UNIDAD 6

NOCIONES DE CÁLCULO INTEGRAL

Arquímedes (287 - 212 a.C.) **Isaac Newton (1646 - 1717)** **Gottfried Leibniz (1646 - 1716)**

Arquímedes resolvió los primeros problemas relativos al hoy llamado cálculo integral, entre ellos la superficie y el volumen de la esfera.
Newton en un período de menos de 2 años, y con menos de 25 años, sentó las bases del cálculo diferencial e integral, varios años antes de su descubrimiento, en forma independiente, por Leibniz.

LOGROS

- Interpreta la integración como el proceso inverso de la diferenciación
- Identifica y aplica el método de integración adecuado para resolver una ecuación diferencial
- Interpreta el operador sigma como un símbolo para expresar una sumatoria y lo relaciona con la integral definida
- Reconoce los elementos diferenciales que determinan un área o generan un sólido de revolución y que permiten, por integración, calcular su área o su volumen
- Actúa basado en principios y valores sociales y consensuados en los grupos en donde interactúa (AXIOLÓGICA)
- Contribuye con su actitud y comportamiento a mejorar el ambiente (RESPONSABILIDAD AMBIENTAL)
- Comprende y manifiesta los sentimientos y pensamientos sobre algún tema o situación (COMUNICACIÓN)
- Utiliza en forma eficiente las herramientas necesarias para desarrollar los procesos (MANEJO TECNOLÓGICO)
- Participa activa, responsable y colectivamente en el logro de objetivos comunes (TRABAJO EN EQUIPO)

GUÍA 1

LA INTEGRAL INDEFINIDA Y LAS INTEGRALES INMEDIATAS

Aunque los avances tecnológicos han permitido construir autos relativamente seguros, la imprudencia de algunos conductores los tornan peligrosos.
Mediante el cálculo integral, las autoridades pueden determinar si la causa de un accidente fue el exceso de velocidad, por ejemplo.

INDICADORES DE LOGRO

- Calcula la ecuación diferencial de una función dada
- Reconoce el símbolo de integración y lo usa para plantear la solución de ecuaciones diferenciales sencillas
- Maneja con propiedad las integrales inmediatas más comunes
- Toma decisiones basadas en principios y valores sociales y particulares **(AXIOLÓGICA)**
- Cuida los bienes ajenos, públicos y del entorno
- Actúa y se desempeña con autodisciplina, sin necesidad de supervisión, en el marco de la autonomía otorgada
- Analiza y reflexiona sobre su comportamiento y el de los otros
- Acepta a los otros sin importar sus condiciones socioculturales
- Respeta los acuerdos consensuados

Leemos y comentamos brevemente el siguiente contenido: cuando hablamos de la competencia **AXIOLÓGICA**, nos referimos a los valores, especialmente los morales, que deben caracterizar al ser humano. Cuando la persona evidencia tener estos valores, podrá tomar decisiones en su vida sin afectar su relación social, es decir, podrá reconocer normas y principios que tiene establecidos la sociedad.

Demostrar esta competencia en el campo laboral, es determinante para un adecuado desempeño, puesto que en los diferentes grupos con los que se interactúa, ya sea la familia o el colegio, existen normas que regulan las relaciones entre las personas. Esta regulación es fundamental para crear condiciones de convivencia, tolerancia, autodisciplina, autonomía y aceptación de los otros, lo que garantiza el cumplimiento de los deberes y la exigencia de los derechos.

Al formular mi proyecto de vida tengo en cuenta determinar qué tipo de valores me van a caracterizar en las actuaciones o desempeños.

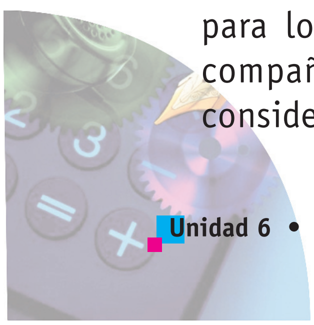
A

Con el fin de introducirnos en el cálculo integral, leemos, analizamos y respondemos las siguientes cuestiones:

1. Para las funciones $F(x) = Y = X^4 + 3X^2 - 8X + 3$, $Y = Sen(2X) - CosX$ y $Y = e^{2X} + X^2$ calculamos $\frac{dy}{dx}$. ¿Cómo queda cada expresión si se multiplican los dos miembros por dx? ¿Cómo se leerá cada resultado?

2. Dada $f'(x) = 3X^2$, intentamos hallar una función f(x) de tal modo que al derivarla con respecto de x resulte $3X^2$.

3. Al resolver los ejercicios de la exploración nos damos cuenta de la complejidad de la temática que nos plantea la guía. ¿Qué valores debemos poner en práctica para lograr armonizar en el trabajo y éxito académico? Seleccionemos a un compañero del subgrupo, analicémoslo y atribuyámosle las cualidades que consideremos que él tiene como valores.



Escribimos nuestras respuestas y las comparamos con las de otros compañeros y si hay diferencias las analizamos hasta ponernos de acuerdo.

B

Leemos, interpretamos, interiorizamos y anotamos en nuestros cuadernos lo que aparece en el recuadro verde. Analizamos los ejercicios resueltos y si es necesario los volvemos a resolver.

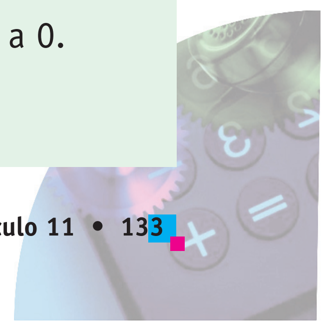
Hasta ahora se ha estudiado una de las dos ramas principales del cálculo infinitesimal: el **cálculo diferencial**, en donde dada una función Y=f(x) se busca su derivada. Nos centraremos en esta guía en el otro aspecto importante: **el cálculo integral** que, básicamente, consiste en que dada la derivada f ‘(x) de una función se debe determinar la función f(x) que la origina. Como se observa, los dos procesos son inversos.

La palabra **integrar** tiene dos interpretaciones en cálculo. Una de ellas coincide con el significado corriente de la palabra, es decir, para indicar el total de algo, una suma de partes. En este sentido la emplearemos para hallar áreas limitadas por curvas y los volúmenes generados por sólidos de revolución. La segunda connotación que tiene en matemáticas la palabra **integrar** es la de encontrar una función conociendo su derivada. Este aspecto es el que vamos a estudiar en esta guía.

Diferenciales

En guía anterior se vio que dada la función $Y = f(x)$, entonces

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ (Definición de la derivada de la función con respecto de la variable). Cabe resaltar que $\frac{dy}{dx}$ no debe considerarse como una fracción ordinaria, con dy como numerador y dx como denominador, sino como un símbolo para representar el límite del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a 0.



Se define entonces una nueva variable "dy" como el producto de la derivada f'(x) de la función por una segunda variable "dx", o sea: dy = f '(x)*dx (que se lee "diferencial de y es igual a la derivada de Y con respecto a X por la diferencial de x"). A la variable "dy" se le denomina **diferencial de "Y"** y a la variable dx **diferencial de "X"**.

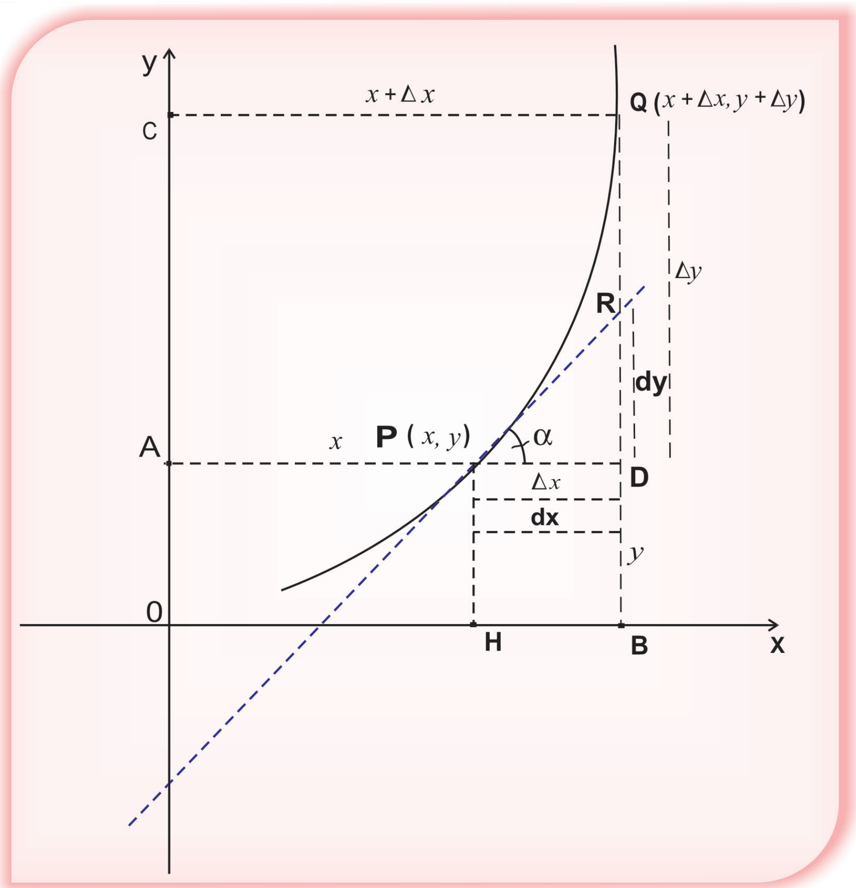
Se observa que para hallar dy es suficiente calcular la derivada de la función respecto de la variable y luego multiplicar a los dos lados de la igualdad por dx, como se sugirió en la actividad inicial indicada en la sección A. Por ejemplo, si $Y = 2X^3 - 4X + 1$, para calcular dy buscamos primero la derivada que es

$$\frac{dy}{dx} = 6X^2 - 4.$$

Luego $dy = (6X^2 - 4)\,dx$.

Otro ejemplo: si $Y = Cos3X$ entonces $\frac{dy}{dx} = -3Sen3X$. Luego dy = -3Sen3Xdx.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE dy Y dx:



Ya se vio que si Y = f(x), entonces $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ significa la pendiente de la tangente geométrica a la curva en un punto P(x,y) de ella, es decir, $\frac{dy}{dx}$ no es más que la tangente del ángulo α, como se ve en la figura. Si se toma un segundo punto $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sobre la curva, esta ordenada corta a la tangente en R y a la horizontal que pasa por P en D. En el triángulo rectángulo PDR se tiene que

$Tan\alpha = \frac{dy}{dx}$. Por tanto, dy = DR y dx = PD y esto nos da una interpretación geométrica de los diferenciales.

Nótese que si Q es muy próximo a P entonces $\Delta x = dx$ y $\Delta y \approx dy$, porque la diferencia entre dy y Δy es RQ que se hace muy pequeña cuando Q tiene a P.

La integral indefinida

Supongamos que se da la función F′(x) y que se quiere hallar otra función y = F(x) tal que: $\frac{dy}{dx} = F'(x)$. Por ejemplo, si $\frac{dy}{dx}$ = 2X, por nuestros conocimientos de cálculo diferencial se concluye que si la derivada es 2X, la función que la origina es $Y = X^2$. Pero también nos damos cuenta de que esta solución no es única, pues si tomamos $Y = X^2 - 3$ ó $Y = X^2 + \frac{1}{2}$ ó $Y = X^2 + \sqrt{2}$ ó en general $Y = X^2 + C$, la derivada de la función con respecto a X será 2X, puesto que la derivada de una constante es cero.

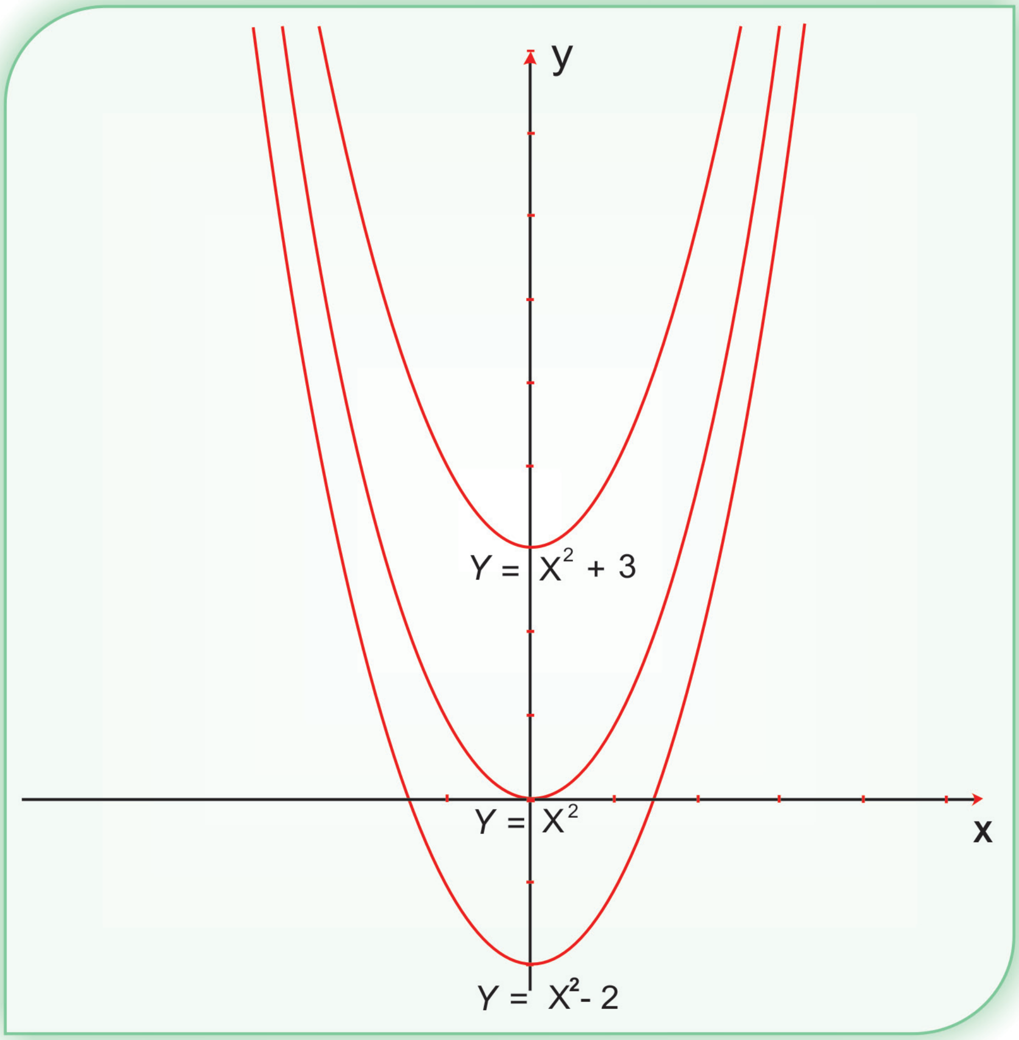
Una expresión como $\frac{dy}{dx} = F'(x)$ se denomina ecuación diferencial, que se transforma en una expresión equivalente si se multiplica a los dos lados por dx, obteniéndose dy = F′(x)dx que es la forma como debe escribirse para separar variables y poder así conseguir su solución, proceso que permite encontrar la función F(x) + C, de donde proviene la derivada F′(x). A este proceso se le llama **integración**. Aquí se ve que la integración es un procedimiento inverso al de la derivación.

Para indicar la integración se usa el símbolo $\int$ que tiene la forma de una S alargada para recordar la palabra SUMA, como se verá en otra guía.

Resolver una ecuación diferencial es, pues, buscar la función de donde proviene una derivada conocida y para indicar la operación se escribe el símbolo de integración a los dos lados de la igualdad. Por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial $dy = f'(x)dx$, indicamos la operación así: $\int dy = \int f'(x)dx$, colocando el símbolo $\int$ a los dos lados de la ecuación (se lee "integral de diferencial de y es igual a integral de f'(x) diferencial de x"). La expresión que acompaña a cada diferencial es el integrando (una derivada). El integrando a la izquierda es 1 y a la derecha es $f'(x)$; el elemento diferencial indica respecto de cuál variable se debe realizar la integración. Por la experiencia con derivadas, se concluye que la solución de la ecuación diferencial propuesta es $Y = f(x) + C$. Este resultado es la integral indefinida porque la constante de integración C puede tomar cualquier valor real. Igualmente, se puede afirmar que $f(x) + C$ es una primitiva de $f'(x)$. A veces es preciso calcular la constante C y para ello deben darse ciertas condiciones que debe cumplir la función.

Por ejemplo, si $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ entonces al separar variables queda $dy = 4x^3\,dx$; para resolver la ecuación diferencial indicamos la integración a los dos lados: $\int 1dy = \int 4x^3dx$, o sea que debemos hallar, por la izquierda, una función cuya derivada respecto de y sea igual a 1, y por la derecha, una función que al derivarla respecto de x sea igual $4x^3$. Por nuestro conocimiento de derivadas podemos asegurar que se trata de la función $y = x^4 + C$, puesto que la derivada de una constante es 0. Si se desea calcular el valor de C, cuando la gráfica de la función pasa por el punto (-1, 2), por ejemplo, sustituimos esta pareja y despejamos C, así: $2 = (-1)^4 + C \Rightarrow 2 - 1 \Rightarrow C = 1$. En consecuencia, la función particular es $y = x^4 + 1$.

Si se grafican varias funciones que sólo difieren en una constante, el resultado es un conjunto de curvas que pertenecen a una misma familia, como se ve en la siguiente figura en donde se han representado las funciones $Y = X^2$, $Y = X^2 + 3$ y $Y = X^2 - 2$.



Obsérvese que al dibujar la curva integral $y = x^2$ (que corresponde a c=0), cualquiera otra curva integral $y = F(x) + C$ se obtiene de la ya dibujada sin más que darle una traslación de magnitud C paralelamente al eje y. Resulta así un haz de curvas paralelas, como se ve en la gráfica precedente. $y = F(x) + C$

Las integrales inmediatas

Para calcular la derivada de una función respecto de una variable se utilizan fórmulas especiales y, sin importar la complejidad de la función, siempre se podrá acomodar a uno de los modelos de diferenciación. Sin embargo, en la integración, si se exceptúan las funciones más comunes, no existe un método patrón que nos permita resolver cualquier integral y, en muchos casos, la intuición juega un papel definitivo.

Las integrales inmediatas resultan de devolver algunas fórmulas de derivación. Las más usuales son:

1. $\int du = \int 1 * du = U + C$ (la integral de la diferencial de una variable es la variable más una constante).
2. $\int kUdx = k\int Udx$ (la integral de una constante por una variable es igual a la constante por la integral de la variable, siendo U = F(x)).
3. $\int (A + B)du = \int Adu + \int Bdu$ (la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos).
4. $\int U^n\, du = \dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C$ (Si $n \neq -1$, la integral de una potencia de base simple es igual a la base elevada a la n+1 y dividida entre n+1).
5. $\int \dfrac{du}{U} = \int U^{-1}\, du = \ln |U| + C$ (La integral de $\int U^{-1}$, siendo U una base simple, es igual a logaritmo natural de valor absoluto de U, más una constante C).
6. $\int SenUdu = -CosU + C$ (La integral de SenU es igual a -CosU, más una constante).
7. $\int CosUdu = SenU + C$ (La integral de SenU es igual a CosU, más una constante).
8. $\int Sec^2Udu = TanU + C$ (La integral de Sec^2U es igual a tanU, más una constante).
9. $\int Csc^2Udu = -CotU + C$ (La integral de Csc^2U es igual a -CotU, más una constante).
10. $\int SecUTanUdu = SecU + C$ (La integral de SecU*TanU es igual a SecU, más una constante).
11. $\int CscUCotUdu = -CotU + C$ (La integral de CscU*CotU es igual a -CscU, más una constante).
12. $\int b^x dx = \dfrac{b^x}{1nb} + C$ (La integral de la función exponencial es igual a la exponencial, dividida entre el logaritmo natural de la base).

Para afianzar conceptos, desarrollemos los siguientes ejercicios:

1) Para la función $y = X^3 + X - 4$, hallar dy.

Solución: $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 1$; luego $dy = (2x^3 + 1)dx$

2) Para la función $y = Tan^2 x$, calcular dy

Solución: $\frac{dy}{dx} = 2TanxSec^2 x$; luego $dy = TanxSec^2 xdx$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, utilizando las fórmulas adecuadas:

1. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

$dy = (x^2 + 1)\ dx$ (Separando variables)

$\int dy = \int (x^2 + 1)dx$ (Indicando la integración a los dos lados)

$\int 1dy = \int x^2 dx + \int 1dx$ (Por la derecha se tiene la integral de una suma)

$y = \frac{x^{2+1}}{2+1} + X + C$ (Integral de dy y dx y la integral de una potencia de base simple)

$Y = \frac{X^3}{3} + X + C$ (Porque $C_1 + C_2 = C$, pues una suma de constantes es otra constante)

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x, x > 0$

$dy = \left(\frac{1}{x^2} + x\right)dx$ (Separando variables)

$dy=(x^{-2} + x)\ dx$ (Pasando x al numerador)

$\int dy = \int (x^{-2} + x)\ dx$ (Se indica la integración a los dos lados)

$\int 1dy = \int x^{-2}dx + \int xdx$ (A la derecha se tiene la integral de una suma y cada sumando es una potencia de base simple).

$$y=\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow y=-\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+C$$ (Reescribiendo para evitar el exponente negativo)

3. $$\frac{dy}{dx}=3X^2+X^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{X}-4$$

$$dy=(3x^2+x^{\frac{1}{2}}+2x^{-1}-4)dx$$ (Separando variables)

$$\int dy=\int(3x^2+x^{\frac{1}{2}}+2x^{-1}-4)dx$$ (Indicando la integración a los dos lados)

$$\int dy=\int 3x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 2x^{-1}dx-\int 4dx$$ (Integral de una suma)

$$y=3\int x^2dx+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2\int x^{-1}dx-4\int dx$$ (Constante por variable, potencia de base simple, constante por variable, constante por diferencial)

$$y=3\left(\frac{x^3}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+2\ln|x|-4x+C$$ (Potencia de base simple, 1 sobre variable a la 1, elemento diferencial)

$$y=x^3+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+2\ln|x|-4x+C$$ (Simplificando)

4. $$\frac{dy}{dx}=2CosX-SenX$$

$dy=(2CosX\text{-}SenX)dx$ (Separando variables)

$\int dy=\int(2CosX\text{-}SenX)dx$ (Indicando la integración a los dos lados)

$\int dy=\int 2CosXdx\text{ - }\int SenXdx$ (Integral de una suma)

$y=2\int Coxdx\text{ - }\int SenX$ (Constante por variable)

$y=2SenX\text{ - }(\text{-}CosX)+C$ (La integral de CosX es SenX y la de senX es - CosX)

$y = 2SenX + CosX + C$ (Destruyendo el paréntesis)

5. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{x^3}$

$dy = \left(\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{x^3}\right)dx$ (Separando variables)

$dy = \left(x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{3}{x^3}\right)dx$ (Escribiendo sin radicales)

$dy = \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-3}\right)dx$ (Escribiendo sin denominadores)

$\int dy = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-3}\right)dx$ (Indicando la integración a los dos lados)

$\int dy = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int 2x^{-\frac{1}{3}}dx - \int 3x^{-3}dx$ (Integral de una suma)

$y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right) - 3\left(\dfrac{x^{-2}}{-2}\right) + c$ (Integral de constante por variable y potencia de base simple)

$y = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{3}{2x^2} + C$ (Operando y escribiendo sin exponente negativo)

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

$ydy = xdx$ (Separando variables)

$\int y\, dy = \int xdx$ (Indicando la integración a los dos lados).

$\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + C$ (Potencias de base simple)

$y^2 = x^2 + 2c \Rightarrow y = +\sqrt{x^2 + C}$ (Eliminando denominadores; despejando y)

7) Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto dado sea igual y de sentido contrario al duplo de la abscisa en dicho punto. De esa familia, hallar la curva que pasa por el punto (1, -2).

$\frac{dy}{dx} = -2x$ (De acuerdo al enunciado)

$dy = -2xdx$ (Separando variables)

$\int dy = \int -2xdx$ (Indicando la integración a los dos lados)

$y = -2\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = -x^2 + C$ (Integrando a los dos lados y simplificando)

Esta es la ecuación de una familia de curvas.

Si se reemplaza por las coordenadas del punto (1,-2), resulta:

$-2 = -(1)^2 + C \Rightarrow C = -2 + 1 = -1$. Luego la curva que pasa por (1, -2) es $y = -x^2 - 1$

8) Como aplicación de la integral indefinida en la física, hallar las leyes que rigen el movimiento de un punto que se mueve en línea recta con aceleración constante.

Solución: en guía anterior se vio que la aceleración "a", que es constante según el enunciado, es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, es decir:

$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = adt$. Si se resuelve la ecuación diferencial, queda:

$\int dv = \int adt \Rightarrow v = a\int dt \Rightarrow v = at + C$. Para hallar C supongamos que la velocidad inicial es V_0, es decir, $V = V_0$ cuando $t = 0$. Luego, $V_0 = a(0) + C \Rightarrow C = V_0$. Y reemplazando en la ecuación de la velocidad, $V = at + V_0$ (1)

Además, la velocidad V es igual a la derivada del espacio S con respecto del tiempo t, o sea: $\frac{ds}{dt} = V = at + V_0$. De donde, $ds = (at + V_0)dt$. Si se resuelve la ecuación diferencial, resulta: $\int ds = \int (at + V_0)dt \Rightarrow S = \frac{at^2}{2} + V_{0}t + C$.

Para determinar C, supongamos que la distancia inicial es S_0, es decir, $S = S_0$ cuando t = 0. Luego: $S_0 = \frac{a(0)^2}{2} + V_0(0) + C \Rightarrow C = S_0$.

Por tanto, $S = \frac{at^2}{2} + V_{0}t + S_0$ (2)

Finalmente, si la aceleración es la de la gravedad y el espacio es la altura h, resultan las leyes que rigen el movimiento de un cuerpo que cae en el vacío, partiendo del reposo, así: $V = gt$ y $h = \frac{gt^2}{2}$. Si despejamos t en la primera de estas ecuaciones y la sustituimos en la segunda, se tiene: $t = \frac{V}{g}$, luego: $h = \frac{g}{2}\left(\frac{V}{g}\right)^2 = \frac{gV^2}{2g^2} = \frac{V^2}{2g}$.

Despejando: $V = \sqrt{2gh}$.

Hemos realizado un trabajo en el cual pudimos interactuar y reconocer algunos valores durante el desempeño. Destaquemos de cada integrante los tres valores más sobresalientes.

Establezcamos los cinco valores que consideremos más importantes y que debiera tener un trabajador que fuéramos a seleccionar para nuestra empresa.

De acuerdo con los conceptos expuestos y los ejercicios resueltos en la sección B, desarrollamos por parejas las siguientes cuestiones. Al concluir los ejercicios los socializamos con nuestro profesor.

1. Resolvemos las siguientes ecuaciones diferenciales usando las integrales adecuadas.

a. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}, x > 0, y > 0$

c. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2, y > 0$

d. $\dfrac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t - 6$

2. En los siguientes ejercicios se ha omitido el miembro izquierdo de la ecuación diferencial, situación que es común en el cálculo integral. Usando las fórmulas que convengan, calculamos las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int x^5 dx =$

b. $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x - 5) dx =$

c. $\int \dfrac{dx}{x_2} =$

d. $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx =$

e. $\int \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx =$

f. $\int x^{2/3} dx =$

g. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx =$

h. $\int (2CosX + 3SenX)\, dx =$

i. $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\, dx =$

j. $\int (x + 3)^2 dx =$

k. $\int (x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x} - 3)\, dx =$

l. $\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x}\, dx =$

m. $\int \sqrt{x}\,(3x - 2)\, dx =$

3. Hallamos la ecuación particular de una función cuando se conocen su derivada y un punto de la misma.

a. $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, si pasa por P(-2,4)

b. $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, sabiendo que pasa por A(1,1)

c. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x + 2$, si pasa por B(-3, -3/2)

D

Como aplicación práctica de la integral indefinida leo y analizo la siguiente información y resuelvo el siguiente planteamiento, cuyos resultados deben de alertarnos sobre los peligros que conllevan las altas velocidades, quizá mezcladas con licor o con drogas, al conducir un vehículo.

Las siguientes normas del Código de Tránsito de Colombia reglamentan la velocidad de los automotores, así:

Artículo 106°. Límites de velocidad en zonas urbanas. En vías urbanas las velocidades máximas serán de sesenta (60) kilómetros por hora, excepto cuando las autoridades competentes por medio de señales indiquen velocidades distintas.

Artículo 107°. Límites de velocidad en zonas rurales. La velocidad máxima permitida en zonas rurales será de ochenta (80) Kilómetros por hora.
Parágrafo. De acuerdo con las características de operación de la vía y las clases de vehículos, las autoridades de tránsito competentes determinarán la correspondiente señalización y las velocidades máximas y mínimas permitidas.

Conducir un vehículo a velocidad superior a la máxima permitida acarrea, de acuerdo con el Ministerio del Transporte, una sanción pecuniaria de 15 SMLDV (Salarios Mínimos Legales Diarios vigentes), que para el año 2005 es de aproximadamente $195000.

Las marcas de frenado (derrape) de los neumáticos de un automóvil indican que se han aplicado los frenos 50 metros antes de detenerse. Si el automóvil tiene una desaceleración constante de $5\frac{metros}{Segundo^2}$, ¿a qué velocidad (en kilómetros por hora) viajaba el auto cuando se empezó a frenar? (para la solución, guíese por el problema 8 de la sección B).

El conductor, ¿merece ser sancionado con la multa estipulada? Justifique su respuesta, comparta con sus compañeros y con el profesor para tratar de fomentar buenos hábitos cuando se conduce un vehículo.

Haga un análisis AXIOLÓGICO del anterior ejercicio, según su resultado. Igualmente, emita un juicio sobre lo que podría ocurrirle al mismo individuo, desde el punto de vista laboral.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA