginar un campo de mayor trascendencia para el ser humano que el de la toma de decisiones. Al formular mi proyecto de vida, estoy tomando la decisión más importante de mi vida, pues de ella depende mi futuro. Es por esto que entender y vivir la competencia es fundamental para mi crecimiento personal.

Una de las decisiones más importantes en nuestra vida es, por ejemplo, seleccionar una profesión acorde con nuestras aspiraciones. Se trata de explorar y de experimentar en el mundo de nuestro quehacer estudiantil y, en un futuro, del campo laboral. Se trata también de comprender nuestras propias aptitudes, intereses y habilidades, y de combinar todo esto para crear un marco favorable para nuestra vida. Tendremos muchas oportunidades para descubrir y redescubrir actividades que se adapten a nuestro cambiante estilo de vida. Es importante que participemos activamente en este proceso de la toma de decisiones.

La toma de decisiones, ahora y en el futuro, comienza en uno mismo, en la conciencia que se tiene del mundo que nos rodea y en nuestra habilidad para descubrir aquello que es verdaderamente importante para alcanzar nuestras metas.

Estemos, pues, muy atentos a las alusiones que se hagan en esta guía sobre la toma de decisiones.



Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

1) Si  $Y = \frac{X^3}{3} - 2X^2 + 3X + 1$ , determino los valores de "X" para los cuales

$\frac{dy}{dx} = 0$  y con el resultado calculo los correspondientes valores de la función "Y".



2) Para la misma función hallo los valores de "X" para los cuales la pendiente de la tangente geométrica es igual a 1 y luego busco los valores correspondientes de la función "Y".

3) Resuelvo las inecuaciones:

a)  $X^2 + 2X - 3 > 0$

b)  $X^3 - 4X < 0$

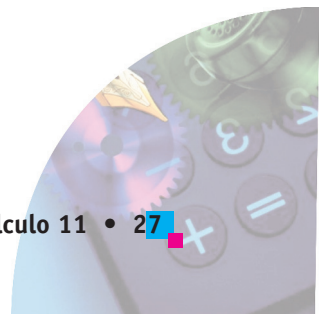
Si tengo dificultades para obtener los resultados, consulto la información en las fuentes disponibles.

Ahora examino la siguiente lista y, con toda sinceridad, determino mi propia situación, como un buen punto de partida para introducirme en "la toma de decisiones". Escribo mis conclusiones para usarlas más adelante.

- a. Para determinar el conocimiento que tengo de mí mismo, trato de descubrir mis intereses, mis aptitudes, mis habilidades y limitaciones.
- b. Observo el desempeño de otras personas en nuestra institución, en mi familia y en mi comunidad y hablo con ellos acerca de sus experiencias en la actividad que desarrollan.
- c. Me trazo algunos logros a mediano y largo plazo, acordes con las deducciones hechas.



Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde y si es preciso, elaboro diagramas.



## LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO Ó DE DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Algebraicamente una función  $Y = F(x)$  es CRECIENTE en todos los intervalos de su dominio en donde al aumentar o disminuir el valor de la variable "X", la función "Y" también aumenta o disminuye, y es DECRECIENTE en aquellos intervalos en los cuales al aumentar o disminuir la variable "X", la función "Y" disminuye o aumenta, o sea:

$$F(x) \text{ CRECE} \Leftrightarrow X_0 < X_1 \Rightarrow Y_0 < Y_1$$

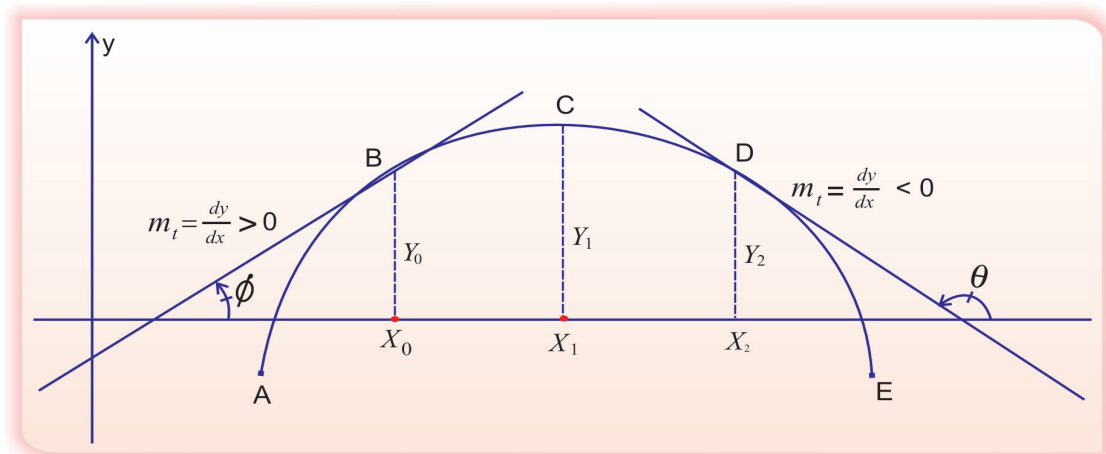
$$F(x) \text{ DECRECE} \Leftrightarrow X_0 > X_1 \Rightarrow Y_0 > Y_1$$

Geoméricamente, una función es CRECIENTE en aquellos intervalos de su dominio en los cuales su gráfica es ascendente y DECRECIENTE en los intervalos en donde la gráfica es descendente.

Analíticamente, una función es CRECIENTE en aquellos intervalos de su dominio

en los cuales  $\frac{dy}{dx} > 0$  y es DECRECIENTE en los intervalos en donde  $\frac{dy}{dx} < 0$ .

En la gráfica siguiente se visualiza claramente la situación: entre A y C la curva sube y por tanto allí la función es CRECIENTE y entre D y E la curva desciende y por tanto es DECRECIENTE.



Así como es posible graficar una función bajo los conceptos de creciente o decreciente, ocurre lo mismo con nuestra vida y casi pudiéramos graficarla para comprobar si esta es creciente o decreciente, determinada por el tipo de decisiones que tomemos: si la decisión es acertada y oportuna, puede presentarse un crecimiento personal



exitoso, pero, si por el contrario las decisiones se han tomado con precipitación, sin asesoría, sin reflexión, sin análisis, entonces nos exponemos al fracaso y por tanto al decrecimiento personal.

Los criterios matemáticos expuestos justifican el procedimiento para calcular los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de una función  $Y = F(x)$ :

- 1) Se calcula la derivada de la función respecto de la variable independiente.
- 2) Se plantea la inecuación para la condición de crecimiento o de decrecimiento, ya que el método que se utilizó para resolver las inecuaciones produce al final el resultado de las dos posibilidades.
- 3) Se resuelve la inecuación y se da la respuesta de acuerdo con las condiciones impuestas.

**Ejemplo 1:** calcular los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función  
 $Y = X^3 - 12X$

**Solución:**

(1)  $Y = X^3 - 12X$  (Función dada)

(2)  $\frac{dy}{dx} = 3X^2 - 12$  (Derivando la función)

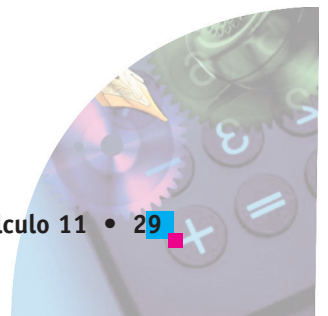
(3)  $3X^2 - 12 > 0$  (Planteando para crecimiento, por ejemplo)

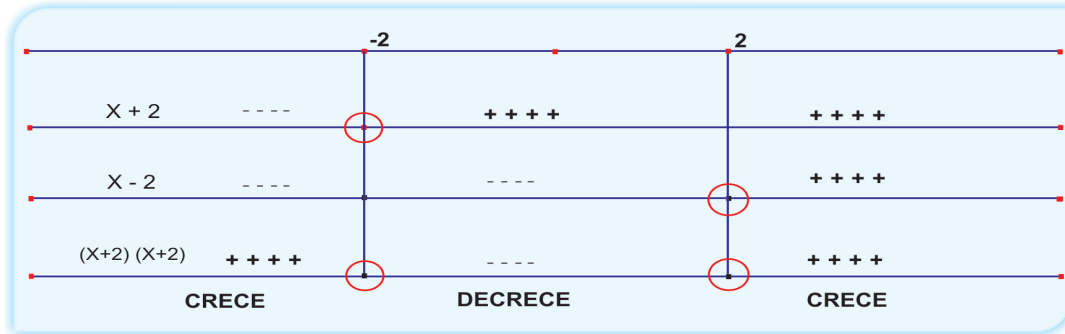
(4)  $3(X + 2)(X - 2) > 0$  (Factorizando la (3))

Si  $X + 2 > 0$  entonces  $X > -2$  ( $X+2$  es positivo a la derecha de  $-2$  y negativo a la izquierda).

Si  $X - 2 > 0$  entonces  $X > 2$  ( $X-2$  es positivo a la derecha de  $2$  y negativo a su izquierda).

Trasladamos los valores  $-2$  y  $+2$  a un eje real para solucionar la inecuación, conforme vimos en una guía anterior.





De acuerdo con el resultado, la función CRECE en  $]-\infty, -2[ \cup ]2, \infty[$ , porque en ellos la derivada es mayor que 0 y DECRECE en  $]-2, 2[$ , porque en él la derivada es negativa.

**Ejemplo 2:** calcular los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función

$$F(x) = 2x^2 - x^4$$

**Solución:**

(1)  $F(x) = 2x^2 - x^4$  (Función dada)

(2)  $F'(x) = 4x - 4x^3$  (Derivada de la función)

(3)  $F(x)$  Decrece  $\Leftrightarrow 4x - 4x^3 < 0$  (Planteando para decrecimiento)

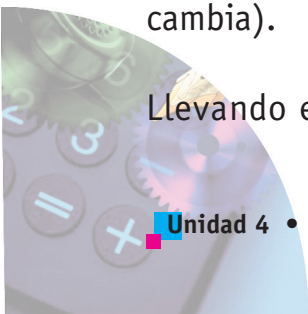
(4)  $4x(1 - x^2) < 0 \Rightarrow 4x(1 + x)(1 - x) < 0$  (Descomponiendo en factores lineales la (4)).

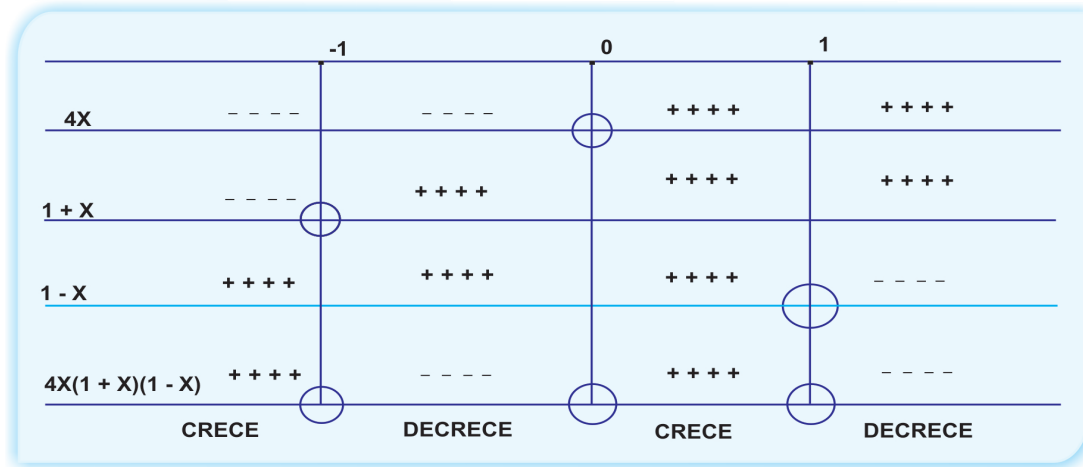
$4x > 0 \Rightarrow x > 0$  (El factor  $4x$  es positivo a la derecha de 0 y negativo a su izquierda).

$1 + x < 0 \Rightarrow x < -1$  (El factor  $1 + x$  es negativo a la izquierda de -1 y positivo a su derecha).

$1 - x > 0 \Rightarrow -1 + x < 0 \Rightarrow x < 1$  (El factor  $1 - x$  es positivo a la IZQUIERDA de 1 y negativo a su derecha. Nótese que al multiplicar por -1 el sentido de la inecuación cambia).

Llevando estos resultados a un eje real se obtiene la solución del problema, así:





De acuerdo con el resultado (la paralela correspondiente al producto) se puede afirmar que la función  $F(x)$  es CRECIENTE en  $]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$  (porque en esos intervalos la derivada es positiva) y DECRECE en  $]-1, 0[ \cup ]1, \infty[$  (porque en estos intervalos la derivada es negativa).

**Ejemplo 3:** hallar los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función

$$Y = X + \frac{4}{X}$$

**Solución:**

$$(1) Y = X + \frac{4}{X}$$

(Función dada)

$$(2) Y' = 1 - \frac{4}{X^2}$$

(Derivando la función)

$$(3) 1 - \frac{4}{X^2} > 0$$

(Planteando la inecuación para crecimiento)

$$(4) \frac{X^2 - 4}{X^2} > 0$$

(Como para todo  $X$  el valor de  $X^2$  es positivo, el sentido de la inecuación no cambia).

$$(5) \frac{(X + 2)(X - 2)}{X^2} > 0$$

(Factorizando la (4))

$$X + 2 > 0 \text{ entonces } X > -2$$

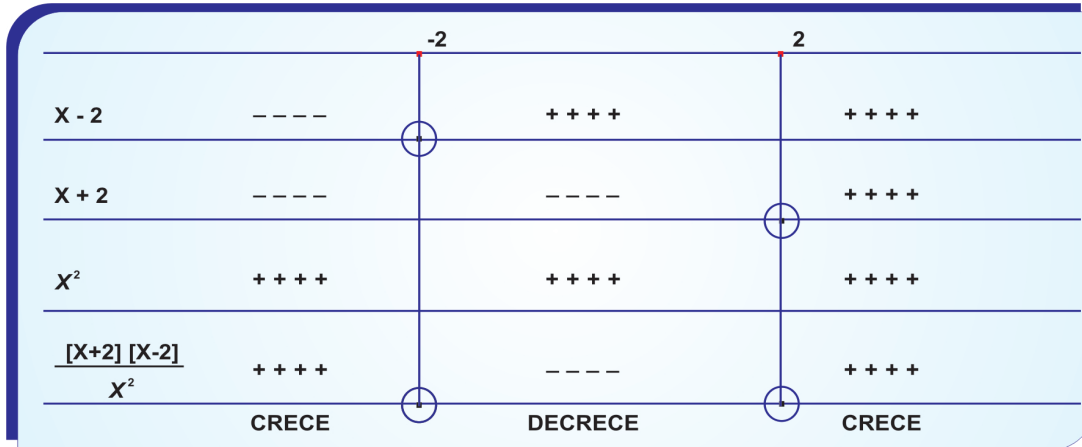
(El factor  $X + 2$  es positivo a la derecha de  $-2$  y es negativo a su izquierda).



$X - 2 < 0$  entonces  $X < 2$  (El factor  $X - 2$  es negativo a la izquierda de 2 y positivo su derecha).

$X^2$  es siempre POSITIVO para cualquier valor de  $X$ .

Y si se llevan estos resultados al eje real, se tiene:

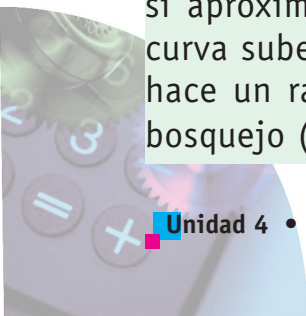


Luego la función es CRECIENTE en los intervalos  $]-\infty, -2[ \cup ]2, \infty[$  y DECRECE en  $]-2, 0[ \cup ]0, 2[$ . Cabe resaltar que debido a que en la función aparece  $\frac{4}{X}$ , la  $X$  no puede tomar el valor 0 (no se puede dividir por 0) y la situación se describe diciendo que la función no es continua y que se interrumpe cuando  $X=0$ .

### Bosquejo de la gráfica de una función

Si se desea hallar la gráfica de una función, se determina su dominio, se le asignan a la variable "X" algunos valores que estén dentro del dominio y se calculan los valores correspondientes de la función "Y". Luego se localizan en el plano cartesiano los puntos respectivos y por último se hace una aproximación de la gráfica interpolando otros valores.

Usando los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función es más sencillo encontrar un bosquejo de la gráfica, utilizando el aspecto geométrico descrito en la definición que se dio al comienzo de la guía. Para hacerlo, basta calcular los valores de la función "Y" para los extremos finitos de los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función y localizar estos puntos en el plano: si aproximándose al punto por la izquierda la función es creciente, entonces la curva sube; si es decreciente, entonces la curva baja. Por la derecha del punto se hace un razonamiento similar. Con estos elementos podemos entonces hacer un bosquejo (aproximación) de la gráfica.







Por ejemplo, para la función  $Y = X^3 - 12X$  planteada en el primer ejercicio, buscamos los valores de "Y" cuando la variable "X" tome los valores -2 ó 2 (extremos finitos de los intervalos de crecimiento o decrecimiento), así:

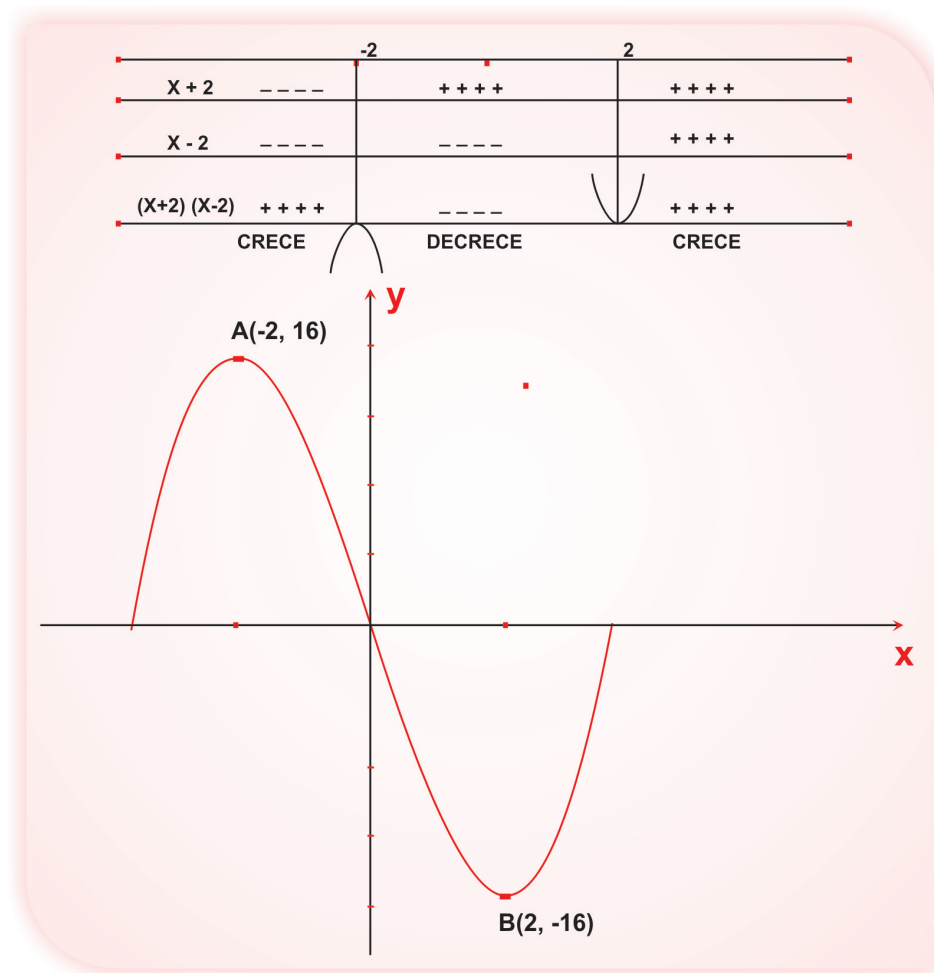
$$\text{Si } X = -2 \Rightarrow Y = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 \Rightarrow Y = 16.$$

Si  $X = 2 \Rightarrow Y = (2)^3 - 12(2) = 8 - 24 \Rightarrow Y = -16$ . Localizamos, pues, los puntos A (-2, 16) y B(2, -16).

A la izquierda de -2 la función es CRECIENTE y por tanto la gráfica SUBE; a la derecha de -2 la función es DECRECIENTE y en consecuencia la gráfica BAJA.

De igual manera, a la izquierda de 2 la función es DECRECIENTE y por tanto la gráfica BAJA; a la derecha de 2 la función es CRECIENTE, luego la gráfica sube.

En la siguiente figura se describe el proceso: la primera parte corresponde a la descripción anterior y la otra es el bosquejo de la curva:





**Ejemplo 1:** bosquejar la función  $F(x) = 2x^2 - x^4$  propuesta en el segundo ejemplo de esta guía.

**Solución:** hallamos los valores de la función “Y” cuando la variable “X” toma los valores -1, 0 y 1, respectivamente, que son los extremos finitos de los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función:

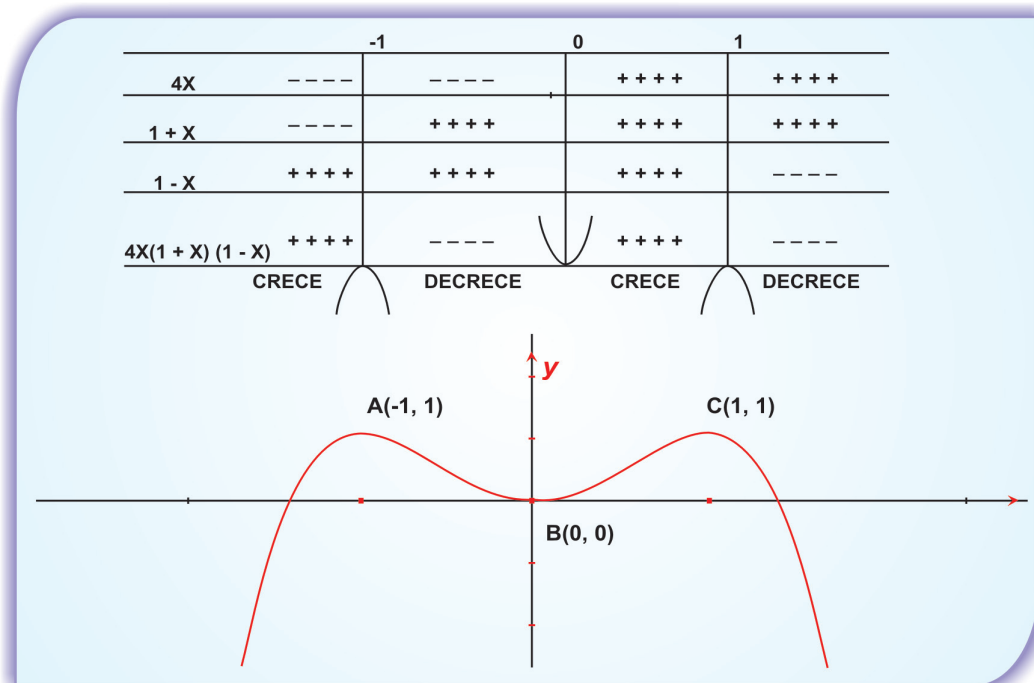
Si  $X = -1 \Rightarrow Y = 2(-1)^2 - (-1)^4 \Rightarrow Y = 2 - 1 = 1$  . Luego  $A(-1, 1)$  es un punto de la curva.

Si  $X = 0 \Rightarrow Y = 2(0)^2 - (0)^4 \Rightarrow Y = 0$ . Luego  $B(0, 0)$  es un punto de la curva.

Si  $X = 1 \Rightarrow Y = 2(1)^2 - (1)^4 \Rightarrow Y = 2 - 1 = 1$  . Luego  $C(1, 1)$  también es un punto de la curva.

A la izquierda de -1, la función es CRECIENTE y por tanto la curva sube; a la derecha de -1 es DECRECIENTE, luego la curva baja. A la izquierda de 0 la función es DECRECIENTE, luego la curva baja; a la derecha de 0 la función es CRECIENTE, luego la curva sube. A la izquierda de 1 la función es CRECIENTE, luego la curva sube; a la derecha de 1 la función es DECRECIENTE, luego la curva baja.

Haciendo un análisis similar al del primer bosquejo llegamos a la siguiente aproximación de la gráfica de la función:





## Y ¿Qué hay de la toma de decisiones?

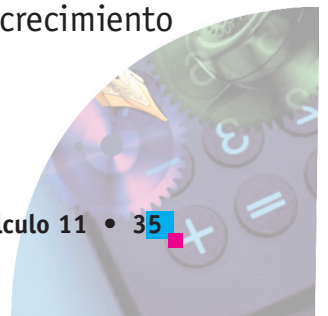
Para tomar decisiones se necesita carácter, firmeza, ser directo y frontal pero también mesura, prudencia y análisis; quienes mejores decisiones toman son muy equilibrados, no se van por ningún extremo y cuentan con información suficiente. Por lo tanto, conviene pensar en:

- No dejarse llevar por las presiones ni por las voces de otros, pues cada decisión afecta positiva o negativamente a terceros (incluso a uno mismo), pero alguien debe tomar la responsabilidad y decidir.
- No es bueno andarse por las ramas e ir preguntando a todo mundo qué se debe hacer; por lo general, quien más conoce un problema es quien decide cuál será la solución para éste.
- Deben estudiarse causas, consecuencias y posibles resultados y mantener siempre abierta la carpeta de soluciones.
- Ante la duda y la incertidumbre es aconsejable acudir a otras personas que puedan poseer mayor información.
- La creatividad es una de las mejores armas para formular soluciones y debe ser explotada.
- Cada problema puede tener una o más soluciones.



Con el fin de interiorizar los temas y afianzar mis conocimientos, guiándome por los conceptos definidos y los ejercicios resueltos, desarrollo las siguientes cuestiones, comparto mis respuestas con las de otros compañeros y con el profesor, con la finalidad de detectar posibles fallas de apreciación y tratar de corregirlas.

Para las siguientes funciones, calculo los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función y uso el resultado para bosquejar la gráfica:





- 1)  $Y = -X^2$
- 2)  $Y = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - 6X + 8$
- 3)  $Y = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$
- 4)  $Y = 3X^4 - 10X^3 - 12X^2 + 18X - 7$
- 5)  $Y = X^3 - 6X^2 + 9X + 5$

Acerca de la toma de decisiones reflexiono sobre las siguientes preguntas que me pueden dar luces sobre esta competencia, escribo mis apreciaciones y las guardo en mi carpeta personal:

### ¿Por qué me puede ser útil saber sobre la toma de decisiones?

La toma de decisiones me permitirá elegir, por ejemplo, una carrera basándome en mis experiencias personales.

### ¿Y por dónde empiezo?

Una buena manera de empezar es, indudablemente, intentando conocerme a mí mismo. Si mi profesión se adapta a mis expectativas y me brinda satisfacción, seré una persona más feliz. Como lo hice antes (al final de la sección A), analizo la lista de mis intereses, habilidades y debilidades que ya elaboré. Luego trato de encontrar carreras para las que se requieran cualidades como las que poseo.

### ¿Cómo defino mis intereses? ¿Por qué es importante definirlos?

Mis intereses son aquellas cosas que me agrada realizar. Alguna gente tiene pasatiempos como los carritos de madera o el aeromodelismo. Estos pasatiempos pueden convertirse en profesiones, tales como piloto de automóviles (el caso de Juan Pablo Montoya) o piloto de aviación. Las profesiones que más cosas en común tienen con mis propios intereses suelen ser las más gratificantes.

### ¿Cómo determino mis aptitudes?

Mis aptitudes son aquellas actividades mentales y físicas que me resultan fáciles. Quizá sea bueno dibujando animales o dándole ánimo a la gente que necesita ayuda. Estas aptitudes pueden contribuir a que haga una carrera como pintor o como consejero.



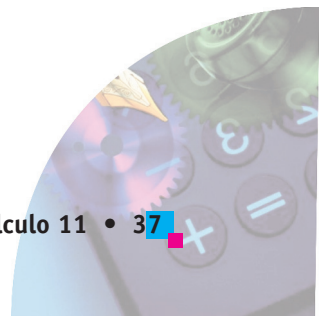
## ¿Cómo determino mis habilidades?

La palabra “habilidad” se refiere a aquellas actividades que pueden aprenderse por medio de la enseñanza o el entrenamiento. Por ejemplo, puedo mejorar mis habilidades para la matemática realizando las actividades que me propongan en la escuela o puedo asistir a una conferencia y aprender muchísimo sobre un nuevo programa de computación. Cada desempeño implica una serie de tareas que realizaré a menudo, y cada tarea implica una serie de habilidades. Mis habilidades seguirán desarrollándose durante toda mi vida.

## ¿A quién le puedo solicitar asesoría?

La familia y los compañeros son siempre un buen punto de partida. La gente que me conoce puede contarme de manera clara e informal acerca de mi desempeño. Los consejeros estudiantiles y otros miembros de la comunidad también estarán dispuestos a charlar conmigo. Planeo las preguntas que me gustaría hacer y preparo una lista antes de comenzar. Por ejemplo:

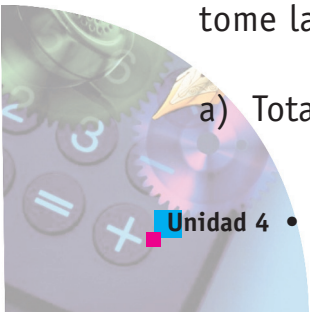
- ¿Cuáles son las tareas que hay que desempeñar en la profesión que me gusta? Existe una relación clara entre mis propios intereses, aptitudes y habilidades con aquellos que se necesitan para las tareas típicas de esa profesión?
- ¿Qué tipo de educación previa necesito para dicha profesión? ¿Dónde puedo aprender y prepararme? ¿Cómo puedo pagar dicha educación?
- ¿Cuál es el futuro de la profesión aludida?
- ¿En qué horarios se trabaja? ¿Existe algún tipo de flexibilidad? ¿Puedo trabajar desde mi casa?
- ¿Es necesario viajar?
- ¿Cuáles son las posibilidades de crecimiento que tengo en esa profesión?
- ¿Cuáles son los beneficios en cuanto a cobertura de salud y jubilación que ofrece la profesión?
- ¿Cuánto dinero ganaría?
- ¿Necesito mudarme a otra ciudad?





Como aplicación a lo estudiado en esta guía acerca de “la toma de decisiones”, me autoaplico un test, lo respondo con toda sinceridad y me cualifico de acuerdo con las condiciones que se presentan más adelante.

1. Cuando se me presenta un problema soy capaz de analizar las causas del mismo serenamente, sin acaloramiento, dejando de lado toda presión existente.
  - a) Soy capaz
  - b) Sólo algunas veces
  - c) No puedo
  
2. Me doy a la tarea de formular varias soluciones para un mismo problema antes de buscar los efectos de cada solución propuesta.
  - a) Sí
  - b) En ocasiones
  - c) No
  
3. Necesito escuchar la opinión de terceros antes de tomar una decisión crucial.
  - a) No lo necesito
  - b) Algunas veces
  - c) Sí, necesariamente
  
4. Busco soluciones diferentes a las tradicionales para atender problemas recurrentes.
  - a) Sí, siempre lo intento
  - b) Muy poco
  - c) No, me fijo en las soluciones anteriores
  
5. Considero que el trabajo en equipo es importante, pero soy consciente que ante la falta de consenso existe la necesidad de que alguien del equipo sea quien tome las decisiones.
  - a) Totalmente consciente





- b) Prefiero una votación
  - c) No me interesa
6. Si me piden que decida sobre un asunto particular en el que no tengo mayores conocimientos ni elementos de juicio, entonces:
- a) Pido tiempo y mayor información para conocer más
  - b) No decido de ninguna manera
  - c) Decido
7. Ante la duda en la toma de una decisión pido consejo de otras personas o simplemente me lanzo al agua
- a) Escucho opiniones, las sopeso y luego decido
  - b) En ocasiones
  - c) Me lanzo
8. Me gusta que otras personas aporten ideas y soluciones porque
- a) En sus ideas puede estar la solución más acertada
  - b) No me gusta, prefiero actuar en solitario
  - c) Me libran de la responsabilidad
9. Si tengo que tomar una decisión y sé que ésta afectará negativamente a una persona que estimo:
- a) Decido
  - b) Le consulto
  - c) Prefiero que otro la tome
10. Creo que las ideas creativas y poco comunes pueden resultar en buenas soluciones
- a) Siempre
  - b) A veces
  - c) Nunca

Para la cualificación, se siguen las siguientes normas:

En cada ítem, si la respuesta es a, asigne 5 puntos; si es b, asigne 3 puntos y si es c, asigne 1 punto. Después de responder los 10 ítems, sume los resultados y cualifique así:





**24 puntos o menos:** baja. La responsabilidad de la toma de decisiones lo agobia o simplemente no le interesa y prefiere que otros lo hagan por usted. La indecisión es muy frecuente en su vida.

**Entre 25 y 39 puntos:** media. Sabe que es importante tomar decisiones pero aún no lo reconoce plenamente, osa enfrentar la responsabilidad aunque no tiene claro el mejor método.

**Entre 40 y 50 puntos:** alta. Busca soluciones creativas, sabe que no es dueño absoluto de toda la verdad y que dar participación a los demás hace parte del éxito, pero no depende de ellos. Le gusta el riesgo pero, lo sabe medir.

1. Ahora, planeo la aplicación del test (o uno similar) a otros miembros de mi entorno que deban tomar decisiones que de alguna manera tienen que ver conmigo, registro los resultados y los confronto. Escribo mis conclusiones, las comparo con las de otros compañeros y las discutimos para lograr un consenso.
2. Finalmente, basado en los conceptos de crecimiento o decrecimiento de una función, leo el siguiente enunciado y resuelvo los planteamientos:

“El dueño de un limonar calcula que si se siembran 50 árboles por hectárea, cada árbol en producción dará un promedio de 600 limones por año. Por cada árbol adicional que se siembre por hectárea, el número de limones producido por un árbol al año disminuirá en 6:

- a) Decido cuál es la función que describe la situación.
- b) Calculo los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función.
- c) Bosquejo la curva.
- d) En el punto en donde la curva forma una concavidad, calculo cuántos limones se producen.
- e) En otros puntos de la misma curva el número de limones es ¿mayor o menor que el valor anterior?

3. Comparo mis respuestas con las de otro compañero, discutimos hasta ponernos de acuerdo y compartimos con el profesor para detectar posibles fallos.







# ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA



