Guía 6

LAS TRIGONOMÉTRICAS TAMBIÉN TIENEN SU FUNCIÓN INVERSA

Indicadores de logros

- ✓ Identifica las funciones trigonométricas inversas y las aplica en la solución de problemas.
- ✓ Grafica las funciones trigonométricas inversas: arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente, arcosecante, arcocosecante.
- ✓ Comprende, interpreta, analiza y produce diferentes tipos de textos según sus necesidades (COMUNICACIÓN).
- ✓ Demuestra respeto por los conceptos emitidos por otros.
- ✓ Reconoce la diferencia entre procesos de información y comunicación.
- ✓ Expresa con autonomía lo que quiere y lo que piensa en forma verbal y no verbal.

LAS TRIGONOMÉTRICAS TAMBIÉN TIENEN SU FUNCIÓN INVERSA

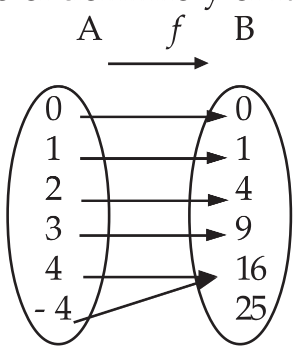
En esta guía vamos a utilizar la competencia COMUNICACIÓN o sea la capacidad para transmitir y comprender ideas y símbolos. Esto permite interactuar exitosamente con los demás, mejorar el desarrollo del pensamiento, estimula el crecimiento personal y las relaciones humanas, eleva la autoestima de la persona, generando seguridad.
La mayoría de nosotros siente que este tema de funciones es muy confuso y que es necesario hacer un breve repaso para que la comunicación con el profesor en el nuevo tema sea más eficiente.

Funciones

Analizo con un compañero el siguiente repaso y lo consigno en mi cuaderno. Presto mucha atención para captar bien la idea de función y poder entender más adelante que es una función inversa. Solicito la asesoría del profesor cuando sea necesario.

Una función asocia a cada elemento del dominio una y sólo una imagen. Si la función tiene además la propiedad de que cada par de elementos diferentes del conjunto de llegada son imágenes de elementos diferentes del dominio (1-1), entonces la función es biyectiva y se establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y el rango.

EJEMPLO 1. Sean A = {0, 1, 2, 3, 4, - 4}, B = {0, 1, 4, 9, 16, 25} y la función f: A → B, definida por f (x) = x^2, para cada "x" ∈ A. Verifico que f es biyectiva y encuentro el dominio y el rango (conjunto de llegada).

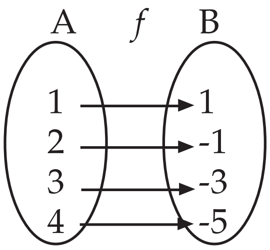


$$
\begin{aligned}
f\ (0) &= 0^2 = 0\\
f\ (1) &= 1^2 = 1\\
f\ (2) &= 2^2 = 4\\
f\ (3) &= 3^2 = 9\\
f\ (4) &= 4^2 = 16\\
f\ (-4) &= (-4)^2 = 16
\end{aligned}
$$

El Dominio es el conjunto {0, 1, 2, 3, 4, - 4} y el rango es el conjunto {0, 1, 4, 9, 16}
Todos los elementos del dominio tienen una y sólo una imagen, pero no todos tienen una imagen diferente, en efecto:

$f\,(4) = 4^2 = 16$ y $f\,(-4) = (-4)^2 = 16$; como $x_1 \neq x_2$ y $f\,(x_1) = f\,(x_2)$ entonces la función no es INYECTIVA; tampoco es SOBREYECTIVA porque existe un elemento en B que no es imagen de algún elemento de A. Por lo tanto la función *"f"* no es BIYECTIVA.

EJEMPLO 2. Sean A = {0, 1, 2, 3, 4}, B = {0, - 1, - 3, - 5} y la función f: A $\rightarrow$ B, definida por $f\,(x) = -2x + 3$, para cada $x \in$ A. Verifico que f es una BIYECCIÓN.

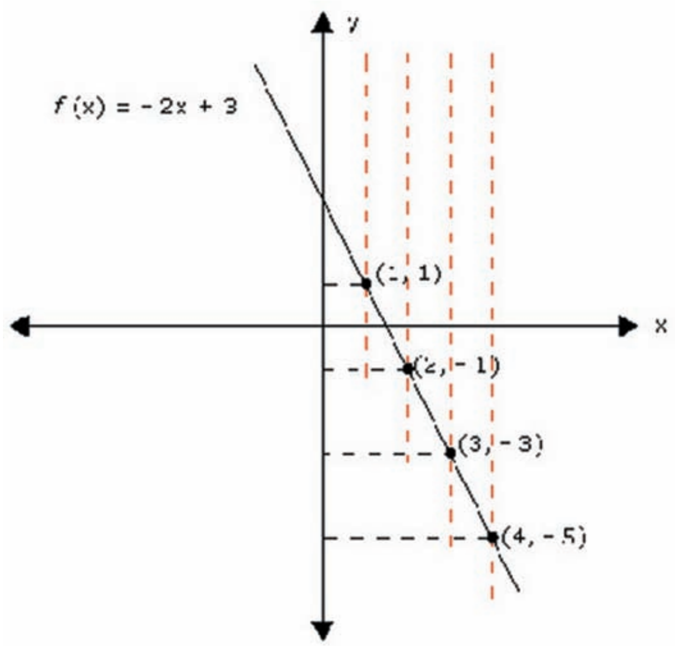


$$f\,(1) = -2\,(1) + 3 = 1$$
$$f\,(2) = -2\,(2) + 3 = -1$$
$$f\,(3) = -2\,(3) + 3 = -3$$
$$f\,(4) = -2\,(4) + 3 = -5$$

El dominio es el conjunto A = {1, 2, 3, 4} y el rango el conjunto B = {1, - 1, - 3, - 5}. Observo que dos elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes, por lo tanto la función es INYECTIVA. Además, en el conjunto de llegada, todos los elementos son imágenes de algún elemento del dominio, por lo tanto la función es SOBREYECTIVA. Como la función es INYECTIVA y SOBREYECTIVA queda comprobado que es una BIYECCIÓN.

Otro canal de comunicación para obtener la misma información del ejemplo 2, es el plano cartesiano.

x	y
1	1
2	– 1
3	– 3
4	– 5



Observo que cada punto representa una pareja (x, y), los valores correspondientes a “x” conforman el dominio y los valores de “y” conforman el rango o conjunto de llegada. Además no se repite ningún valor de “y”.

Para probar si es función, se trazan líneas verticales y si cada línea toca sólo un punto se puede asegurar que sí es función, en este caso BIYECTIVA.

Socializo con mis compañeros las conclusiones del repaso. De cada mesa saldrá un estudiante, escogido por el profesor, para resaltar los puntos básicos.

Todos los conocimientos existentes se han originado por las ideas de otros o de uno mismo. Presto atención a los nuevos temas y puedo aportar nuevas ideas cuando se presente la ocasión. Consigno en mi cuaderno la siguiente información.

B FUNCIONES INVERSAS

Si una función *f* es biyectiva, entonces podemos definir la INVERSA de la función *f* de dominio el rango de *f* y de rango el dominio de *f*, es decir:

$$\boxed{\text{Si } y = f(x) \text{ es biyectiva, entonces } f^{-1}(y) = x}$$

Donde $f^{-1}(y) = x$ es la función inversa de $y = f(x)$.

EJEMPLO 3. Grafico en un mismo plano cartesiano la función $f(x) = 2x + 2$ y su función inversa. Si $y = 2x + 2$, entonces la función inversa se obtiene intercambiando la “x” con la “y”: $x = 2y + 2$. Esta expresión se puede escribir así:

$$y = \frac{x-2}{2}$$

Debo graficar las funciones $y = 2x + 2$ y $y = \dfrac{x-2}{2}$

LA COMUNICACIÓN FACILITA LA ADECUADA INTERACCIÓN Y LA REALIZACIÓN DE ACTIVIDADES PROPIAS DE UNA CULTURA O SOCIEDAD.

EL DESARROLLO DE LA COMUNICACIÓN ASERTIVA EN LOS JÓVENES FACILITA LA SOLUCIÓN DE CONFLICTOS.

Tabla de la función
$y = 2x + 2$

x	y
0	2
2	6
– 2	– 2

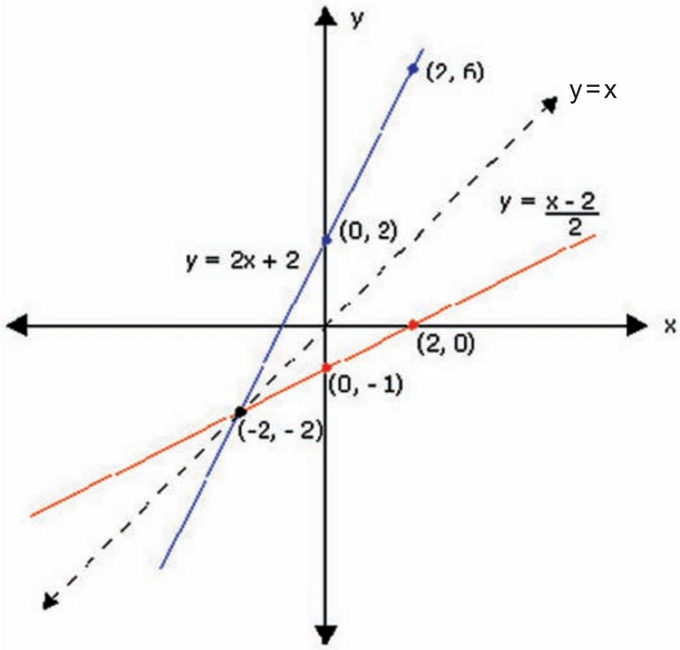


Tabla de la inversa
$$y = \frac{x-2}{2}$$

X	Y
0	-1
2	0
– 2	– 2

Observo que las gráficas de una función y su inversa son reflexiones una de la otra con relación a la recta $y = x$.

Funciones trigonométricas inversas

Para una buena comprensión de un tema es muy importante una buena comunicación y una excelente interpretación de signos y símbolos; en Matemáticas cualquier signo equivocado cambia completamente el resultado. En este tema debemos diferenciar muy bien entre una letra mayúscula y esa misma letra minúscula.

Función Arcoseno

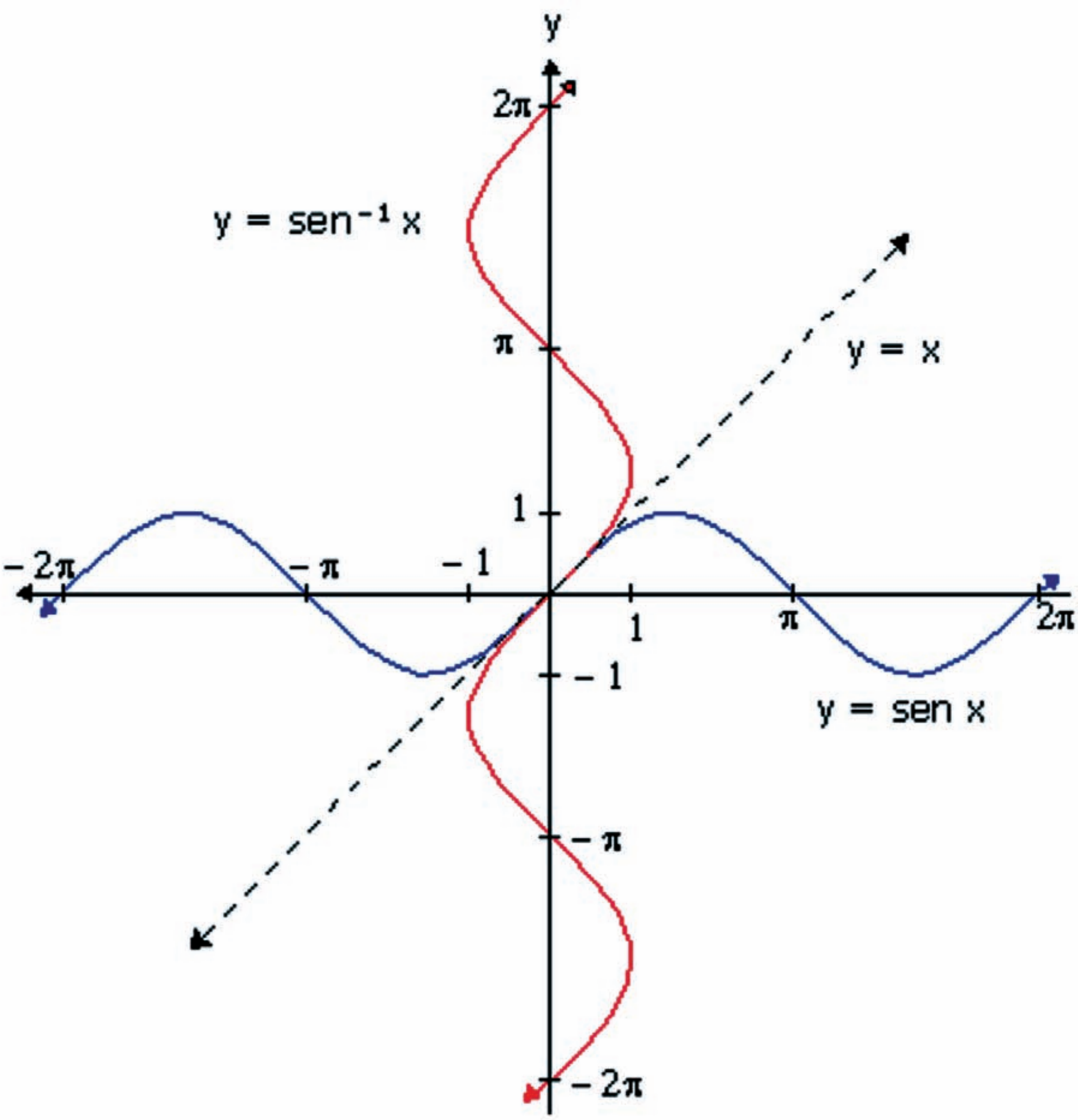
Considero la función y = sen x. La relación inversa de esta función puede ser denotada de varias maneras:

$\boxed{x = \text{sen } y}$ $\boxed{y = \text{sen}^{-1} x}$ $\boxed{y = \text{arcsen } x\ .}$

$\text{sen}^{-1} x$ se lee: "el seno inverso de x", "el arcoseno de x" o "el número (o ángulo) cuyo seno es x".

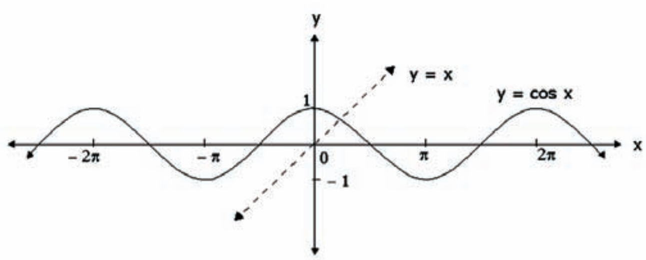
EJEMPLO 4. Grafico en un mismo plano la función $y = \text{sen } x$ y su relación inversa $y = \text{sen}^{-1} x$.

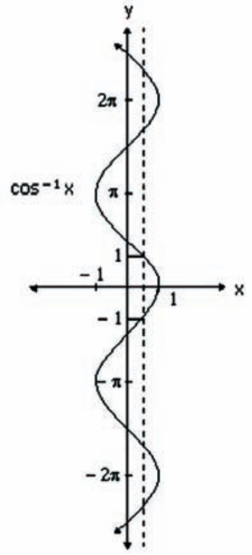
x (radianes)	- 2π	- π	- 1	0	1	π	2π
y = sen x	0	0	- 0.8	0	0.8	0	0
$y = \text{sen}^{-1} x$			$-\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$	$0 \pm n\pi$	$\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$		



Observo que la gráfica de y = sen x muestra que es función, mientras que la gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$ muestra que no es función. (Ver ejemplo 2, segunda parte).

EJERCICIO. Analice las siguientes gráficas. Observe que hay más de un valor de "y" para cada x en y = $\cos^{-1}x$. ¿Entre que valores del rango debe limitar la relación y = $\cos^{-1}x$ para que sea función? Explique.



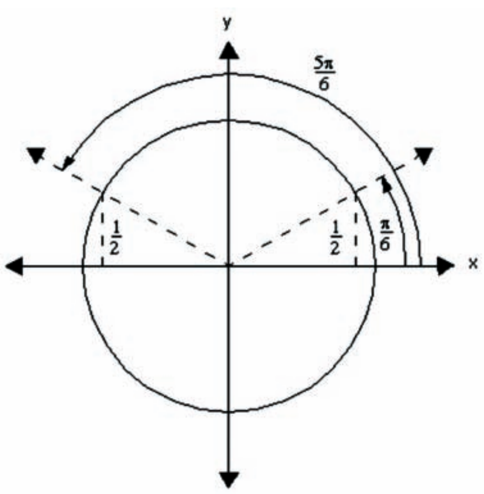


La COMUNICACIÓN pertenece a las competencias RELACIONALES que hacen referencia a las capacidades, habilidades, destrezas y disposiciones requeridas para interactuar con otros.

En Matemáticas es muy importante una excelente comunicación para entender los conceptos y sobre todo los problemas.

Otro proceso de comunicación para interpretar la relación inversa es el círculo trigonométrico. Consigno el ejemplo y resuelvo los ejercicios en el cuaderno.

EJEMPLO 5. Encuentro todos los valores de arcsen 1/2.



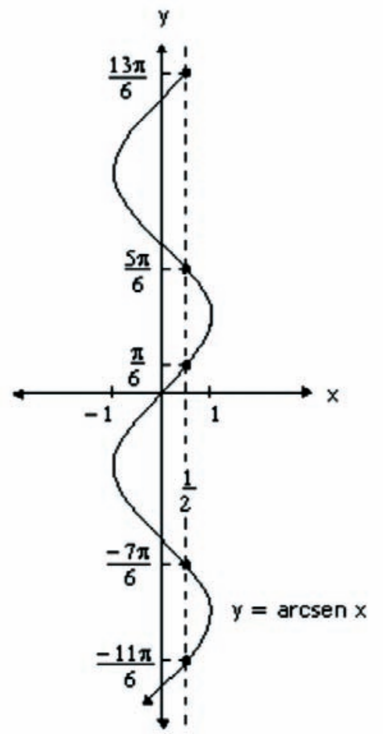
y = arcsen 1/2 significa "y es el ángulo cuyo seno es 1/2".

En el círculo unitario observo dos puntos para los cuales el seno es 1/2 correspondiente a los ángulos π/6 y 5π/6.

Los demás valores de y = arcsen 1/2 los puedo obtener así:

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad y \quad \frac{5\pi}{6}+2k\pi\,,\, k\,\varepsilon\, Z$$

Puedo obtener los mismos resultados analizando la siguiente gráfica.



Trazo una línea vertical que pase por x = 1/2, la cual intersecta la gráfica en los puntos (x, y) tales que "y" es el ángulo cuyo seno es 1/2.

Otra notación, en grados, del mismo conjunto solución es:

$$30^0 + k \cdot 360^0 \;\text{ y }\; 150^0 + k \cdot 360^0, \text{ donde k es un entero.}$$

EJERCICIOS.

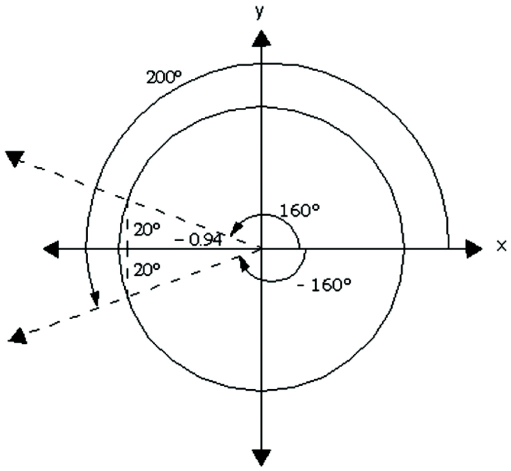
Encuentre todos los valores de:

1. arcos $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. sen^{-1} $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. cos^{-1} 0
4. arcsen 1
5. arccos (- 1)

EJEMPLO 6.

Encuentro todos los valores de $\cos^{-1}$ (- 0.9397) en grados. Utilizo la calculadora así:

$\boxed{\text{ON}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{-}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{9}$ $\boxed{3}$ $\boxed{9}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ 160.00



Si el ángulo es 160^0, el ángulo de referencia es 20^0.

Como el coseno es negativo en los cuadrantes II y III, el otro ángulo es $180^0 + 20^0 = 200^0$.

Los ángulos cuyo seno es - 0.9397 son 160^0 y 200^0 , más todos los múltiplos de 360^0, que se resume en las expresiones:

$160^0 + k \cdot 360^0$ y $200^0 + k \cdot 360^0$, donde k es un entero.

Si k = 1, $160^0 + 360^0 = 520^0$ y $200^0 + 360^0 = 560^0$

Si k = - 1, $160^0 - 360^0 = - 200^0$ y $200^0 - 360^0 = - 160^0$

Si k = 5, $160^0 + 5 (360^0) = 1960^0$ y $200^0 + 5 (360^0) = 2000^0$

Si k = 0, $160^0 + 0 (360^0) = 160^0$ y $200^0 + 0 (360^0) = 200^0$

EJERCICIOS.

Encuentre en grados, todos los valores del ángulo en las siguientes relaciones trigonométricas.

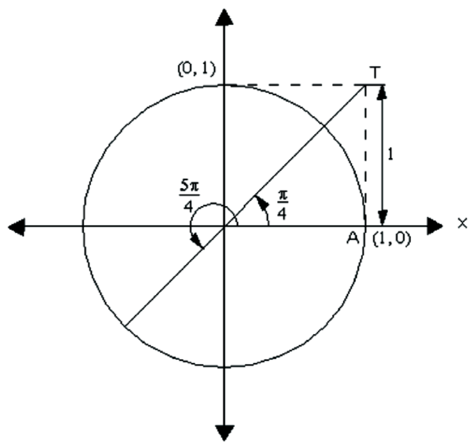
1. $y = \text{sen}^{-1}\ 0.4226$
2. $y = \text{arccos}\ 0.9265$
3. $y = \cos^{-1}\ 0.2735$
4. $y = \text{arcsen}\ (- 0.3907)$
5. $y = \cos^{-1}\ (- 0.4695)$
6. $y = \text{sen}^{-1}\ (- 0.766)$

Hasta aquí, todos los ejemplos de relaciones inversas hacen referencia al seno y al coseno. A continuación, analizo un ejemplo de la relación inversa de la tangente.

EJEMPLO 7.

Encuentre todos los valores de y= arctan 1.

Como se vio en la Guía N^0. 4, el segmento AT representa la tangente. En la gráfica puedo concluir que el ángulo en el cuadrante I, cuya tangente es 1, es $\pi/4$ y en el cuadrante III es $5\pi/4$. También puedo apreciar que cada π radianes la tangente es 1. (Ver Guía N^0. 5: el período de la tangente es π).



Por lo tanto la solución es:

$$\frac{\pi}{4} + K\pi, \text{ donde k es un entero}$$

Representación gráfica de las funciones y = Arcsen x, y = Arccos x y y = Arctan x.

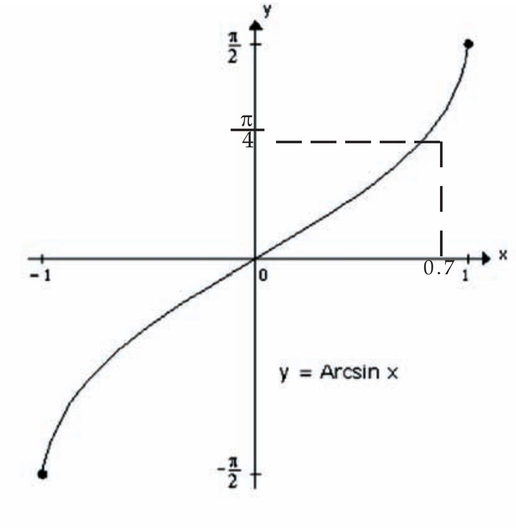
En el proceso comunicativo intervienen elementos culturales, el mensaje puede llegar diferente al interlocutor dependiendo de su cultura: la palabra RATÓN para muchos significa ROEDOR mientras que para otros es un elemento de un computador. Para muchos da lo mismo que una letra esté escrita con mayúscula o minúscula, sobre todo si se trata de términos matemáticos, pero existe una gran diferencia. Un conjunto se denota con una letra mayúscula, mientras que sus elementos se representan con minúsculas ($a \in A$). En un ΔABC; A, B y C representan los ángulos, mientras que a, b y c representan sus lados.

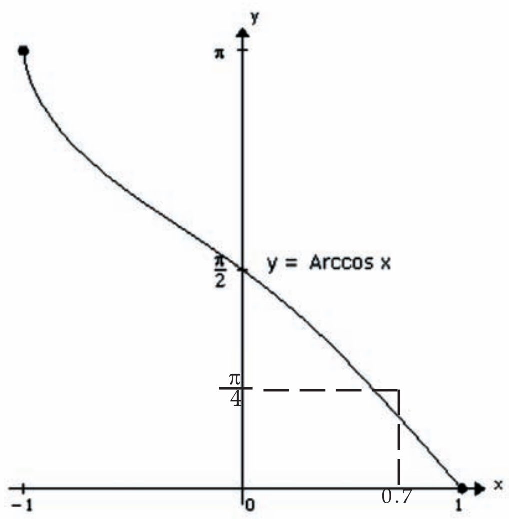
Observo el título de este tema y veo que Arcsen x, Arccos x y Arctan x empiezan con A mayúscula.

Esta notación se usa para diferenciar una relación trigonométrica inversa de una función trigonométrica inversa:

y = arcsen x es una relación que tiene infinitas soluciones; todos los ángulos «y» cuyo seno es “x”.
y = Arcsen x es una función que tiene una sola solución; el ángulo “y” cuyo seno es “x”. y = Arcsen x es un subconjunto de y = arcsen x, que se obtiene al RESTRINGIR el dominio y el rango de y = arcsen x tal que cumpla la definición de FUNCIÓN o la PRUEBA DE LA LÍNEA VERTICAL (Ver ejemplo 2, segunda parte).

Analizo las siguientes gráficas que muestran las restricciones en las relaciones $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ y $y = \arctan x$ para que sean FUNCIONES.





$y = \text{Arcsen } x = \text{Sen}^{-1} x$

$y = \text{Sen}^{-1} x \Leftrightarrow \text{Sen } y = x$

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$

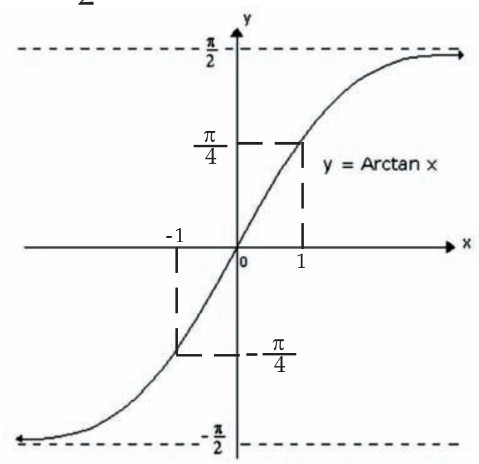
Rango: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \text{Arccos } x = \text{Cos}^{-1} x$

$y = \text{Cos}^{-1} x \Leftrightarrow \text{Cos } y = x$

$-1 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq \pi$



$y = \text{Arctan } x = \text{Tan}^{-1} x$

$y = \text{Tan}^{-1} x \Leftrightarrow \text{Tan } y = x$

Dominio: $-\infty \leq x \leq \infty$

Rango: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

EJERCICIOS.

Encuentre lo pedido sin usar calculadora.

1. Arcsen $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2. $Cos^{-1}\frac{1}{2}$ 3. $Sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $Tan^{-1}\sqrt{3}$ 5. $Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 6. $Arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

APLICACIONES

Tengo en cuenta la diferencia entre procesos de información y comunicación. Todos debemos obtener la misma información al buscar los valores de los ángulos, aunque las calculadoras que usamos funcionan de manera diferente. Distintos medios de comunicación nos pueden dar la misma información.

Resuelvo los siguientes ejercicios y los consigno en mi cuaderno. Tengo cuidado con la comunicación escrita. No olvido la diferencia entre letras minúsculas y mayúsculas.

1. Dibuje la gráfica de y = Arccot x

2. Dibuje en un mismo plano cartesiano las funciones y = sen x y y = Sen^{-1} x.

3. Halle el valor de la expresión dada, sin hacer uso de la calculadora.

a. $Sen^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}+Cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

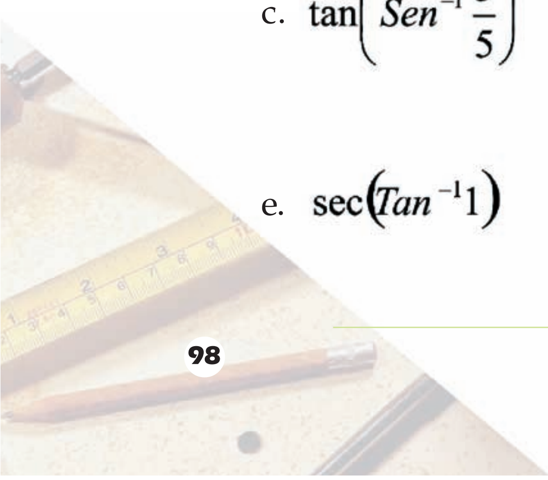
b. $\cos\left(Arcsen\frac{1}{3}\right)$

c. $\tan\left(Sen^{-1}\frac{3}{5}\right)$

d. $arcsen\left(sen\frac{\pi}{4}\right)$

e. $\sec\left(Tan^{-1}1\right)$

f. $\csc\left(Cos^{-1}\frac{24}{25}\right)$



4. Andrea encontró que el valor de Arccos $(\sqrt{2}\ /\ 2)$ es $-\frac{\pi}{4}$

   Explique por qué esa respuesta es un error. Tenga en cuenta el dominio y el rango de $y = Cos^{-1}\ x$.

5. El ángulo para minimizar la fricción en el flujo de sangre donde dos arterias se encuentran, se puede hallar usando $Cos^{-1}\ (r^4/R^4)$, donde r es el radio de la arteria más pequeña y R es el radio de la arteria más grande.

   a. Una cirugía de corazón debe juntar arterias con radios de 4 mm y 5 mm. ¿Qué ángulo debería ser formado?

   b. ¿Bajo que condiciones la fórmula no funcionará? ¿Por qué?

E ¿DESEA APRENDER MÁS?

Para generar un clima de confianza entre los compañeros de subgrupo, es necesario que haya una buena comunicación.

1. Enseñe el manejo de su calculadora a sus compañeros y pida que los demás hagan lo mismo. Practique los siguientes ejercicios.

   a. $Sec^{-1}\ (-1.1158)$
   b. Arctan 4.2747
   c. Arccot 2.7725
   d. Arcsec 1.0019
   e. $Csc^{-1}\ (-3.0977)$

2. Consulte en el aula virtual, otras formas de enfocar el tema de funciones trigonométricas inversas.

3. Consulte el libro ÁLGEBRA 2 with Trigonometry, Smith, Charles, Dossey, Bittinger, PRENTICE HALL y resuelva los ejercicios del 64 al 69 de la página 800.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA