Grado 11o

EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO

INSTITUCIONES PARTICIPANTES DEL PROYECTO:
Fundación Luker
Comité de Cafeteros de Caldas
Corpoeducación
Instituto Caldense para el Liderazgo
Secretaría de Educación de Manizales
Universidad Autónoma de Manizales

CÁLCULO

UNIDADES 4·5·6·7

Impresión: Carvajal Soliciones de Comunicación S.A.S
Mayo 2019

Grado 11º

EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO

Autor Cálculo:
ABEL ANTONIO AGUDELO CARMONA
Licenciado en matemáticas - Universidad Católica-
Posgrado en computación para la docencia -Universidad Antonio Nariño-

Asesoría y Coordinación:
Mg. RUBIEL TRUJILLO ARIAS
Lic. JOSÉ RAÚL OSPINA OSORIO
I.A. CLAUDIA MILENA CARDONA TORRES
Consultora Asociada Corpoeducación LILIANA GONZÁLEZ ÁVILA

Diseño y diagramación:
ESPACIO GRÁFICO COMUNICACIONES S.A.

CÁLCULO

UNIDADES 4 · 5 · 6 · 7

PRESENTACIÓN

El presente módulo de interaprendizaje para grado 11º hace parte de la estrategia de ampliación de cobertura en educación media para el área rural del departamento de Caldas. Este material pedagógico, el cual sigue los principios y fundamentos del Programa Escuela Nueva, ofrece los contenidos generales del área de Cálculo de acuerdo con los estándares curriculares y promueve en los estudiantes el desarrollo de competencias laborales generales, las cuales les permitirán desempeñarse exitosamente en su vida productiva futura.

El diseño de este material se realizó en el marco del Proyecto de **EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO** adelantado por el Comité de Cafeteros de Caldas, con el importante concurso de la Fundación Luker, quien aportó el capital semilla para el diseño y puesta en marcha de la propuesta de educación media para el área rural del departamento de Caldas, Corpoeducación, el Instituto Caldense para el Liderazgo, la Universidad Autónoma de Manizales y la Secretaría de Educación de Manizales, éstas últimas instituciones pusieron a disposición del proyecto su experiencia en el desarrollo de proyectos educativos, orientados hacia la educación para el trabajo.

Esta primera versión de módulos para el grado 11º debe considerarse como material de prueba y por lo tanto estará sujeto a las modificaciones que se requieran, tanto en contenido como en presentación.

Adicionalmente, este módulo maneja un componente transversal de proyecto de vida, con el ánimo de atender las necesidades de los jóvenes con relación a su orientación vocacional.

Agradecemos a los autores por sus conocimientos, dedicación y esfuerzo puesto en el diseño del presente módulo de interaprendizaje con Metodología Escuela Nueva.

ELSA INÉS RAMÍREZ MURCIA

Coordinadora Programas de Formación y Educación˚

Comité de Cafeteros de Caldas

Presentación

La alianza por la Educación Rural de Antioquia ERA tiene el propósito de fortalecer la educación rural en todos los niveles, aportando en términos de cobertura, calidad y pertinencia, con el fin de contribuir significativamente al desarrollo social y económico de las comunidades en sus territorios. Para lograrlo, está implementando un programa de acompañamiento a las instituciones y sus sedes educativas, basado en los principios de las pedagogías activas, que articula todos los niveles educativos hasta llegar a la Universidad en el Campo.

Los principios de las pedagogías activas parten del ser: la persona como centro de un aprendizaje activo y significativo. Pretenden brindar una educación que facilite al individuo desempeñarse en los diferentes aspectos de la vida, ser feliz, proyectarse y ser útil a su comunidad.

El material de interaprendizaje es fundamental para el desarrollo de las pedagogías activas. Este centra el aprendizaje en el estudiante, responde de manera significativa a cada uno de los principios y favorece sustancialmente el desarrollo de competencias. Está compuesto por módulos que contienen guías con las que los estudiantes interactúan, dialogan, y en las que se promueven diferentes formas de trabajo como: trabajo individual, en equipo o en grupo. El trabajo con guías de interaprendizaje propicia la reflexión, el trabajo colaborativo y el desarrollo de la autonomía, a través de momentos que se relacionan y dan significado a los aprendizajes.

Además, los módulos son herramientas que le facilitan al docente su labor como mediador en el proceso de aprendizaje y posibilitan el trabajo en aulas multigrado (varios grados en una misma aula), donde el maestro debe acompañar las diferentes áreas del currículo.

Agradecemos al área de educación del Comité de Cafeteros de Caldas por compartir con las comunidades de Antioquia su experiencia y el material desarrollado; un material diseñado teniendo en cuenta las pautas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional y las necesidades del contexto rural.

Este material no pretende remplazar al maestro y, por el contrario, es una oportunidad para fortalecer su rol dentro del aula de clase y en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

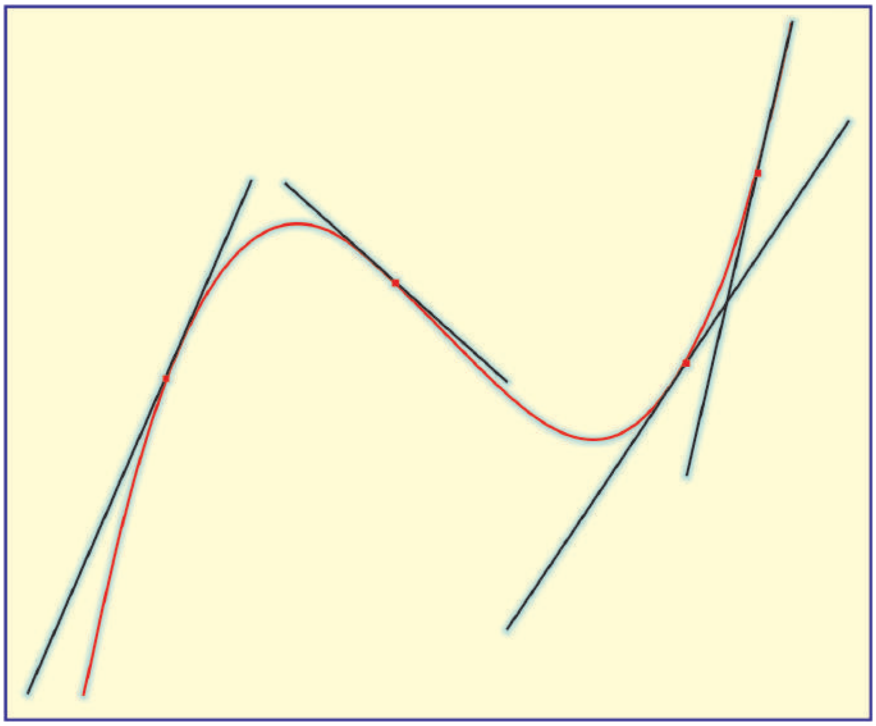
Invitamos a los directivos docentes, maestros y estudiantes a utilizar de manera responsable este material, a adoptarlo y adaptarlo como apoyo al desarrollo del plan curricular. Hacerlo, dará mayores oportunidades al desarrollo rural de nuestra región.

era
EDUCACIÓN RURAL
PARA ANTIOQUIA

CONTENIDO

UNIDAD 4

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN Y SUS APLICACIONES



Históricamente la derivada surge para resolver el problema del trazado de la tangente a una curva plana en uno de sus puntos. En la figura se observan varias tangentes trazadas a la curva en algunos puntos de ella.

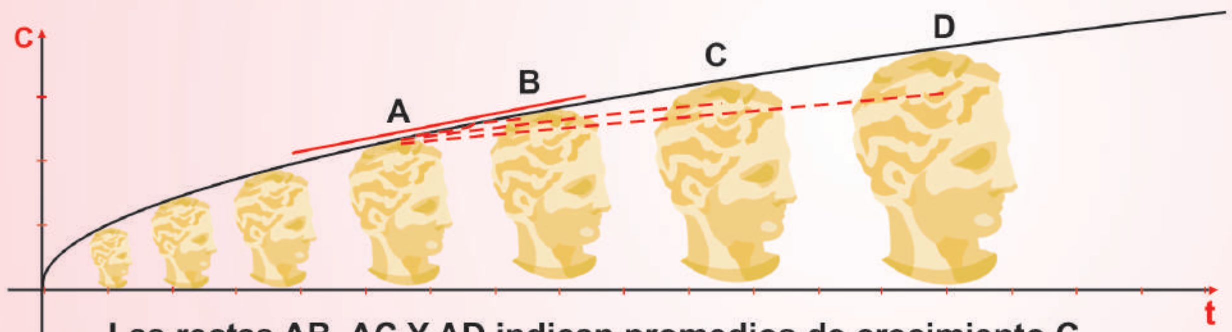
LOGROS

- Interpreta la derivada de una función en un punto como la pendiente de la tangente geométrica en ese punto
- Calcula las ecuaciones de la tangente geométrica y de la normal a una curva en un punto dado y las grafica
- Define y calcula los valores extremos de una función y usa el resultado para bosquejar la curva

- Aplica en el diseño y la construcción la teoría de los máximos o mínimos de una función
- Aplica correctamente la derivada de una función para resolver problemas acerca de rapidez de cambio, velocidad instantánea y aceleración
- Usa el teorema de L'Hôpital para eliminar más fácilmente algunas formas indeterminadas usando la derivada
- Maneja acertadamente el conflicto y contribuye positivamente a su solución (MANEJO DEL CONFLICTO)
- Analiza, elige y pone en marcha alternativas de solución (TOMA DE DECISIONES)
- Orienta sus acciones y procesos a la satisfacción de necesidades de los otros (ORIENTACIÓN AL SERVICIO)
- Dinamiza procesos con métodos y enfoques innovadores (CREATIVIDAD)
- Contribuye con su actitud y comportamiento a mejorar el ambiente (RESPONSABILIDD AMBIENTAL)

GUÍA 1

¿CÓMO INTERPRETAR GEOMÉTRICAMENTE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN?



Las rectas AB, AC Y AD indican promedios de crecimiento C en tiempos pequeños t. La tangente geométrica en el punto A indica el crecimiento en ese instante específico.

INDICADORES DE LOGRO

- Reconoce en la derivada de una función la pendiente de la tangente geométrica en un punto de ella
- Dada una función, calcula adecuadamente la ecuación de la recta que es tangente geométrica a la curva en cierto punto
- Define la recta normal a una curva y calcula su ecuación usando la derivada de la función
- Identifica los conflictos que surgen en su entorno y sus posibles causas **(MANEJO DEL CONFLICTO)**
- Reconoce las potencialidades y limitaciones, al igual que las de su grupo
- Reconoce y respeta la diversidad de actitudes y opiniones
- Propicia encuentros que permiten el acercamiento entre las partes en conflicto
- Participa activamente en las discusiones, explora y propone alternativas de solución

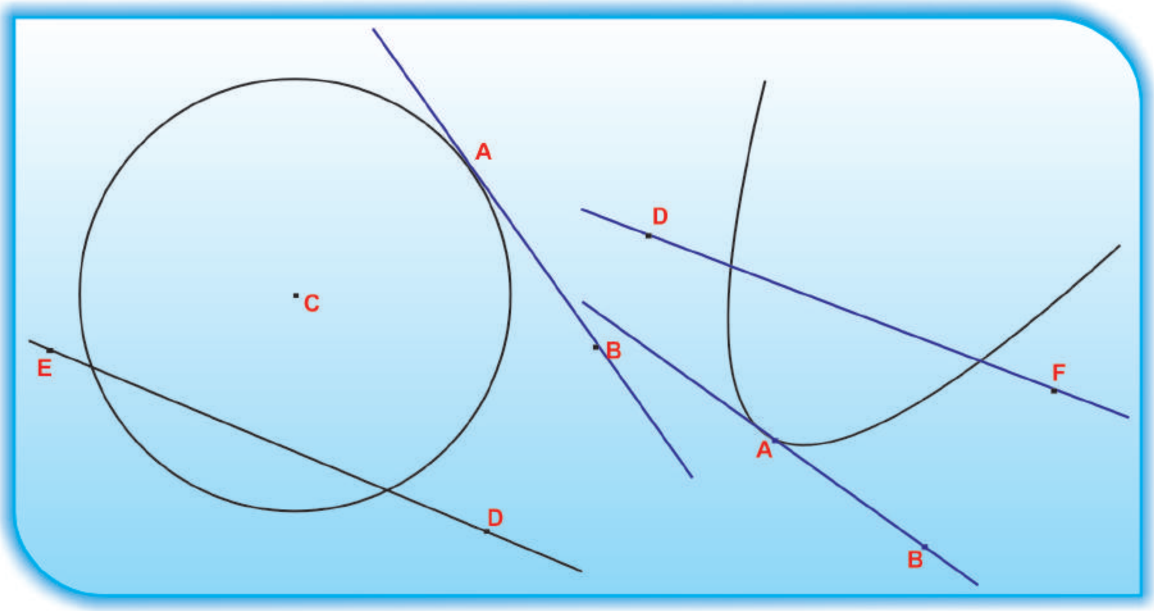
Con los compañeros leemos y analizamos el contenido que aparece a continuación. Amén de la interpretación geométrica de la derivada que vamos a estudiar en esta guía, también trataremos la **C.L.G. MANEJO DEL CONFLICTO,** que se entiende como "Discutir intereses u opiniones entre individuos o grupos causa un choque, a veces irreconciliable, entre ellos. La existencia del conflicto está aceptada como una parte inevitable del funcionamiento social. El conflicto es el resultado de la competencia entre dos o más partes; una de las cuales puede ser una persona, una familia, una institución o una comunidad entera".

Estemos pues, atentos a los conceptos y actividades que encontremos en la guía, relacionados con esta competencia.

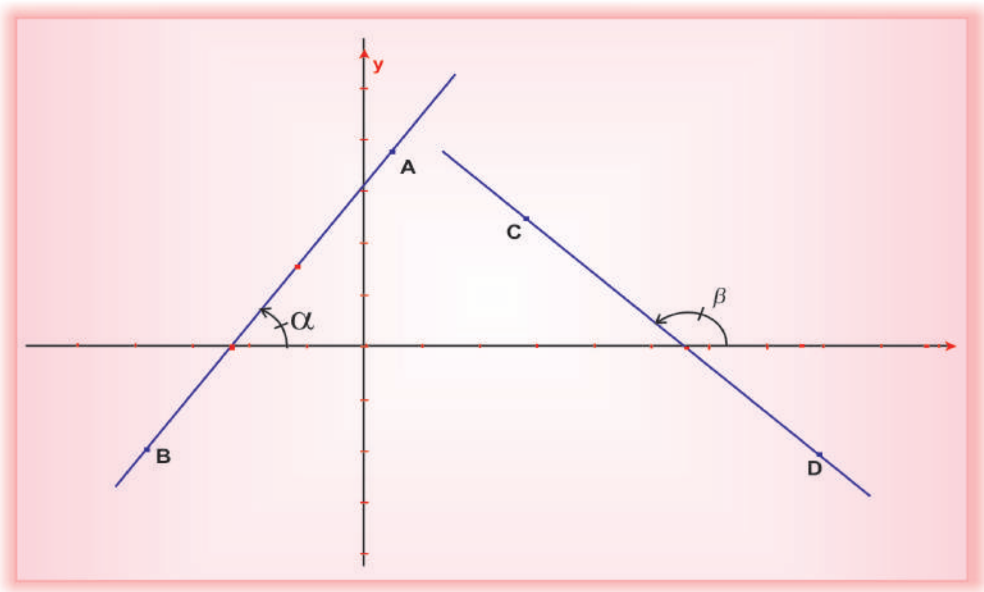
A

Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir, lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

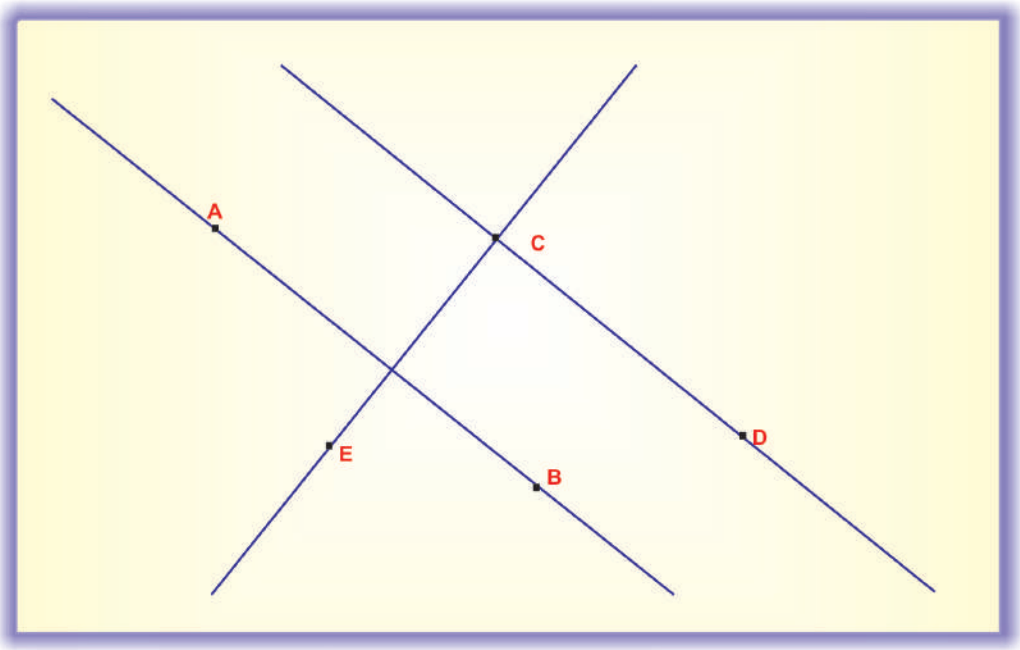
En la figura siguiente, y con relación a cada curva, identifico: ¿Cuáles rectas son secantes? y ¿Cuáles son tangentes? Justifico mis respuestas.



En esta otra gráfica, ¿Qué es α con relación a la recta AB? y ¿Qué es β respecto de la recta CD?. Defino la pendiente para cada una de las rectas AB y CD.



Igualmente, en la siguiente gráfica las rectas AB y CD son paralelas ¿Cómo son sus pendientes? y las rectas AB y CE son perpendiculares ¿Cómo son sus pendientes?



Una recta pasa por los puntos A(2, -3) y B(1, 4). La dibujo en el plano cartesiano y luego encuentro su ecuación.

Si tengo dificultades con las respuestas, aclaro mis dudas acudiendo a geometría analítica.

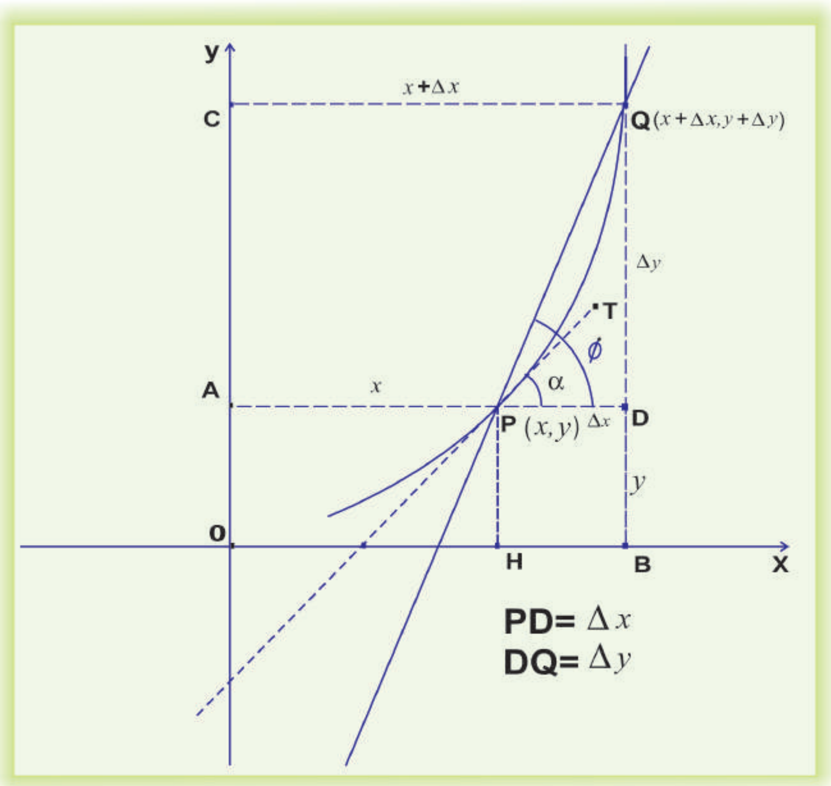
Si al compartir mi trabajo con el compañero surgen algunos puntos de vista diferentes, buscamos las causas y proponemos alternativas para salir del impase.

B

INTERPRETEMOS GEOMÉTRICAMENTE LA DERIVADA

Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde, analizando rigurosamente los ejemplos propuestos. Si lo requiero, elaboro gráficas.

Sea Y = F(x) una función cuya gráfica es la curva que muestra la figura:



Sea P(x,y) un punto que le pertenece a la curva. Si se incrementan, tanto "X" como "Y" en Δx y Δy, respectivamente, resulta otro punto $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ que también le pertenece a la curva.

Tracemos la secante PQ cuya inclinación es el ángulo ϕ. Si calculamos su pendiente, se tiene: (1) $m_{PQ} = Tan\phi = \frac{DQ}{PD} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (cateto opuesto sobre cateto adyacente).

Si hacemos que Q recorra la curva, aproximándose indefinidamente a P, llegará un momento en el que Q se confunde con P; ϕ será igual a α; la secante QP se confundirá con la tangente PT, en tanto que Δx tenderá a cero. En estas condiciones, podemos escribir :

(2) $m_{PT} = \lim_{Q \to P} PQ = \lim_{\phi \to \alpha} Tan\phi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Y dando el paso al límite, resulta:

(3) $m_{PT} = Tan\alpha = \frac{dy}{dx}$, por la definición de derivada de una función.

CONCLUSIÓN: la derivada de una función en un punto P de ella es la pendiente de la tangente geométrica a la función en dicho punto.

Una importante aplicación de este principio lo encontramos en el cálculo de la TANGENTE geométrica a una curva en un punto P(x,y) de ella.

Ejemplo 1, hallar la ecuación de la tangente geométrica a la función $Y = X^2$ en el punto P(2,4).

Solución:

(1) $Y - Y_1 = m_t(X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(2) $m_t = \frac{dy}{dx} = 2X$ (Derivando con respecta a X la función $Y=X^2$

(3) $m_t = 2(2) = 4$ (Valor de la pendiente cuando X=2)

(4) Y - 4 = 4(X - 2) (Reemplazando Y_1, X_1 y m_t en la (1))

(5) Y = 4X - 4 ó 4X - y - 4 = 0 (Que es la ecuación de la tangente).

LA RECTA NORMAL: se llama NORMAL a una curva a la recta que es perpendicular a la TANGENTE geométrica por el punto de tangencia.

Ejemplo 2: en el ejercicio anterior, hallar la ecuación de la normal en el punto P(2,4).

Solución

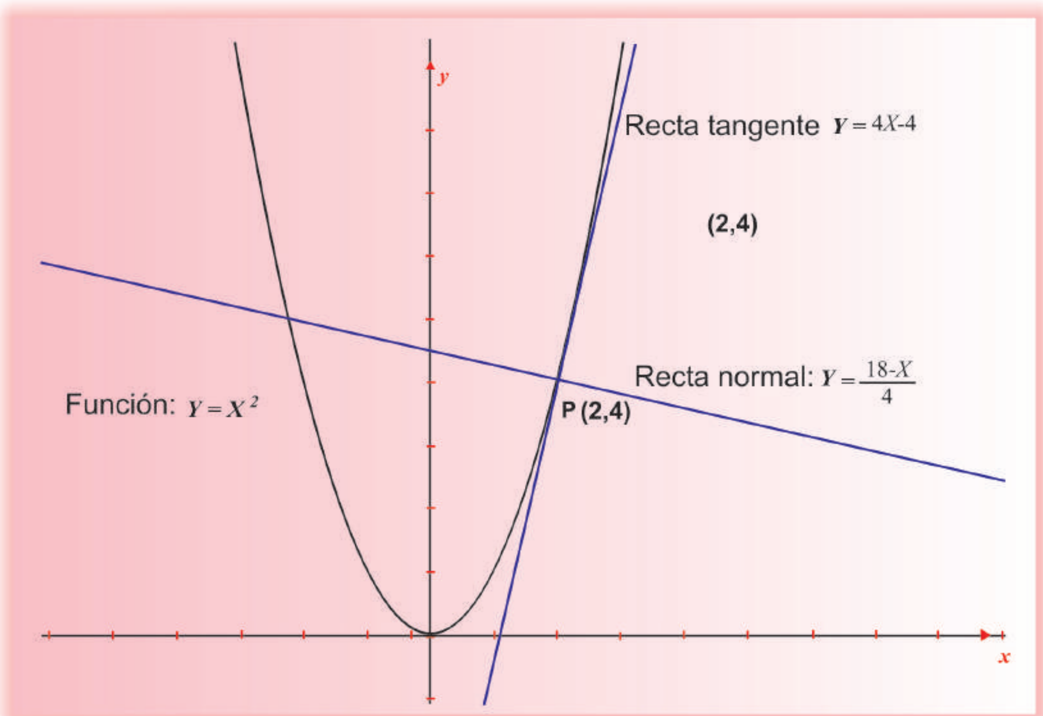
(1) $Y - Y_1 = m_n (X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(2) Si $m_t = 4 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{4}$ (Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son INVERSAS y de signo contrario).

(3) $Y - 4 = -\frac{1}{4}(X - 2)$ (Reemplazando Y, X_1 y m_n en la (1))

(4) $Y = \frac{18 - X}{4}$ ó $X + 4Y - 18 = 0$ (Que es la ecuación de la normal).

En la gráfica, se ven la función, la recta tangente y la recta normal en P.



Ejemplo 3: dada la función $Y = \frac{2}{X+3}$, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto P cuya abscisa es 1.

Solución:

Calculamos la segunda coordenada reemplazando el valor de X en la función dada:

$Y = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Luego el punto es $P(1, \frac{1}{2})$

(1) $Y - Y_1 = m_t(X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(2) $m_t = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(X+3)^2}$ (Derivando con respecto a X la función $Y = \frac{2}{X+3}$)

(3) $m_t = -\frac{2}{(1+3)^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$ (Valor de la pendiente cuando X=1)

(4) $Y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}(X - 1)$ (Reemplazando Y_1 , X_1 y m_t en la (1))

(5) X + 8Y - 5 = 0 (Que es la ecuación de la tangente)

Para la recta normal:

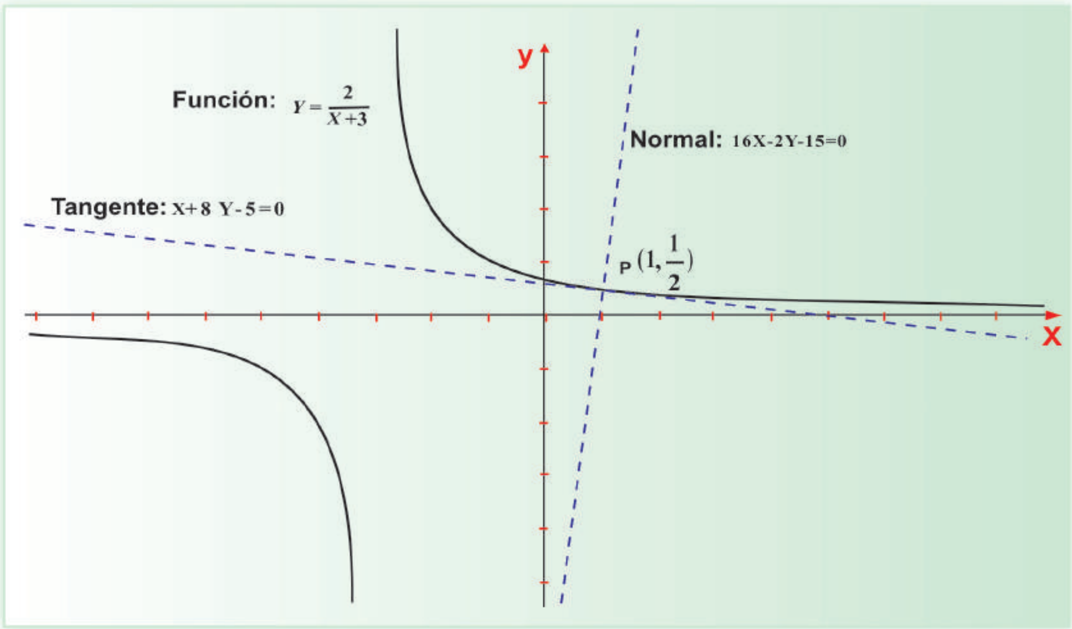
(1) $Y - Y_1 = m_n(X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

Si $m_t = -\frac{1}{8} \Rightarrow m_n = 8$ (Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son INVERSAS y de signo contrario).

(2) $Y - \frac{1}{2} = 8(X - 1)$ (Reemplazando Y_1 , X_1 y m_n en la (1))

(3) 16X - 2Y - 15 = 0 (Que es la ecuación de la normal).

Gráficamente, se muestra así:



Ejemplo 4: hallar la ecuación de la normal a la parábola $Y = 5X + X^2$ que forma un ángulo de 45º con el eje positivo de las X.

Solución: si la normal forma un ángulo de 45º con el positivo de las X, entonces pendiente es 1 y en consecuencia la pendiente de la tangente geométrica es -1. Luego para hallar el punto de tangencia basta hallar la derivada de la función, igualarla a -1, resolver la ecuación resultante para obtener el valor de la abscisa en dicho punto y luego calcular la ordenada, así:

(1) $Y = 5X + X^2$ (Función dada)

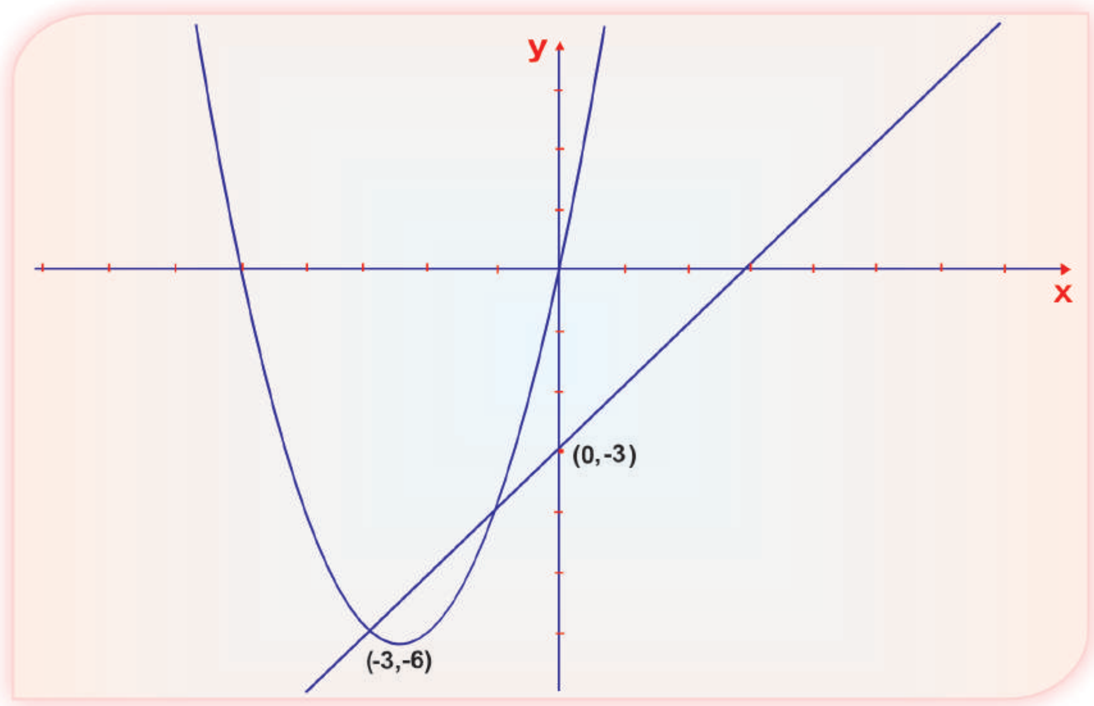
(2) $Y = 5X + X^2$ (Derivando la función dada)

(3) $5 + 2X = -1 \Rightarrow X = \frac{-6}{2} \Rightarrow X = -3$ (Se resuelve la ecuación para calcular la abscisa en el punto de tangencia)

(4) $f(x) = 5(-3) + (-3)^2 = -6$ (O sea que (-3, -6) es el punto de tangencia)

(5) $Y - Y_1 = m_n (X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(6) $Y + 6 = 1(X + 3)$ entonces $X - Y - 3 = 0$ (Que es la ecuación de la normal, como se ve en la gráfica. Para poder dibujar la recta normal se calcula otro punto como el (0, -3), que le pertenece a la ecuación (6)).



Ahora que hemos interpretado geométricamente la derivada, volvamos sobre la solución del conflicto:

Cuando los conflictos aparecen deben ser manejados de modo inteligente, echando mano de la capacidad para reconocer situaciones de difícil salida entre las personas, los grupos o las instituciones y concertar las estrategias adecuadas para contribuir a su solución asertiva, es decir, de una manera más equilibrada y armónica, sin esperar a que se resuelvan solos, pues si nos salimos por la “tangente” es probable que “deriven” en conflictos más complejos. Por tanto debemos asumir un rol activo en dicha solución, expresando sentimientos y emociones de manera adecuada, sin herir al otro y considerando sus planteamientos y emociones.

Basándome en mis apuntes y en los ejercicios resueltos, afianzo mis conocimientos por medio del desarrollo consciente de los siguientes apartes:

1) En las siguientes funciones hallo las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto que se especifica y grafico la función, la tangente geométrica y la normal.

a) $Y = 2X^2$ en el punto A(1, 2)

b) $Y = 3X^3$ en el punto B((1, 3)

c) $Y = 3X^2 - 9X + 6$ en el punto C(0, 6)

2) Determino el punto (o los puntos) donde la pendiente de la recta tangente a la curva $Y = X^3 - 2X - 3$ es igual a 1.

3) Si $F(x) = 6X - X^2$, hallo las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva en el punto de abscisa X=2. También busco el punto sobre la curva donde la recta tangente es paralela al eje X.

4) Determino en qué punto la tangente geométrica a la curva $Y = X^3 + 5$ es:

a) Paralela a la recta $12X - Y = 17$

b) Perpendicular a la recta $X + 3Y = 2$

5) Calculo las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal para las siguientes curvas en el punto que se especifica:

a) $X^2 + XY - Y^2 = 1$ en el punto A(2, 3)
b) $X^2 + Y^2 = 25$ en el punto B(3, -4)

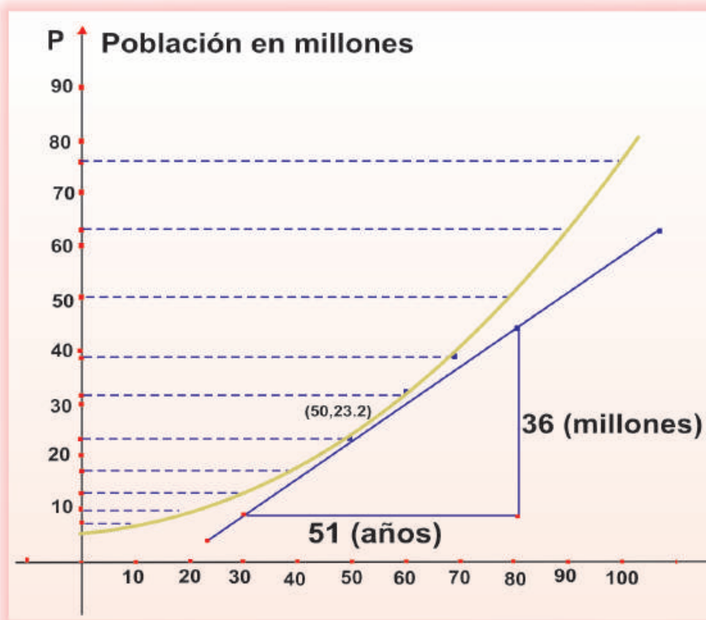
6) En las siguientes funciones determino los valores de X para los cuales $\frac{dy}{dx} = 0$:

a) $Y = X^3$
b) $Y = X^2 - 4X$

c) $Y = X^3 - 9X$

d) $Y = \sqrt{X + 1}$

7) El cálculo de la derivada, hasta este momento, se ha hecho sólo a funciones expresadas con fórmulas o descripciones verbales (de donde se infiere la fórmula). Pero los científicos e ingenieros trabajan frecuentemente con tablas de valores obtenidas a partir de observaciones o experimentos. Por ejemplo, en la figura siguiente se ve, a la derecha, una tabla que muestra la población de un país en períodos t de 10 años (desde 1800 hasta 1900) en millones de personas. Estimar la rapidez de cambio instantáneo de crecimiento de la población en 1850.



t	Año	Población en millones
0	1800	5.3
10	1810	7.2
20	1820	9.6
30	1830	12.9
40	1840	17.1
50	1850	23.2
60	1860	31.4
70	1870	38.6
80	1880	50.2
90	1890	62.9
100	1900	76.0

Solución: sea t=0 (años) en 1800, con lo cual t=50 (años) corresponde a 1850. A la izquierda de la figura anterior tenemos los datos graficados, con una curva suave que se adapta a los datos mostrados en la tabla.

Sin importar como se obtenga, una curva adaptada a los datos debe ser una buena aproximación de la gráfica real de la función desconocida P=F(t). (Para este caso, la gráfica se construyó en CABRI y se retocó en PAINT), utilizando 1 centímetro para representar 10 años en el eje horizontal o 10 millones en el eje vertical). La razón de cambio instantánea $\dfrac{dP}{dt}$ en 1850 es la pendiente de la recta tangente en el punto (50, 23.2). Se traza la tangente lo más aproximada posible, mediante una inspección visual y después se miden la base y la altura del triángulo que se ve en la figura. De esta manera se aproxima la pendiente de la tangente en t=50 años como

$\frac{dP}{dt} \approx \frac{36}{51} \approx 0.71$ millones de personas por año (en 1850). Aunque no hubo censo en 1851, se puede estimar que la población del país era de aproximadamente $23.2 + 0.71 = 23.9$ millones.

Concluida la actividad, socializo con los integrantes del subgrupo y con el profesor, los resultados. En este tipo de trabajos se pueden presentar conflictos personales o grupales, por la heterogeneidad de conceptos. Para prevenir estas situaciones, hagamos una lectura y análisis a las siguientes recomendaciones, en:

COMUNICACIÓN: es la capacidad de expresar de manera adecuada emociones y pensamientos con los demás, aunque estemos en desacuerdo con ellos.

COOPERACIÓN: consiste en trabajar juntos para realizar una tarea común, con el fin de alcanzar un mismo objetivo, en el que intervengan intereses comunes, semejantes o complementarios.

AUTOCONTROL: es la capacidad de dominar nuestras emociones y de tomar decisiones correctas, sin afectar nuestras relaciones con los demás.

TOLERANCIA: consiste en aceptar que otras personas pueden tener opiniones diferentes sobre una situación. Esto no significa soportar atropellos sino aceptar las diferencias.

RESPETO: es la demostración de aceptación de ideas y emociones ajenas (Pluralismo).

NEGOCIACIÓN: consiste en buscar puntos comunes que puedan conducir a un acuerdo que permita una solución conciliadora para ambas partes, buscando que ambas ganen, evitando el manejo violento del conflicto. Durante este proceso la comunicación juega un papel fundamental y por tanto no se debe usar mensajes de recriminación o de acusación, hablar de sí mismo y de las propias inquietudes.

D

Como aplicación práctica al tema desarrollado acerca de la utilidad de la derivada, y

AÑO	POBLACIÓN EN MILLONES
1905	4.1
1912	5.0
1918	5.8
1928	7.8
1938	8.7
1951	11.5
1964	17.4
1973	22.9
1985	29.2
1993	33.1
2002	43.8
2015	53.1

guiándome por los ejercicios resueltos (sobre todo el 7 de la sección C) analizo la siguiente tabla que muestra los resultados de los 10 censos de población realizados en Colombia durante el siglo pasado:

(Los dos últimos datos - los de color rojo - son estimativos).

1) Elabore una gráfica lo más aproximadamente posible y determine la velocidad del crecimiento anual de la población en 1993 y use el resultado para determinar la población aproximada en 1995.

2) De acuerdo a nuestra experiencia en el manejo de instrumentos del gobierno estudiantil, precisemos de qué manera éstos pueden ser utilizados en la solución de conflictos. Ofrecemos algunos ejemplos.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA