UNIDAD 7

NOCIONES DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

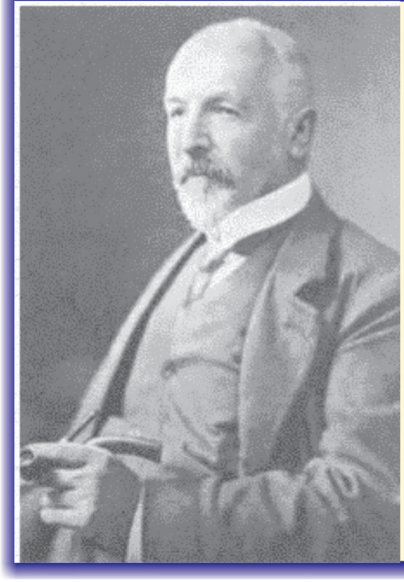
Además de la certeza de la muerte, pocos aspectos de nuestra vida eluden la influencia del azar. Un agrupamiento impredecible de genes determina nuestra constitución física; un paso en falso inadvertido puede llevarnos al hospital, incapaces de controlar el azar, tratamos de evaluar la probabilidad de que ocurra un suceso en particular.
Los juegos de azar llevaron a matemáticos como Tartaglia y Cardano a presentar sagaces análisis sobre problemas de juego; pero fueron Pascal y Fermat, quienes sentaron las bases de la teoría de probabilidades.

LOGROS

- Revisa y afianza los conceptos relativos a la teoría de conjuntos con las operaciones entre ellos
- Maneja los conceptos básicos de la teoría combinatoria y los aplica correctamente para resolver ciertos problemas cotidianos
- Recuerda las nociones fundamentales de la estadística para interpretar los conjuntos de datos que suministran los medios de comunicación
- Define y aplica adecuadamente los conceptos básicos de la teoría de probabilidad
- Usa adecuadamente la información para enfrentar situaciones. GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN
- Evalúa y compara sus procesos con otros similares, para innovar y mejorar. REFERENCIACIÓN COMPETITIVA
- Resuelve problemas en forma acertada y oportuna. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- Analiza, elige y pone en marcha alternativas de solución. TOMA DE DECISIONES

GUÍA 1

LOS CONJUNTOS Y SUS OPERACIONES



George Cantor, nacido en Rusia en 1845 y muerto en Alemania en 1918, entre 1872 y 1898 crea la teoría de conjuntos que permite reconstruir prácticamente toda la matemática.

En la actualidad, los conjuntos han permitido crear el álgebra booleana que son la matemática del 1 y el 0, tan en boga hoy, toda vez que constituyen el lenguaje de los computadores.

INDICADORES DE LOGRO

- Describe correctamente conjuntos por extensión y por comprensión
- Diferencia entre elemento, subconjunto y conjunto y maneja las relaciones entre ellos
- Define y realiza las operaciones: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento
- Establece y maneja las propiedades del álgebra de conjuntos
- Demuestra interés por actualizar su información de manera constante. GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN
- Identifica la información requerida para ampliar su conocimiento de una situación o problema
- Ubica las distintas fuentes de información disponibles
- Recoge organizadamente la información
- Analiza la información recolectada
- Utiliza la información para tomar decisiones y emprender acciones
- Reconoce la información resultante de la experiencia de otros
- Organiza y archiva la información recolectada

En esta unidad revisaremos nuestros conocimientos sobre conjuntos con la finalidad de utilizarlos en el estudio elemental de la teoría combinatoria y para introducirnos en el tema de las probabilidades.

A

Para determinar mi conocimiento sobre los conjuntos, resuelvo lo siguiente; si tengo dificultades, consulto las fuentes disponibles y comparto mis respuestas con los compañeros del subgrupo para ponernos de acuerdo y poder afrontar con éxito el contenido de la guía.

1. ¿Qué es un conjunto?
2. ¿De qué maneras se puede describir un conjunto?
3. ¿Qué es el conjunto vacío?
4. ¿Qué es el conjunto universal?
5. ¿Qué elementos conforman la unión de dos conjuntos?
6. ¿Cuáles elementos integran la intersección de dos conjuntos?

B

Con un compañero, leemos y analizamos los siguientes conceptos, resolvemos las situaciones y preguntas que se nos plantean y si lo consideramos necesario, dibujamos los diagramas que nos sirvan para comprender los conceptos.

Los conjuntos están relacionados con el proceso de contar; los conceptos geométricos y aritméticos pueden ser formulados de manera clara y concisa a través de los conjuntos; facilitan el desarrollo de los conceptos más abstractos de las matemáticas, como el álgebra lineal, el álgebra moderna, etc.

Las ideas de **conjunto y elemento** son primitivas y no se definen, aunque podemos describirlas de modo intuitivo. Un CONJUNTO lo entendemos como una colección de objetos distinguibles y bien definidos. Los objetos (números, letras, puntos, etc.), que constituyen un conjunto son los miembros o **elementos** del conjunto.

Los conjuntos se simbolizan con letras mayúsculas A, B, C... y los elementos con minúsculas a, b, c...., números, etc.

Ejemplos:

1. A = {1, 3, 5, 7} (que se lee "el conjunto A integrado por 1, 3, 5, 7") y significa que el conjunto A se compone de los cuatro primeros números naturales impares.

2. B = {a, b, c} quiere decir que los elementos del conjunto B son las tres primeras letras del alfabeto.

3. C = {x / x es una vocal} (que se lee "el conjunto C integrado por los elementos x tales que x es una vocal), está compuesto por {a, e, i, o, u}.

4. D = {y / y es un número natural par} está compuesto por {2, 4, 6, 8,...2n}.

En los ejemplos anteriores:

a) Para indicar que un determinado objeto es miembro o elemento del conjunto dado, se emplea el símbolo "$\in$" llamado de pertenencia. Así en 1. podemos escribir $5 \in A$ (que se lee 5 le pertenece a A ó 5 es elemento de A); también, $a \in B$, $u \in C$, $12 \in D$.

El símbolo "$\notin$" se lee "no pertenece" ó "no es elemento de". Por ejemplo, $13 \notin A$, 3 D$\notin$ (13 no pertenece a A, 3 no es elemento de D).

b) En los ejemplos 1. y 2. no surgen dudas de si un miembro pertenece o no a cada conjunto. Son conjuntos bien definidos en el sentido de que podemos afirmar de modo inequívoco si un objeto dado es o no elemento de los conjuntos considerados, porque se ha dado la lista explícita de los elementos de los conjuntos, y diremos entonces que A y B están determinados por **extensión**. En los casos 3. y 4. se ha establecido una regla que permite decidir si un objeto es miembro o no de los conjuntos, y decimos que C y D se han determinado por **comprensión.**

c) Los conjuntos A, B y C son **finitos**, porque el proceso de contar sus elementos termina; en cambio D es un conjunto infinito, porque el conteo de sus elementos no termina.

Dados los conjuntos $A = \{x \in \Re / X^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0\}$ y $B = \{x \in \Re /(X + 3)(x - 3) = X^2 - 9\}$, decidir sin son finitos o infinitos.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Subconjunto. Un conjunto B es subconjunto de un conjunto A, lo que se indica por B $\subset$ A (Se lee B está contenido en B ó A es subconjunto de B), si todo elemento de B es también elemento de A, es decir, $x \in B \rightarrow x \in A$ (ver diagramas de Venn en las figuras 1 y 2 más adelante).

Ejemplos:

$B = \{6,9,12\} \wedge$ A={x/x es múltiplo de 3} $\rightarrow B \subset A$

G = {x/x es un número divisible por 3} $\wedge$ H = {x/x es un número natural} $\rightarrow$ G $\subset$ H ó G es subconjunto de H. También se puede afirmar que H $\supset$G que se lee H contiene a G ó H es superconjunto de H.

D = {a, m, p}$\wedge$F = {p, a, m}$\rightarrow$ D $\subseteq$ F. En este caso los conjuntos tienen los mismos elementos, se dice que D es subconjunto impropio de F.

Igualdad de conjuntos. Dos conjuntos A y B son iguales sólo si todos los elementos de A le pertenecen a B y todos los elementos de B le pertenecen a A, ó sea,

A=B $\leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Ejemplo: si A = {x/x es una vocal de la palabra "murciélago"} y B = {a, e, i, o, u}, entonces A y B son conjuntos iguales.

CONJUNTOS ESPECIALES

Conjunto vacío. Es el que carece de elementos y se simboliza por { } ó por ϕ. Por ejemplo, el conjunto de los hombres mayores de 200 años que viven actualmente.

Conjunto universal. Cuando se habla o se piensa acerca de los conjuntos, es conveniente saber que los miembros de un conjunto dado pertenecen a una "población" determinada, que es el conjunto universal o referencial. Por ejemplo, en un momento dado, el universal o referencial puede ser ó su colegio, ó el nivel 10, ó el grado undécimo. El universal se denota con U.

Conjunto de partes. Dado un conjunto A, el conjunto de partes de A es otro conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, y su número es 2^n, siendo n el número de elementos, o sea el cardinal del conjunto.

Ejemplo: si A={a, b, c}, entonces P(A)={{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, { }}. (En teoría coordinatoria usaremos este concepto).

Obsérvese que el conjunto es subconjunto de sí mismo y el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos. Además, un conjunto cuyos elementos son también conjuntos se llama UNA FAMILIA DE CONJUNTOS .

Conjunto unitario. Es el que sólo tiene un elemento. Ej: A={x/x es número primo par}. En efecto, $A = \{2\}$.

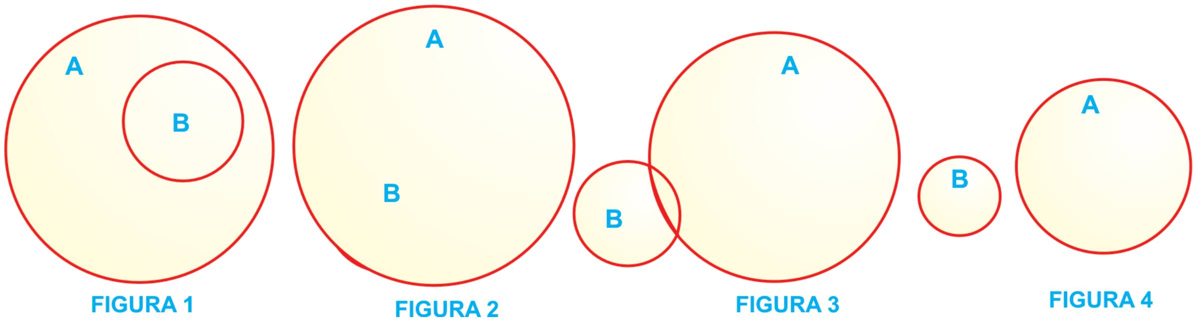
Diagramas de VENN: Llamados también de EULER, son una manera esquemática de representar los conjuntos y los conceptos relacionados con ellos. Se constituyen en un auxiliar didáctico muy valiosos para visualizar las relaciones de pertenencia, inclusión y contiene a....Por lo general, el conjunto universal se representa mediante un rectángulo y los subconjuntos mediante regiones cerradas del plano, elipses o círculos, como se verá adelante.

Conjuntos disyuntos. Son aquellos que NO TIENEN elementos comunes (Figura 4).

Conjuntos secantes. Son aquellos que TIENEN elementos comunes (Figuras 1, 2 y 3).

Conjuntos comparables. Cuando uno de los conjuntos es subconjunto del otro (Figuras 1 y 2).

Las definiciones anteriores se visualizan así:



Dados los conjuntos:

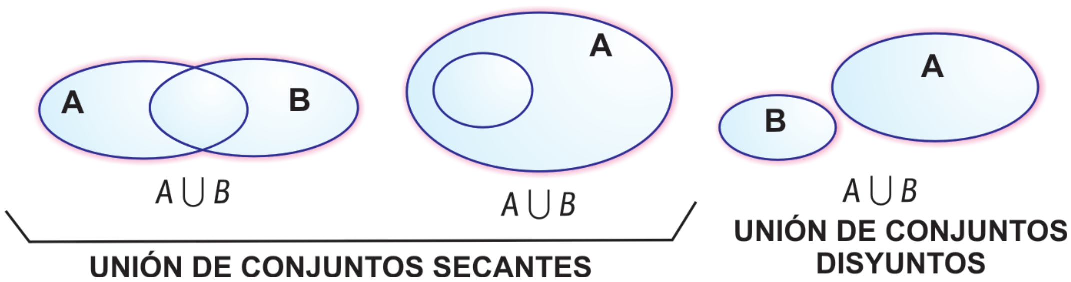
A={x es una letra de la palabra "acto"}; B={x es una letra de la palabra "acato"}; C={x es una letra de la palabra "taco"}; D=}x es una letra de la palabra "cota"}, ¿Cuáles de los conjuntos son iguales? Justificar la respuesta.

De los conjuntos ϕ, { 0 } y { ϕ } ¿se puede afirmar que son iguales? Justificar la respuesta

OPERACIONES CON CONJUNTOS

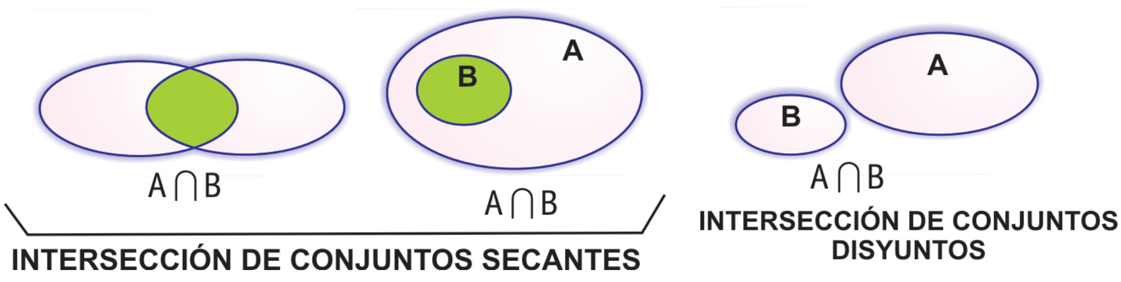
Así como los números se combinan mediante las operaciones de suma, sustracción y producto, los conjuntos se pueden combinar entre ellos para obtener otros conjuntos, a través de ciertas operaciones que satisfacen muchas de las propiedades de la adición y el producto de números.

Unión de conjuntos. La unión entre dos conjuntos A y B, que se indica por $A \cup B$ (se lee A unión B) está conformada por todos los elementos que están en A ó en B, o sea: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$, como se ve en la figura siguiente, en donde $A \cup B$, para conjuntos secantes y disyuntos se muestra en color azul claro.



Ejemplo: A={a, b, c, d}; B={c, d, e, f} entonces $A \cup B$ ={a, b, c, d, e, f} (los elementos que se repiten se escriben sólo una vez).

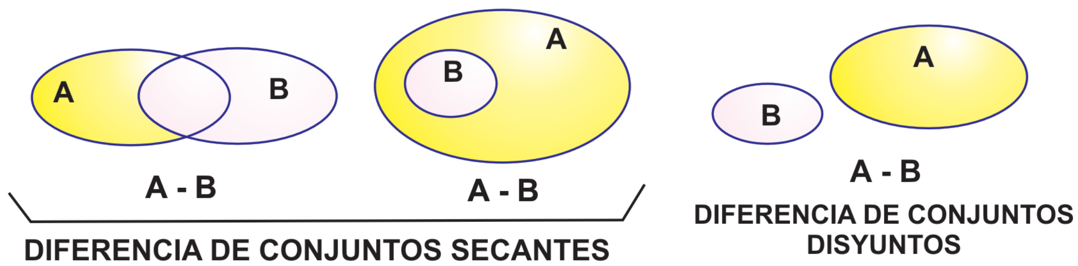
Intersección de conjuntos. La intersección de dos conjuntos A y B, que se indica por $A \bigcap B$, está conformada por los elementos comunes a los dos conjuntos, o sea: $A \bigcap B = \{x / x \in A \wedge x \in B$, como se visualiza en la figura siguiente, en donde $A \bigcap B$ corresponde a la porción de color verde; para los conjuntos disyuntos, la intersección es el conjunto vacío (ϕ).



Ejemplo: usando los conjuntos nombrados en ejemplo anterior, $A \bigcap B$ ={c, d}.

OBSERVACIÓN: AUB se llama suma lógica de los conjuntos A y B; y $A \bigcap B$ es el producto lógico de los conjuntos A y B.

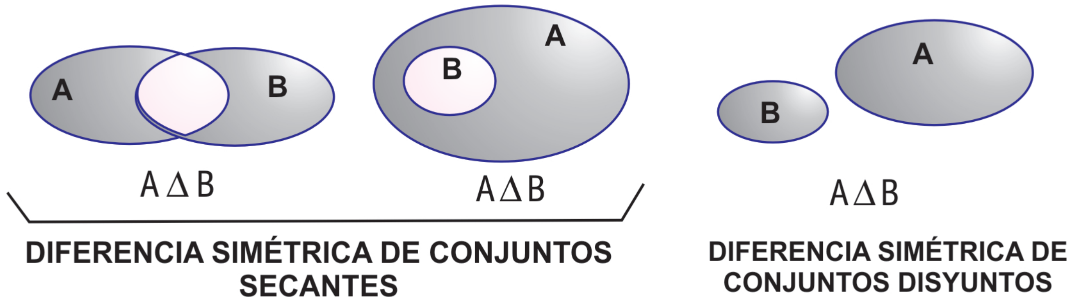
Diferencia de conjuntos. La diferencia de dos conjuntos A y B, denotada por $A - B$, que se lee "A diferencia B", es el conjunto formado por los elementos que le pertenecen a A pero que no le pertenecen a B, o sea: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$, como se ve en la figura, en color amarillo.



Ejemplo: A={3, 4, 5, 6}; B={4, 5, 7} $\Rightarrow$ A - B={3, 6} y B - A={7}.

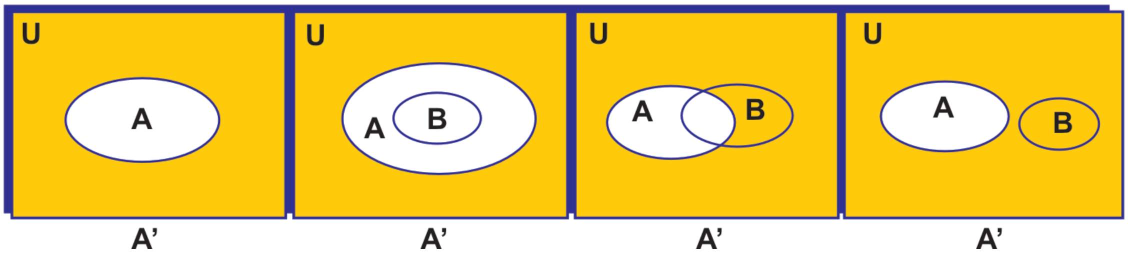
Diferencia simétrica de conjuntos. La diferencia simétrica de dos conjuntos *A* y *B*, que se indica por $A \Delta B$, se lee "*A* diferencia simétrica *B*", es el conjunto formado por los elementos que le pertenecen a *A* ó a *B*, pero no a ambos, es decir:

$A \Delta B = \{x / x \in (A \bigcup B) \wedge x \notin (A \bigcap B)$, que son las zonas grises que se ven en la siguiente figura:



Ejemplo: A={1, 2, 3, 4}; B={4, 5} ‘ A ∆ B ={ 1, 2, 3, 5}.

Complemento de un conjunto. El complemento de un conjunto A con respecto al universal U, que se indica por A’ y se lee “complemento de A”, está conformado por los elementos de U que no están en A, o sea: $A' = \{x / x \notin A\}$, como se ve en la figura, en donde el complemento de A (A’) son las regiones de color mostaza:



Cardinal de un conjunto. Es el número de elementos que tiene el conjunto A y se indica por n(A). Ejemplos:

Si A={2, 3, 5} → n(A)=3; si B={x/x es un divisor de 8} → n(B)=4

En los conjuntos $U = \{x \in \mathrm{N} / 1 \leq x < 6\}$; $A = \{x \in U / x^2 = 7x - 12\}$

y B= $x \in U /$ {x es un número primo}, hallar el cardinal de:

$A \cup B$; $A \cap B$; A’; A - B; $A \Delta B$

Propiedades de las operaciones entre conjuntos

- Idempotencia: $A \cup A = A$ $\qquad A \cap A = A$
- Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$ $\qquad A \cap B = B \cap A$
- Asociatividad: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Distributividad: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedades relacionadas con los conjuntos universal y vacío

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap U = A$

$A \cup \phi = A$ $\qquad$ $A \cap \phi = \phi$

Propiedades con respecto al complemento

$A \cup A' = U$ $\qquad$ $A \cap A' = \phi$

Leyes de De Morgan:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\qquad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

EL NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Ya se dijo que el cardinal de un conjunto A es el número de elementos de A. Se indica por n(A). Por ejemplo, si $A = \{x / x = \sqrt{9}\} \subset \mathbb{Z} \Rightarrow n(A) = 2 \because A = \{-3,3\}$.

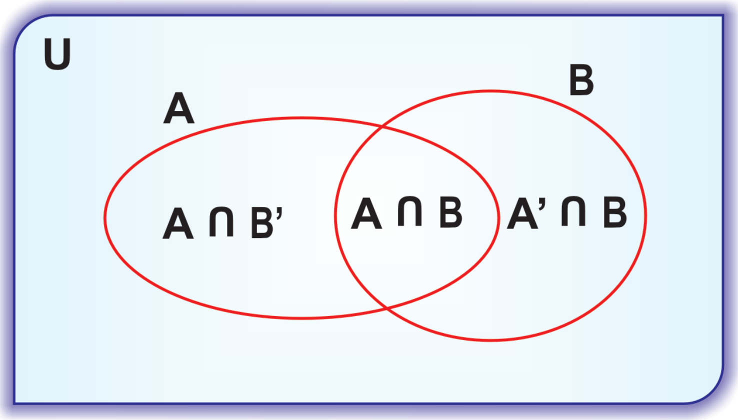
Si B = {x / x es un número primo y par} $\subset \mathbb{N} \Rightarrow n(B) = 1 \because B = \{2\}$.

Si se conoce el cardinal de ciertos conjuntos, es posible encontrar el cardinal de otros conjuntos que son unión, intersección, diferencia o complemento de aquellos.

Supongamos que 40 estudiantes del colegio practican el fútbol y 30 el baloncesto. ¿Se puede deducir cuántos estudiantes practican fútbol o básquetbol? No, puesto que es preciso conocer cuántos practican los dos deportes, fútbol y básquetbol. Ahora, si conocemos que los dos conjuntos son disyuntos (no hay estudiantes que practiquen los dos deportes) la respuesta sería la suma de los dos números, o sea 40 + 30 = 70.

En general, si A y B son disyuntos, entonces **n(A U B) = n(A) + n(B).**

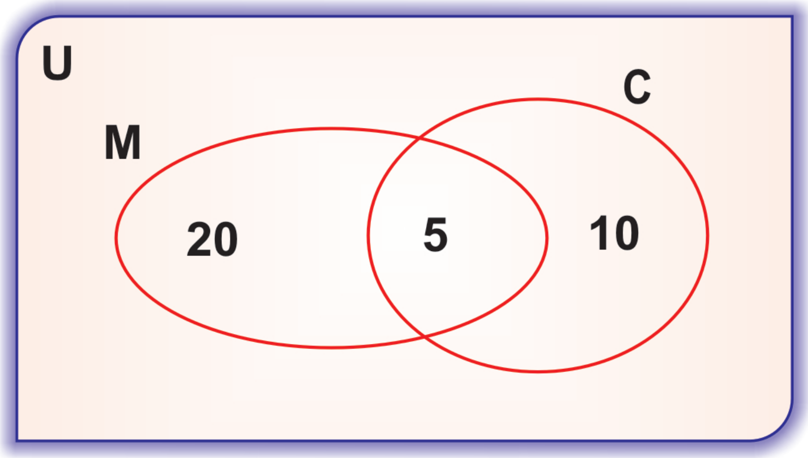
Si los conjuntos son secantes, como los que se muestran en la figura:



Entonces $(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Ejemplo: suponga que en su grupo hay 25 estudiantes que tienen preferencia por las matemáticas y 15 por las ciencias naturales; 5 de ellos tienen preferencia por las dos asignaturas. Calcule el número de estudiantes que hay en el grupo, primero usando un diagrama de Venn y luego usando la fórmula.

Solución: se dibujan dos conjuntos M y C que sean secantes; en su intersección se escribe el 5 para representar los que prefieren matemáticas y ciencias naturales; luego se escriben 20 en M (lo que falta para completar 25) y 10 en C (lo que falta para completar 15); los resultados se deducen de la gráfica leyendo directamente, o sea: 20 + 5 + 10 = 35, como se ve en la figura:



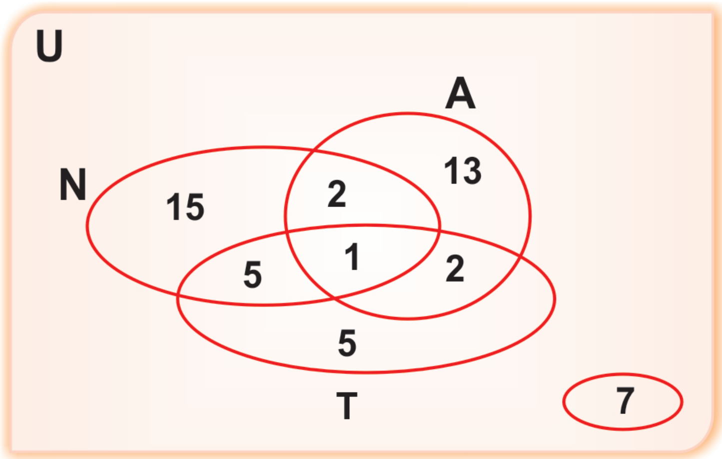
Usando la fórmula: $n(M \cup C) = n(M) + n(C) - n(M \cap C) = 25 + 15 - 5 = 35$, resultado igual al anterior.

De manera similar, para tres conjuntos A, B y C que se cortan el cardinal de la unión se puede calcular mediante:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Ejemplo: en un grupo de estudiantes se practican algunos deportes, así: 23 natación, 18 atletismo y 13 tenis. Si tres hacen natación y atletismo, 6 natación y tenis, 3 atletismo y tenis, 1 realiza los tres deportes y 7 no participan en los deportes, ¿cuantos estudiantes conforman el grupo?

Solución mediante diagramas de Venn: se dibujan los conjuntos N, A y T de modo que se corten; escribimos 1 en la intersección común; con el 2 completamos la intersección de N con A; con 5 completamos la intersección de A con T; con 2 completamos la intersección de A con T; se completa con 15 el conjunto N, con 13 el A y con 5 el T; fuera de los óvalos, pero dentro del rectángulo anotamos el 7, correspondiente a quienes no participan de ninguno de los tres deportes. La respuesta se deduce directamente de la gráfica: $n(A \cup B \cup C) = 15 + 5 + 1 + 2 + 13 + 2 + 5 + 7 = 50$, como se ve en la figura:



$n(A \cup N \cup T) = 18 + 23 + 13 - 3 - 3 - 6 + 1 = 43$. Y como hay 7 que no practican alguno de los tres deportes, el cardinal del grupo es 43 + 7 = 50.

Usando un diagrama de Venn-Euler, comprobar las leyes de De Morgan.

Para verificar el avance en el tema de estudio en la guía, resolvemos en subgrupo los siguientes planteamientos, comparamos las respuestas con las de otros subgrupos y discutimos nuestros puntos de vista hasta llegar a un consenso.

1. Escribir las afirmaciones siguientes en notación conjuntista:

1. x no pertenece a A
2. d es elemento de E
3. R contiene a S
4. H no incluye a D
5. F es subconjunto de M
6. P está contenido en K
7. C es subconjunto de G
8. y le pertenece a F

2. Sea M= {a, b, c}. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

1. $a \in M$
2. $a \subset M$
3. $\{a\} \in M$
4. $\{a\} \subset M$
5. $M \supset a$
6. $M \supset \{a\}$
7. $n(M) = 3$
8. $\phi \subset M$
9. $\{a, b, c\} \subset M$
10. $\{a, b\} \not\subset M$

3. Describa por extensión o forma tabular los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x \in \mathrm{Z} / x^2 = 4\}$
2. $B = \{x \in \mathrm{N} / x - 2 = 5\}$
3. x es positivo y x es negativo}
4. D = {x/ x es una letra de "correcto"}
5. E= {x/ x es número primo par}
6. F = {x/ x una alumna de 11}
7. G= {x/ x es un planeta del sol}
8. H = {x/ x es un satélite de la tierra}

4. Describir por comprensión o forma constructiva los siguientes conjuntos:

1. A = {a, b, c, d, e}
2. B = {2, 4, 6, 8,...}
3. C = {Amarillo, azul, rojo}
4. D = {i, 1, -i, -1}
5. E = {a, u, e, o, i}
6. F = { }

5. Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son finitos:

1. {Los meses del año}
2. {1, 2, 3,...99, 100}
3. {1, 3, 5, 7,...2n-1}
4. {Los días de la semana}
5. {Las gentes que viven en la tierra}
6. {Los poderes públicos}

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

1. A={x/x es una letra de "tocata"}
2. B={letras de la palabra "tacto"}
3. C={x/x es una letra de "cota"}
4. D={a, c, o, t}

7. ¿Qué diferencia hay entre las palabras: vacío y cero?

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos?

1. A={x/x es una letra anterior a la "a"} 2. $B = \{x / x^2 = 9 \wedge 2x = 4\}$

3. $C = \{x / x \neq x\}$

4. $D = \{x + 8 = x\}$

5. E={x/ x es rumiante que vuela}

6. $F = \{x / x^2 < 0 \wedge x \in R\}$

9. Dado A={x, y, z}, ¿cuántos subconjuntos hay en A y cuáles son?

10. Dados V={ d }; W={c, d}; X={a, b, c}; Y={a, b}; Z={a, b, d}, establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $Y \subset X$
2. $W \supset V$
3. $W \neq Z$
4. $Z \supset V$
5. $V \not\subset Y$
6. $V \subset X$
7. $X = W$
8. $W \subset Y$

11. Sean $A = \{1,2,3,4\}; B = \{2,4,6,8\}; C = \{3,4,5,6\}$, hallar:

1. $A \cup B$
2. $A \cup C$
3. $B \cup C$
4. $B \cup B$
5. $(A \cup B) \cup C$
6. $A \cup (B \cup C)$

12. Usando los conjuntos del numeral 11, hallar:

1. $A \cap B$
2. $A \cap C$
3. $B \cap C$
4. $B \cap B$
5. $(A \cap B) \cap C$
6. $A \cap (B \cap C)$

13. Utilizando los conjuntos del numeral 11, hallar:

1. A - B
2. C - A
3. B - C
4. B - A
5. A - C
6. B - B

14. Utilizando los conjuntos del numeral 11, hallar:

1. A Δ B
2. A Δ C
3. B Δ C
4. B Δ A
5. A Δ A
6. C Δ B

15. Usando los conjuntos del numeral 11 y suponiendo que el conjunto universal es U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, hallar:

1. A'
2. B'
3. C'
4. $(A \cap B)'$
5. $(A \cup B)'$
6. $(B - C)'$
7. $(A')'$
8. $(A \triangle C)'$

D

Como aplicación al tema de los conjuntos, con un compañero desarrollamos el siguiente problema.

De los 150 estudiantes que tiene una institución, 85 practican el fútbol, 70 ejercitan el básquet y 55 prefieren la natación; 35 practican fútbol y básquet; 30 practican fútbol y natación; 25 practican básquet y natación; 10 no practican ninguno de los tres deportes. Suponiendo que los entrenamientos se realizan en horarios diferentes, ¿cuántos estudiantes practican fútbol, básquet y natación? Ayúdense de diagramas de Venn-Euler para plantear y comprobar el resultado.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA