# UNIDAD 5

# LAS FUNCIONES TRASCENDENTES: PROPIEDADES Y DIFERENCIACION

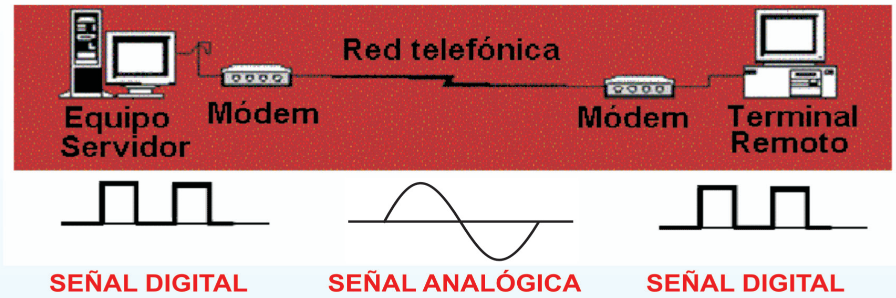
**La población mundial crece rápidamente, pero ¿qué tan rápido? Una ecuación exponencial como es $P(t)=P_{o}e^{kt}$ un modelo matemático tal que si se calcula P'(t), es posible hallar el crecimiento en un instante t.**

## LOGROS

- Identifica y aplica las fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas
- Describe las funciones exponencial y logarítmica, enfatizando en la equivalencia entre las dos nomenclaturas para facilitar su manejo
- Identifica y aplica correctamente las fórmulas para derivar las funciones exponencial y logarítmica.
- Planea, organiza, integra, dirige y controla procesos en su entorno familiar, escolar y social **(GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN)**
- Reconoce y valora sus potencialidades y limitaciones emocionales, afectivas e intelectuales **(PERSONAL)**

# GUÍA 1

# LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS




Existen fenómenos naturales, como el sonido y la luz, que se propagan en forma de ondas y pueden ser descritos mediante funciones trigonométricas continuas, como sen $\alpha$: son las señales analógicas. Los computadores sólo pueden manejar señales digitales, conformadas por 1 ó 0: pasa corriente ó no pasa corriente. Precisamente hoy en día la comunicación entre ordenadores es fundamental, y por lo general se hace a través de señales analógicas. Esta limitación se ha resuelto mediante el MÓDEM (acrónimo de MODULADOR - DEMODULADOR), dispositivo que convierte la señal digital generada en un computador en analógica y ésta de nuevo en digital para ser interpretada por otro computador remoto.

## INDICADORES DE LOGRO

- Construye las gráficas de las funciones trigonométricas SenX, CosX y TanX, ya sea manualmente o usando una aplicación como CABRI, para establecer el dominio y el rango de ellas
- Reconoce las fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas, las mecaniza y maneja con propiedad
- Plantea y resuelve problemas de aplicación
- Asume una actitud crítica frente a las necesidades de su entorno **(GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN)**
- Identifica métodos para reconocer problemas y necesidades en su entorno escolar, familiar y social
- Identifica las etapas para plantear un proyecto

- Plantea acciones para resolver situaciones acordes a su edad
- Organiza los recursos disponibles para alcanzar los objetivos previamente determinados
- Dirige responsablemente las diferentes acciones involucradas en los procesos, que son el conjunto de etapas secuenciales que conducen a la obtención de resultados
- Evalúa los resultados para mejorar procesos
- Formula su proyecto aplicando los respectivos análisis

Además del tema de matemáticas que se desarrollará en esta guía, trataremos la C.L.G. **GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN** que es el "proceso mediante el cual se facilita la administración de unidades productivas, que son los espacios donde interactúan diversos factores (procesos, procedimientos, recursos, conocimientos, etc.) para lograr una meta previamente definida, en procura de un desarrollo individual y social y la capacidad para relacionarse de una manera racional y armoniosa con el ambiente".

De acuerdo al concepto de la competencia **GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN**, es nuestra responsabilidad no sólo como definición sino como aplicación al campo laboral. Desde mi vida de estudiante esta competencia me debe ayudar a organizar mejor mis tareas.

Luego en mi empresa o en mi trabajo debo tener muy en cuenta estos elementos y apropiarme de instrumentos que me faciliten y mejoren la **ADMINISTRACIÓN**, como el diagrama de Gant, cronogramas de actividades, cuadros de evaluación y cuadros estadísticos entre otros.

Al desarrollar esta guía, encontrará momentos o situaciones en las que, para resolverlas, deberá demostrar su capacidad para gestionar y administrar.

## A

Basándome en conocimientos vistos en otros grados, resuelvo las siguientes cuestiones, todas ellas necesarias para enfrentar con éxito la diferenciación de las funciones trigonométricas. Si se presentan dificultades las allano usando los diferentes medios a mi alcance.

¿Qué sé, en relación con los siguientes conceptos?

a) ¿Qué es la derivada de una función respecto de una variable?

b) ¿Qué es el radián, unidad del sistema natural de medida de ángulos?

c) En una circunferencia, ¿Qué es un arco? Y ¿Qué un sector circular?

d) ¿Qué es longitud de la circunferencia?

e) ¿Qué es área del círculo?

f) ¿Cómo se transforma la expresión SenA - SenB en un producto?

Además, ¿Cómo graficaría un radián, una circunferencia, un círculo, un arco y un sector circular? Para tal fin, demuestro mi capacidad de gestión, consiguiendo la información y los implementos requeridos.

Ahora, con toda sinceridad, respondo lo siguiente:

- ¿He estado involucrado en alguna actividad que me haya traído beneficios económicos o de simple satisfacción personal?
- En caso afirmativo, ¿Reflexioné y planeé la actividad o sólo llegué a ella en forma accidental?
- ¿Con qué recursos conté para su ejecución?
- ¿Cómo puedo evaluar mi desempeño en la ejecución de la actividad?

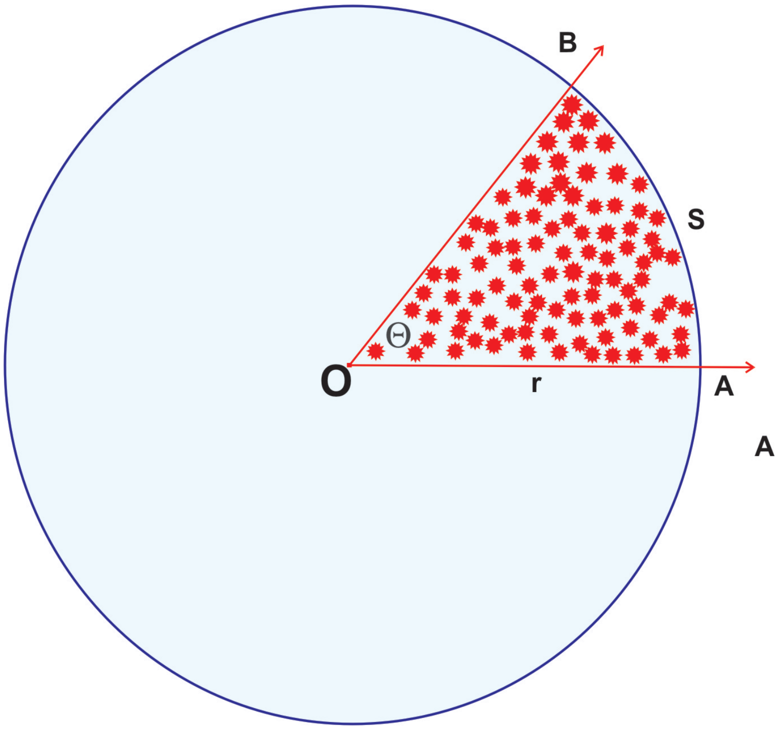
## B

Escribo en mi cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde y si es necesario copio también los ejercicios resueltos que se presentan.

Se describen algunos conceptos que son necesarios para poder comprender la deducción de algunas fórmulas para derivar las funciones trigonométricas.

ARCOS Y SECTORES CIRCULARES: la medida en radianes de un ángulo central de un círculo se utiliza para hallar la longitud del arco que subtiende el ángulo y el área del sector circular determinado por el ángulo central.

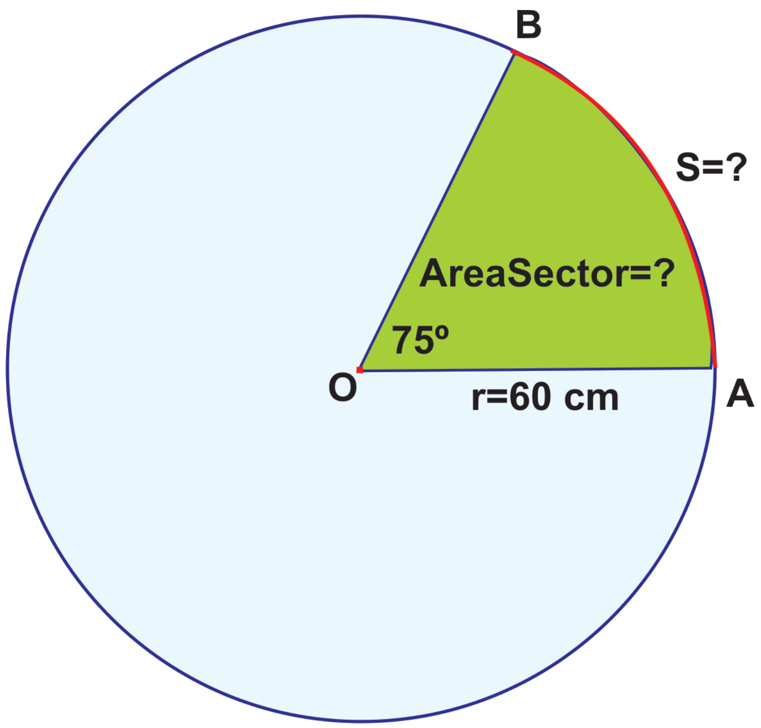
Consideremos el círculo de radio *r* y la medida en radianes del ángulo central $\Theta$, como se muestra en la figura:




Como la medida del ángulo central $\Theta$ y la longitud s del arco son proporcionales (a mayor ángulo mayor arco), es cierta la proporción: $\frac{\Theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$ . Luego $s = \Theta r$ .

De modo similar, las áreas del sector y del círculo son proporcionales a las medidas de los arcos, se tiene: $\frac{\acute{A}rea Sector}{s} = \frac{\acute{A}rea Circulo}{2\pi}$ o sea $\frac{\acute{A}rea Sector}{s} = \frac{\pi r^2}{2\pi}$ . Luego: $\acute{A}rea Sector = \frac{sr^2}{2}$ .

**Ejemplo 1:** el radio de un círculo es 60 centímetros ¿Cuál es la longitud de un arco de ese círculo intersectado por un ángulo de 75º? ¿Cuál es el área del sector respectivo?




**Solución:** de acuerdo con las deducciones hechas antes, se expresa el ángulo central en radianes: $\Theta = \dfrac{75^{o}\, x\pi}{180^{o}} = \dfrac{5\pi}{12}$ (radianes). Luego:

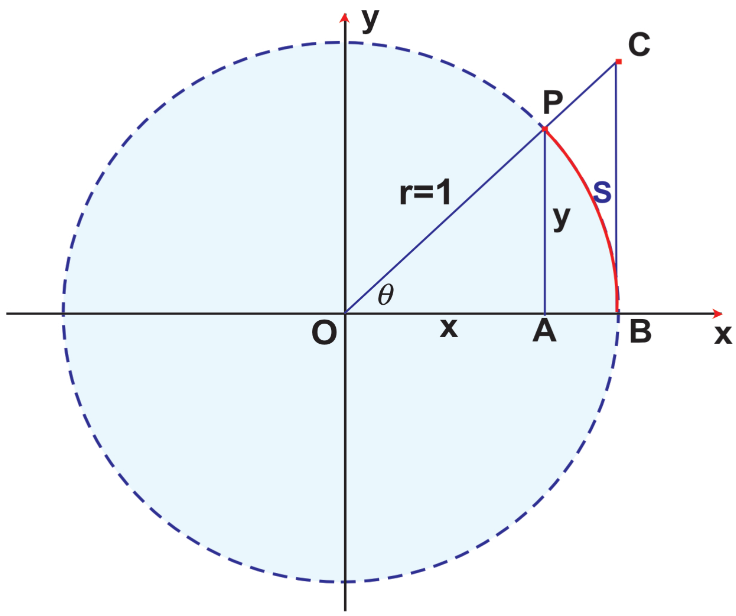
$$s = \Theta\, r = \frac{5\pi}{12} * 60cm = 25\pi cm \approx 78.53cm \quad \text{Área Sector} = \frac{sr^2}{2} = \frac{25\pi * 3600cm^2}{2} \approx 141354\, cm^2$$

**Ejemplo 2:** el extremo del minutero de un reloj recorre $\dfrac{7\pi}{10}$ centímetros en 3 minutos. ¿Cuál es la longitud del minutero?

**Solución:** en 3 minutos el minutero genera un ángulo de 18º, pues en 60 minutos barre un ángulo de 360º. Luego, se aplica $s = \Theta r$ y se despeja r, quedando:

$$r = \frac{s}{\Theta} = \frac{\dfrac{7\pi}{10}cm}{\dfrac{\pi}{10}} \Rightarrow s = 7cm,$$ que es la longitud del minutero.

## LAS FUNCIONES SENX Y COSX DEFINIDAS EN LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA




En el triángulo rectángulo OAP: Sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$; Cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$

Ahora, usando los elementos anteriores probaremos que:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{Sen\theta}{\theta} = 1.$$

En efecto, en la figura anterior: área $\Delta OAP < Área\ Sector\ OBP < Área\ \Delta OBC$ , como se ve en la figura. Si aplicamos fórmulas para calcular el área, queda:

$$\frac{xy}{2} < \frac{\widehat{s} * r^2}{2} < \frac{OB * BC}{2}$$

Luego: $\frac{Cos\theta\, Sen\theta}{2} < \frac{\widehat{s}}{2} < \frac{BC}{2}$. Multiplicando por $\frac{2}{Sen\theta}$, queda:

$$Cos\theta < \frac{s}{Sen\theta} < \frac{BC}{Sen\theta}$$

Pero BC = Tan $\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$ y si se reemplaza, queda:

$$Cos\theta < \frac{s}{Sen\theta} < \frac{1}{Cos\theta}$$

Si tomamos los inversos, el sentido de la inecuación cambia. Luego:

$$\frac{1}{Cos\theta} > \frac{s}{Sen\theta} > Cos\theta$$

Si se pasa de nuevo a minorantes y se da el paso al límite cuando $\theta \to 0$, resulta:

$$Cos0 < \frac{s}{Sen\theta} < \frac{1}{Cos0}$$

Como Cos0=1, queda: $1 < \frac{s}{Sen\theta} < 1$. Si $\frac{s}{Sen\theta}$ es mayor que 1 y a la vez menor que 1, tiene que ser igual a 1. Por tanto, $\lim_{\theta \to 0} \frac{Sen\theta}{\theta} = 1$

Con estos elementos se puede probar que si U = F(x), entonces $\frac{dSenU}{dx} = CosU \frac{du}{dx}$.

En efecto:

1) $y = SenU$ (Función dada)

2) $y + \Delta y = Sen(U + \Delta u)$ (Incrementando tanto la función como la variable)

3) $\Delta y = Sen(U + \Delta u) - SenU$ (Ecuación general de incrementos)

4) $\Delta y = 2Cos(U + \frac{1}{2}\Delta u)Sen\frac{1}{2}\Delta u$ (Pues SenX-SenY=2 Cos $\frac{1}{2}(X+Y)$Sen $\frac{1}{2}$(X-Y) )

5) $\frac{\Delta y}{\Delta u} = Cos(U + \frac{1}{2}\Delta u)\frac{Sen\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$ (Porque multiplicar por 2 equivale a dividir por $\frac{1}{2}$)

6) $\frac{dSenU}{du} = \lim_{\Delta x \to 0} Cos(U + \frac{1}{2}\Delta u) * \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Sen\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$

Y de acuerdo con la demostración anterior: finalmente, como U=F(x), se tiene: $\frac{dSenU}{du} = Cos\ U \quad \frac{dSenU}{dx} = CosU\frac{du}{dx}$, que es la fórmula para derivar el seno de un ángulo y que se enuncia: la derivada del seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo por la derivada del ángulo.

Para deducir las fórmulas para derivar las otras funciones trigonométricas se utilizan las relaciones fundamentales, la fórmula anterior y las derivadas de las funciones algebraicas, así: $\frac{dCosU}{dx} = -SenU\frac{du}{dx}$. En efecto:

1) $\frac{dCosU}{dx} = \frac{dSen(\frac{\pi}{2} - U)}{du} = Cos(\frac{\pi}{2} - U)(-1) = -Cos(\frac{\pi}{2} - U) = -SenU$

(Porque las cofunciones de ángulos complementarios son iguales).

2) $\frac{dCosU}{dx} = -SenU\frac{dU}{dx}$, pues $U = F(x)$

La fórmula queda: la derivada del coseno de un ángulo es igual a menos el seno del ángulo por la derivada del ángulo.

De manera similar, se pueden deducir las fórmulas para derivar las demás funciones, así:

La derivada de la tangente de un ángulo es igual a la secante al cuadrado del ángulo por la derivada del ángulo.

La derivada de la cotangente de un ángulo es igual a menos la cosecante al cuadrado del ángulo por la derivada del ángulo.

La derivada de la secante de un ángulo es igual a la secante del ángulo, por la tangente del ángulo y por la derivada del ángulo.

La derivada de la cosecante de un ángulo es igual a menos la cosecante del ángulo, por la cotangente del ángulo y por la derivada del ángulo.

He aquí un resumen de las fórmulas para diferenciar las funciones trigonométricas, siendo U = F(x):

$$Y = SenU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dSenU}{dx} = CosU\frac{dU}{dx}$$

$$Y = CosU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dCosU}{dx} = -SenU\frac{dU}{dx}$$

$$Y = CotU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dCotU}{dx} = -Csc^2U\frac{dU}{dx}$$

$$Y = SecU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dSecU}{dx} = Sec\,UTanU\frac{dU}{dx}$$

$$Y = CscU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dCscU}{dx} = -Csc\,UCotU\frac{dU}{dx}$$

Para aplicar las fórmulas de diferenciación de las funciones trigonométricas es preciso enfocar el problema, primero, desde el punto de vista algebraico con el fin de identificar las posibles operaciones elementales.

Ejemplo: Calcular $\frac{dY}{dx}$ en:

1) Y = Sen2X.

**Solución:** $\frac{dY}{dx} = \frac{dSen2X}{dx} = Cos2X\frac{d2X}{dx} = 2Cos2X$ (Derivada de la función Seno de un ángulo).

2) $Y = CosX^2$.

**Solución:** $\frac{dY}{dx} = -SenX^2\frac{dX^2}{dx} = -2XSenX^2$ (Derivada del coseno de un ángulo).

3) $Y = Tan^2X$.

**Solución:** $\frac{dY}{dx} = \frac{dTan^2X}{dx} = 2Tan\,X\frac{dTanX}{dx} = 2TanXSec^2X$ (Derivada de una potencia en donde la base es TanX).

4) Y= Sec2X.

**Solución:** $\frac{dY}{dx} = \frac{dSec2X}{dx} = Sec2XTan2X\frac{d2X}{dx} = 2Sec2XTan2X$ (Derivada de la secante de un ángulo)

5) $Y = CotX^2$.

**Solución:** $\frac{dY}{dx} = \frac{dCotX^2}{dx} = -Csc^2X^2\frac{dX^2}{dx} = -2XCsc^2X^2$ (Derivada de la cotangente de un ángulo).

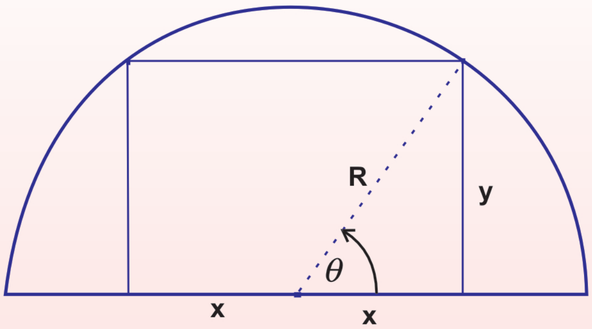
6) Y= Sen2XCosX.

**Solución:** $\frac{dY}{dx} = \frac{d(Sen2XCosX)}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{dY}{dx} = Sen2X\frac{dCosX}{dx} + CosX\frac{dSen2X}{dx} = Sen2X(-SenX) + CosX\,Cos2X\frac{d2X}{dx}$$

(Derivada del producto de dos variables) $\Rightarrow \frac{dY}{dx} = -Sen2X\,SenX) + 2CosX\,Cos2x$

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio R, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la máxima área de dicho rectángulo, expresada en función del ángulo θ ?




Solución: sean "x" la longitud de la mitad de la base del rectángulo y "y" su altura. Entonces su área es A = 2xy. Como el triángulo rectángulo tiene hipotenusa R y catetos x e y, se tiene que $x = RCos\theta$ y $y = RSen\theta$. Como cada valor de $\theta$ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ radianes corresponde a un rectángulo inscrito posible, se pueden reemplazar x e y en la fórmula del área, para obtener:

$A = 2R\,Cos\theta\,(R\,Sen\theta) = 2R^2\,Sen\theta\,Cos\theta$. Luego:

$\frac{dA}{d\theta} = 2R^2(-Sen^2\theta + Cos^2\theta)$ (Derivada de un producto de dos funciones).

$2R^2(-Sen^2\theta + Cos^2\theta) = 0 \Rightarrow -Sen^2\theta + Cos^2\theta = 0$ (Se iguala la derivada a 0 para calcular los valores críticos).

$$Sen^2\theta = Cos^2\theta \Rightarrow \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta} = 1 \Rightarrow Tan^2\theta = 1 \Rightarrow Tan\theta = \pm 1$$

Como el único valor posible entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ tal que tan = 1 es $\theta = \frac{\pi}{4}$ , se puede probar por cualquiera de los métodos vistos que para ese valor del ángulo la función A presenta un máximo que es $A = 2R^2 Sen\frac{\pi}{4} Cos\frac{\pi}{4} = 2R^2 \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$ , o sea: $A = R^2$. Las dimensiones del rectángulo son:

Largo = $2x = 2RCos\frac{\pi}{4} = 2R\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$ y Altura = $y = RSen\frac{\pi}{4} = R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Con el fin de afianzar el conocimiento de las derivadas de las funciones trigonométricas, resuelvo en mi cuaderno de matemáticas las siguientes cuestiones, comparto mis resultados con los compañeros del subgrupo, discutimos nuestros puntos de vista y después de ponernos de acuerdo hacemos una plenaria con el profesor para detectar posibles falencias. Para la realización de los ejercicios definamos, a manera de planeación, los procedimientos o pasos que vamos a seguir con el fin de lograr una buena calidad. Utilicemos un esquema como el siguiente:

| *Actividad* | *Cuidado especial* | *Resultado esperado* | *Tiempo Requerido* |
|---|---|---|---|
| | | | |

1. En las funciones siguientes calculo la derivada respecto de la variable.

   a) $Y = Sen 4X$
   
   b) $Y = Sen(3X + 1)$
   
   c) $Y = Tan 3X$
   
   d) $F(x) = Cos(3X + 1)^2$
   
   e) $G(x) = Cot X^3$
   
   f) $G(t) = Sec(X^2 + X + 1)$
   
   g) $Cot^3(x)$

h) $Y = Csc2X$

i) $F(x) = Sen^3 2X$

j) $Y = Sec2XSenX^3$

k) $Y = \frac{CscX}{TanX}$

l) $F(x) = X^2 SenX$

m) $Y = 3Sen2XCosX$

n) $SenX^2 + CosY^2 = 1$

o) $SenXCosY^2 = 1 - Y$

2) En el intervalo $[0^o, 360^o]$ determino los valores del ángulo X para que se satisfagan las siguientes ecuaciones:

a) SenX = CosX
b) TanX = SenX

3) También en el intervalo $[0^o, 360^o]$, busco los valores extremos de las funciones Y = SenX y Y = CosX. Compruebo los resultados elaborando una gráfica de cada una de las funciones, bien sea en forma manual o utilizando la aplicación CABRI II. Comparo mis resultados con los de otros compañeros, justificando las respuestas para llegar a un acuerdo. Invitamos al profesor para solucionar posibles discrepancias.

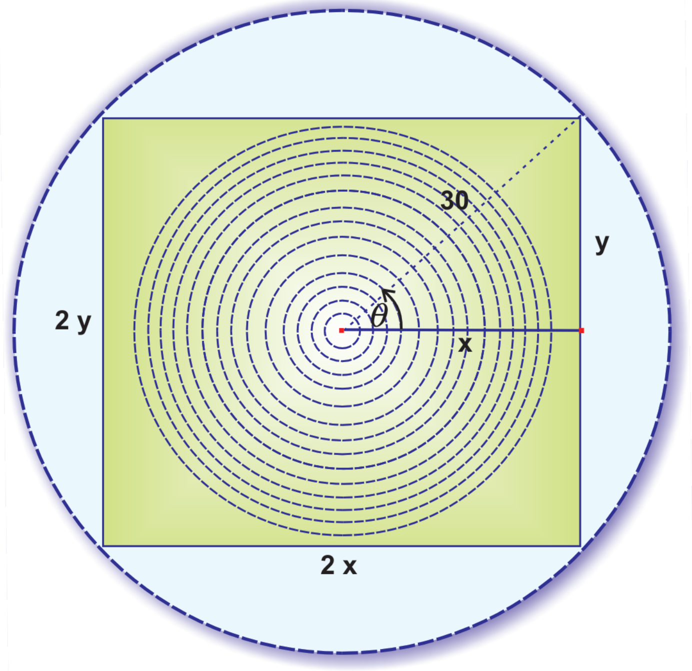
4) Usando CABRI II dibujo, en una mismo sistema de coordenadas cartesianas, las gráficas de SenX y CscX para verificar que en los puntos en donde una de las funciones presenta un máximo su inversa tiene un mínimo, y recíprocamente. Luego, hago lo mismo con las funciones CosX y SecX.

D

Como aplicación a la diferenciación de las funciones trigonométricas, resuelvo un problema de aserradero como el siguiente:

1. Suponga que requiere cortar una viga con una sección trasversal rectangular máxima a partir de un tronco circular con un radio de 30 centímetros, como se

muestra en la figura. Debe calcular las dimensiones del rectángulo y el valor del área, maximizando el área A (de color verde) del rectángulo como una función del ángulo, en forma similar a como se resolvió el último ejercicio en la sección B.




Compare sus resultados con otros compañeros y discutan hasta ponerse de acuerdo.

2. Como éste es un concepto manejado empíricamente por los aserradores, gestionemos y administremos una visita a un aserradero[1], para que nos expliquen y demuestren cómo se calculan los cortes en la madera.

3. Finalmente, hagamos un análisis que nos permita evaluar el desempeño del grupo en la actividad anterior. Para ello podemos tener en cuenta los siguientes indicadores:

   - Planeamiento de la visita usando, por ejemplo, un diagrama de Gant.
   - Distribución de actividades de acuerdo con aptitudes e intereses.
   - Resultados de la actividad.

4. Evaluemos los resultados obtenidos en el desarrollo de la guía, con el fin de mejorar procesos en el desarrollo de otras guías.

[1] Aserradero: sitio donde asierran la madera, la piedra u otras cosas.

# ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA