Guía 5

¿LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SE PUEDEN GRAFICAR?

Meandros encajados sobre rocas calizas. Río Duratón (Segovia).

Indicadores de logros

- ✓ Grafica las seis funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.
- ✓ Identifica en una gráfica la amplitud, el período, la frecuencia y el desfasamiento.
- ✓ Incorpora a sus actividades educativas y cotidianas las telecomunicaciones y los sistemas de información (MANEJO TECNOLÓGICO).
- ✓ Maneja efectivamente los principales instrumentos y procedimientos que ofrece la tecnología.
- ✓ Interpreta y aplica las instrucciones de manejo de una tecnología.
- ✓ Evalúa y selecciona la tecnología apropiada a su proceso.
- ✓ Realiza manejo preventivo y reparación básica a la tecnología usada en su proceso.
- ✓ Utiliza herramientas en forma adecuada, procurando su seguridad personal.

A ¿LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SE PUEDEN GRAFICAR?

En esta guía vamos a utilizar la competencia MANEJO TECNOLÓGICO o sea la capacidad para identificar, seleccionar y aplicar el conjunto de teorías y técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico.

Esta competencia me traerá beneficios como adquirir destreza para procesar la información existente en informática y habilidad para el manejo de herramientas tecnológicas que ofrece la Escuela Virtual.

Con mis compañeros del subgrupo, respondemos oralmente las siguientes preguntas. El líder del subgrupo hará las preguntas y dirigirá la participación de todos.

1. ¿Qué es una pareja ordenada?
2. ¿Cómo se llaman los elementos de una pareja ordenada?
3. ¿Qué se hace para graficar una función?
4. ¿Qué es una tabla de datos?

Grafico en mi cuaderno las siguientes funciones; utilizo regla, curvígrafo y compás cuando sea necesario. Estoy atento al uso del compás para mi seguridad y la de todos.

1. $y = x$	2. $y = 2x + 1$	3. $y = -3x - 2$
4. $y = x^2$	5. $y = -x^2/2$	6. $x^2 + y^2 = 16$

Utilizo una calculadora científica para verificar si la manejo con efectividad. Resolvemos los siguientes ejercicios en parejas, cada uno los resuelve solo y luego comparamos las respuestas.

1. $4 \times 5 + 7 \times 9 =$	2. $6^3 - 2^4 =$	3. $\sqrt{256} \div \sqrt{64} =$
4. $2\,sen\,\frac{4\pi}{3} =$	5. $\left(\tan\frac{5\pi}{6}\right)^2 =$	6. $\left(\sec\frac{5\pi}{4}\right)^{1/3} =$

Después de resolver los anteriores ejercicios veo qué tanto necesito aprender acerca del manejo de la calculadora. Solicito la ayuda del profesor o de un compañero más experimentado y si es el caso pedimos al profesor que oriente una clase que nos capacite para interpretar y aplicar las instrucciones del manejo de la calculadora.

¿Y CÓMO SE GRAFICAN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS?

La siguiente información ya se vio en la guía N^0. 3, la analizo nuevamente y no es necesario consignarla en mi cuaderno.

Considero un ángulo θ en posición estándar respecto a un sistema de coordenadas y sea P(x, y) un punto sobre el lado terminal, tal que:

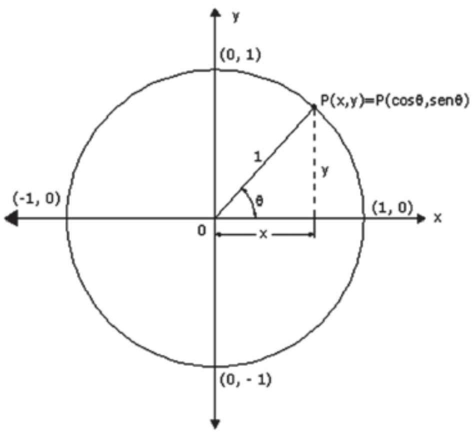
$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

Si el punto P hace un giro completo alrededor del origen O, entonces describe una circunferencia cuyo radio es la unidad y determina sobre los ejes X, Y los puntos (1, 0), (0, 1), (-1, 0) y (0, -1) como muestra la figura.

Esta circunferencia se llama CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA UNITARIA y tiene una longitud, C:

C = 2πr
Como r = 1

C = 2π



Aplico las definiciones de seno y coseno al ángulo θ.

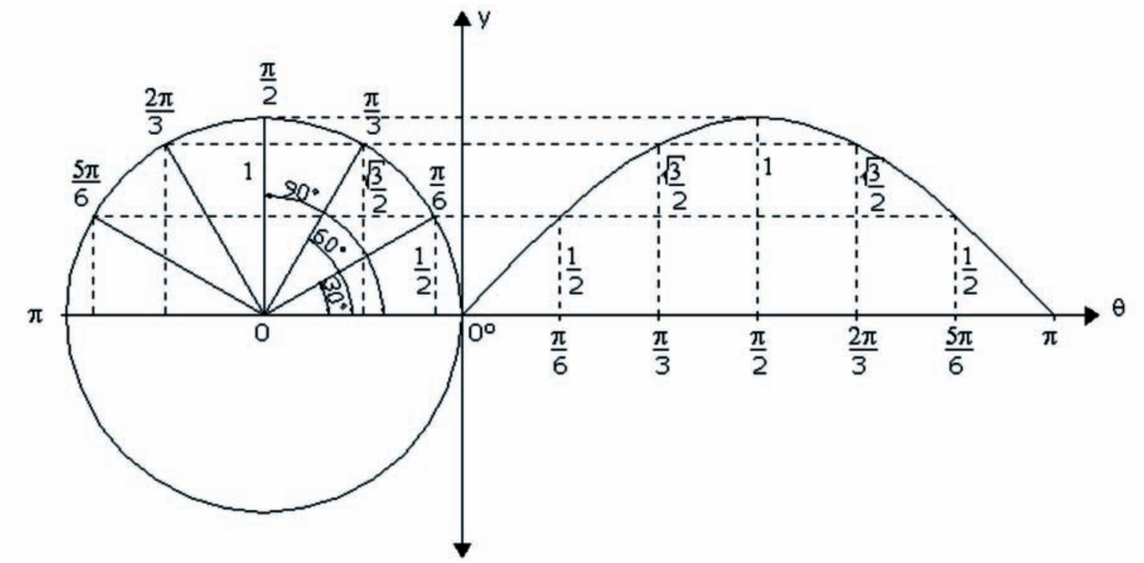
$$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Puedo deducir que la abscisa "x" del punto P corresponde al valor del coseno de θ y la ordenada "y" del punto P corresponde al valor del seno de θ.

Entonces las coordenadas de P están dadas por las funciones seno y coseno (llamadas funciones circulares):

P(x, y) = P (cosθ, senθ)

Cuando θ aumenta en sentido positivo (P se mueve sobre la circunferencia), los valores de la función seno, que corresponden al punto P para algunos ángulos especiales, están dados en la figura.



Observo que la gráfica circular sirve para graficar y = sen θ en un sistema rectangular, usando los valores del arco θ sobre el eje horizontal. Entonces los valores correspondientes a y = sen θ vienen a ser las ordenadas de las parejas (θ, y).

Gráfica de las funciones de seno y coseno

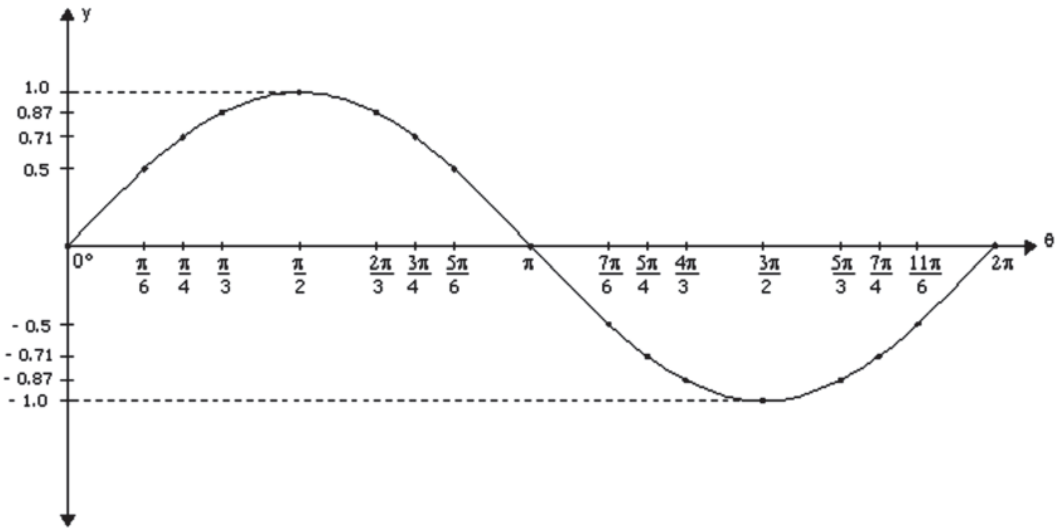
Para graficar la función y = sen θ, sigo las instrucciones dadas y consigno todo el proceso en mi cuaderno.

Puedo obtener mayor exactitud usando una tabla de valores. Recordemos que sen θ es positivo en los cuadrantes I y II ($0 < \theta < \pi$) y negativo en los cuadrantes III y IV ($\pi < \theta < 2\pi$).

Hago una tabla de los valores del seno usando intervalos de $\pi/6$ y $\pi/4$ para ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Utilizo la calculadora para encontrar dichos valores, los aproximo a la más cercana centésima y los copio en la tabla.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sen θ																	

Al graficar las parejas ordenadas: (0, 0), ($\pi/6$, 0.5), ($\pi/4$, 0.71)... y unir todos esos puntos, la gráfica de la función y = sen θ queda así:



EJERCICIO: Haga una tabla de los valores del COSENO, usando intervalos de $\pi/6$ y $\pi/4$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Utilice la calculadora para encontrar dichos valores y aproxímelos a la más cercana centésima. Haga la gráfica de la función y = cos θ en su cuaderno.

Gráfica de las funciones tangente y cotangente

La tecnología más apropiada para graficar la función y = tan θ sigue siendo la calculadora, para obtener los valores y la regla y el curvígrafo para hacer la gráfica.

Existen calculadoras que grafican directamente en su pantalla, al darle las instrucciones específicas; es el caso de la calculadora HEWLETT PACKARD (HP) y para su uso es necesario el estudio de la Guía de Iniciación Rápida de la calculadora de la serie HP.

En esta guía se procederá como se hizo con el SENO Y COSENO:
En mi cuaderno hago una tabla de los valores de la TANGENTE usando intervalos de $\pi/6$ y $\pi/4$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Utilizo la calculadora para encontrar dichos valores y los aproximo a la más cercana centésima.

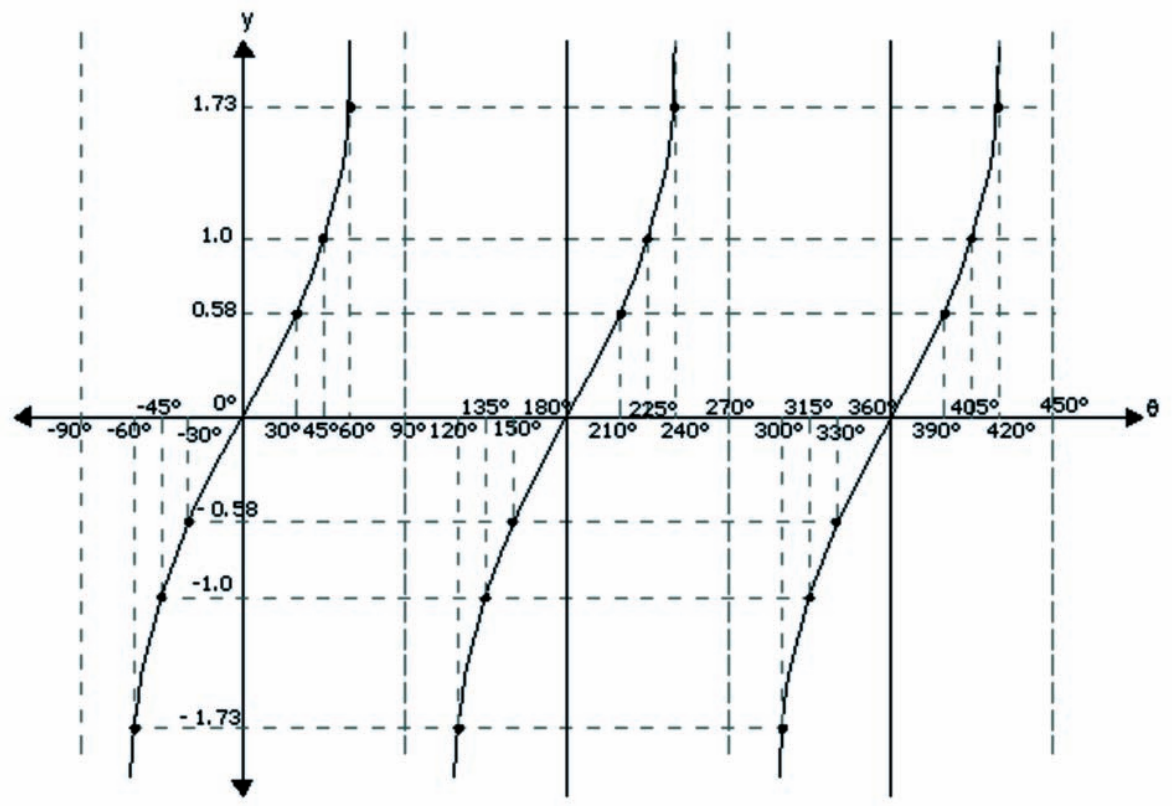
θ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
y = tanθ																	

Puesto que tan θ= sen θ / cos θ, tan θ no está definida para los valores de θ donde cos θ = 0 lo cual ocurre cuando θ = π/2 (90^0), θ = 3π/2 (270^0), θ = 5π/2 (450^0) o sus múltiplos impares positivos o negativos. Entonces el dominio de la función tangente está dado por:

$$R - \left\{ \ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \right\}$$

Por lo tanto, en las casillas correspondientes a 90^0 y 270^0 coloco $\underline{+}\,\infty$ y trazo por θ = 90^0 y θ = 270^0 paralelas al eje "y" (punteadas) llamadas ASÍNTOTAS (Ver tabla que se hizo en la guía N^0. 4 en el tema VARIACIONES DE LA TANGENTE DE UN ÁNGULO) que indican una DISCONTINUIDAD.

Grafico todas las parejas ordenadas: (0, 0), (30^0, 0.58), (45^0, 1),... y uno los puntos, teniendo en cuenta las discontinuidades, la gráfica de la función y = tan θ queda así:



Al hacer la gráfica se amplió un poco el dominio inicial de $0 \leq \theta \leq 2\pi$ a $-\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2$ para mostrar que el dominio de cualquier función se puede extender indefinidamente hacia la izquierda o hacia la derecha.

También se pueden apreciar dos asíntotas más en - 90^0 y en 450^0.

EJERCICIO.

Siga el mismo procedimiento anterior para graficar la función y = cot θ. Para unir los puntos (θ, cot θ) puede utilizar un curvígrafo.

Gráficas de las funciones secante y cosecante

Sigo un procedimiento similar a los anteriores para hacer la gráfica de la función y = sec θ y lo consigno en mi cuaderno.

Hago una tabla de los valores de la secante usando los mismos intervalos de 30^0 en 30^0 y 45^0 en 45^0, desde - 90^0 hasta 270^0. Utilizo la calculadora para encontrar dichos valores, los aproximo a la más cercana centésima. De la guía N. 4 saco los valores exactos y los copio en la tabla.

θ	-90^0	-60^0	-45^0	-30^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0
Sec θ (Exacto)																	
Sec θ (Aprox.)																	

Los valores aproximados se pueden obtener, utilizando la calculadora, de dos maneras:

a) Realizando la operación que indica el valor exacto de la tabla, así:

$$\sqrt{2} = 1.41 \qquad ; \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.15$$

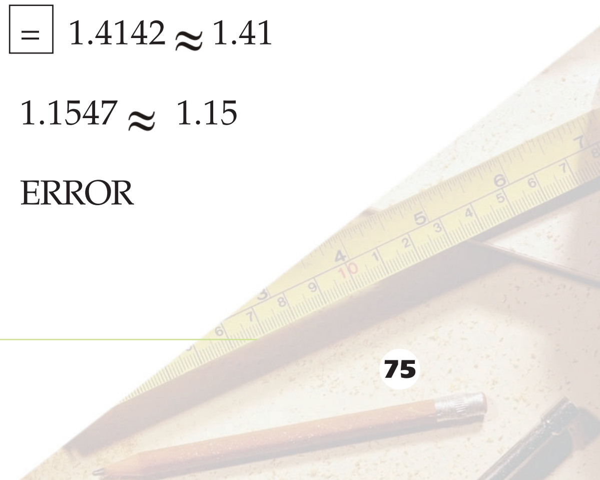
b) Obteniendo el valor de la secante directamente de la calculadora, conforme a los siguientes ejemplos:

Sec (- 60^0) = $\boxed{\text{ON}}\ \boxed{\text{cos}}\ \boxed{-}\ \boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{x^{-1}}\ \boxed{=}$ 2

Sec (- 45^0) = $\boxed{\text{ON}}\ \boxed{\text{cos}}\ \boxed{-}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{x^{-1}}\ \boxed{=}$ 1.4142 ≈ 1.41

Sec (30^0) = $\boxed{\text{ON}}\ \boxed{\text{cos}}\ \boxed{3}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{x^{-1}}\ \boxed{=}$ 1.1547 ≈ 1.15

Sec (- 90^0) = $\boxed{\text{ON}}\ \boxed{\text{cos}}\ \boxed{-}\ \boxed{9}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{x^{-1}}$ ERROR

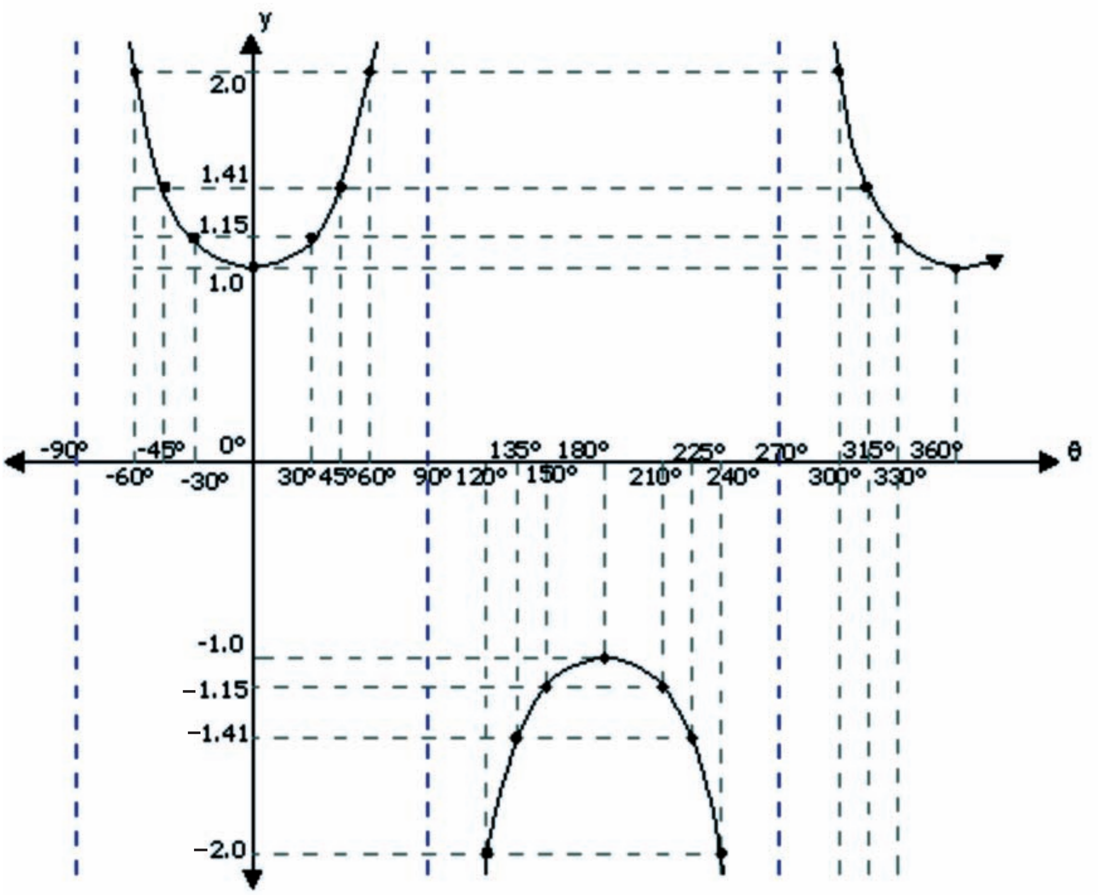


Esta respuesta indica que sec (-90^0) no está definida y que existe una DISCONTINUIDAD en -90^0 y por lo tanto se debe trazar una ASÍNTOTA en -90^0; así mismo en 90^0, en 270^0 y así sucesivamente cada 180^0.

Observe que para hallar el valor de la secante se debe buscar primero el coseno y luego hallar el recíproco $\boxed{x^{-1}}$, esto debido a que:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \cos^{-1}\theta$$

Al graficar las parejas ordenadas: (-90^0, ∞), (-60^0, 2), (-45^0, 1.41),..., trazar las asíntotas y unir todos los puntos, la gráfica de la función $y = \sec\theta$ queda así:



Al hacer la gráfica se amplió el dominio de $-90^0 \leq \theta \leq 270^0$ a $-90^0 \leq \theta \leq 360^0$ para mostrar que el dominio se extiende a todos los números reales, por lo tanto la función $y = \sec\theta$ se puede escribir $y = \sec x$. Así mismo, todas las funciones trigonométricas se pueden generalizar con dominio los números reales: $y = \text{sen } x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$, $y = \csc x$.

¿Sabía usted que un celular puede enviar
un mensaje a un correo electrónico?

EJERCICIOS.

Haga uso de la tecnología que disponga para realizar los siguientes ejercicios. Si desea utilizar INTERNET puede usar la siguiente dirección: www.phschool.com

1. Dibujar la gráfica de la función y = csc x, $0^0 \leq x \leq 450^0$

2. Dibujar las gráficas de las funciones y = sec x y y= cos x, $-90^0 \leq x \leq 450^0$ en un mismo sistema de coordenadas.

Funciones periódicas

Analizo la siguiente información a medida que la consigno en mi cuaderno.

Una función *f* se dice que es una función periódica, de período "p" con $p \in R$, $p \neq 0$ si para todo "x" del dominio de *f*, $x + p$ también pertenece a su dominio y además:

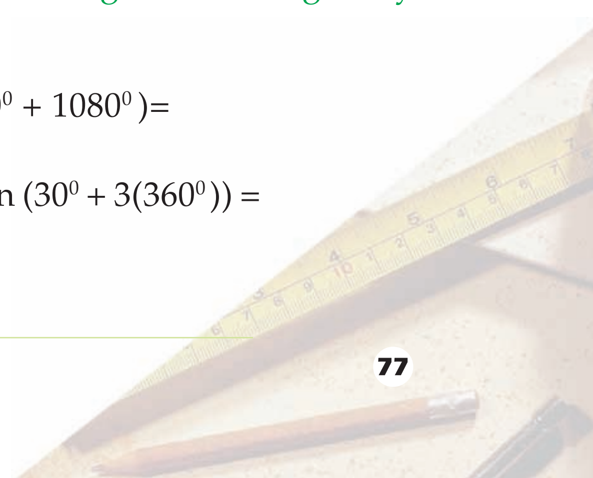
$$f(x+p) = f(x)$$

El más pequeño número positivo, tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo "x" se llama PERÍODO DE LA FUNCIÓN.

EJEMPLO 1.

Chequeo en la calculadora los valores del seno para los siguientes 5 ángulos y verifico si tienen el mismo valor.

sen 30^0= sen $(30^0+ 360^0)$ = sen $(30^0+ 720^0)$ = sen $(30^0 + 1080^0)$=
sen $(30^0 + 1440^0)$ ...
sen 30^0 = sen $(30^0+ 1(360^0))$ = sen $(30^0 + 2(360^0))$ = sen $(30^0 + 3(360^0))$ =
sen $(30^0 + 4(360^0))$ ...



sen 30^0 = sen (390^0) = sen (750^0) = sen (1110^0) = sen (1470^0) = sen (30^0 + n (360^0))

El más pequeño número, tal que $f\,(30^0 + p) = f\,(30^0)$ es 360^0, por lo tanto la función y = sen x es periódica y el período es 2π.

EJEMPLO 2.

Verifico con la calculadora si el valor de la tangente, para los siguientes 4 ángulos, es el mismo.

tan 60^0 = tan ($60^0 + 180^0$) = tan (60^0 + 2 (180^0)) = tan (60^0 + 3 (180^0)) =
tan (60^0 + n (180^0))

tan 60^0 = tan 240^0 = tan 420^0 = tan 600^0 = tan (- 120^0), si n = - 1.

En general tan θ = tan ($\theta \pm n\pi$), lo que indica que la tangente es una función periódica, cuyo período es π. (Ver gráfica de la tangente).

Amplitud

La amplitud de una función periódica es la mitad de la diferencia entre los valores máximo y mínimo.

EJEMPLO 3.

En la función y = sen x, el valor máximo es 1 y el valor mínimo es - 1, por lo tanto la amplitud es:

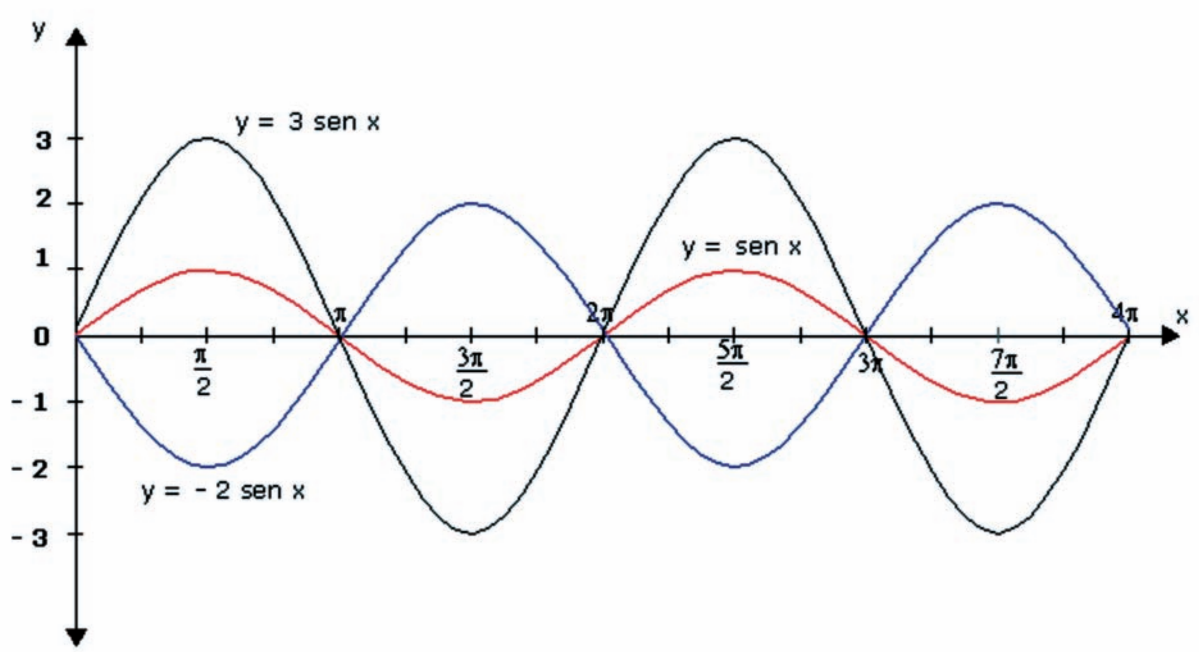
$$\frac{1-(-1)}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Así mismo, la amplitud de la función y = cos x es 1.

La gráfica de la función y = Asen x o y =Acos x, donde A es un número real varía entre un valor máximo A y un valor mínimo - A. El valor de A se llama AMPLITUD.

EJEMPLO 4.

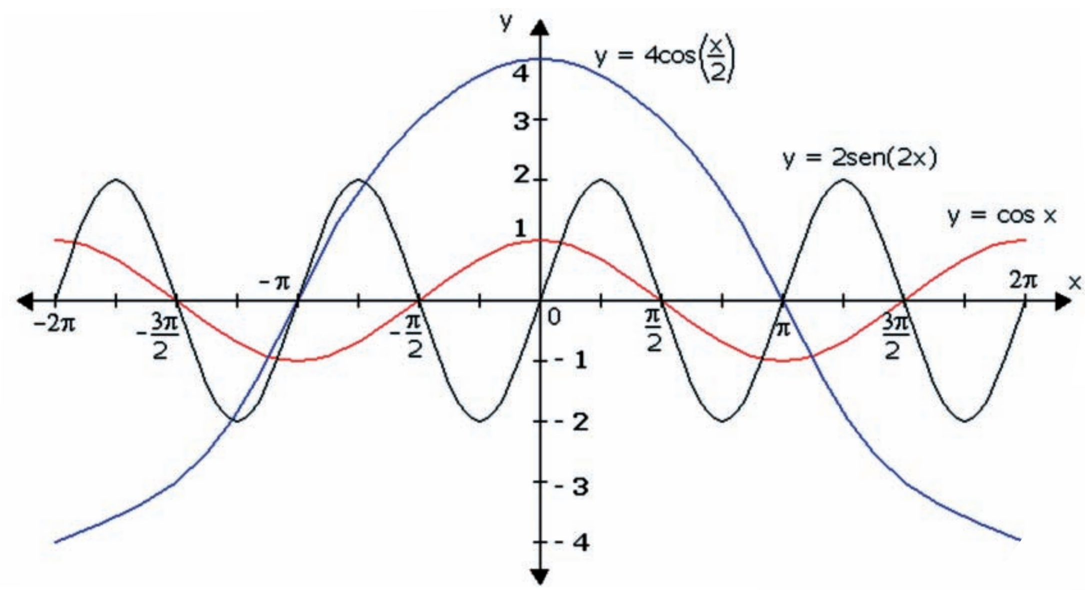
Dibujo en un mismo plano cartesiano las 3 funciones y = 3 sen x, y = - 2sen x y y = sen x, en el intervalo $0 \leq \theta \leq 4\pi$.



Observo que el período "p" de las tres funciones es el mismo: 2π; sin embargo la amplitud "A" es diferente: y = 3 sen x tiene amplitud 3, y = - 2 sen x tiene amplitud 2 (el signo (-) produjo una reflexión de y = 2 sen x) y y = sen x tiene amplitud 1.

EJEMPLO 5.

Observo la siguiente gráfica, donde están representadas tres funciones en el mismo plano cartesiano y obtengo el período y la amplitud de cada función.



a) y = 4 cos (x/2); A = 4, p = 4π, B = 1/2 (frecuencia)

b) y = 2 sen (2x); A = 2, p = π, B = 2 (frecuencia)

c) y = cos x; A = 1, p = 2π, B = 1 (frecuencia)

Las tres funciones tienen la misma forma y = A sen (Bx) o y = A cos (Bx), donde B representa la FRECUENCIA o sea las veces que un ciclo se repite en un intervalo de 2π.

Para hallar el período puedo utilizar la fórmula:

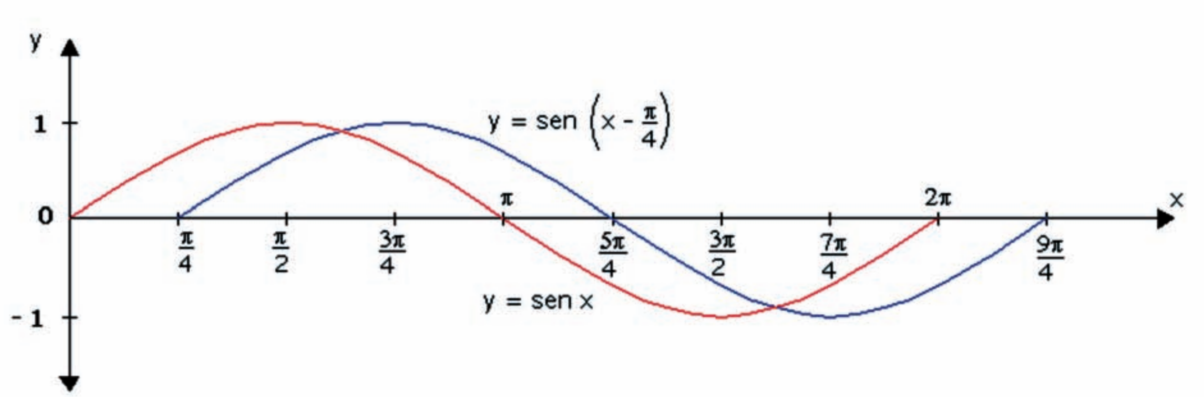
$$p = \frac{2\pi}{B}, \qquad B > 0$$

Desfasamiento

El desfasamiento de una función periódica es el valor del ángulo ∝ que se suma o resta del ángulo x, el cual produce un corrimiento de la gráfica hacia la derecha si ∝ es negativo o hacia la izquierda si∝ es positivo.

EJEMPLO 6.

Dibujo las gráficas de las funciones y = sen x y y=sen (x - π/4), en un mismo plano cartesiano, en el primer ciclo a partir de 0.



Observo que la gráfica se encuentra corrida π/4 unidades hacia la derecha debido a que ∝ es negativo (∝ = -π/4) .

En general , si y = A sen (Bx + ∝) es necesario escribir:

$Y = A$ sen $(Bx + \propto) = A$ sen $B\,(x + \propto/B)$ y relacionar la constante $\propto/B$ con el DESFASAMIENTO así:

Si , $\dfrac{\propto}{B} < 0$, entonces la gráfica se corre $\dfrac{\propto}{B}$ unidades hacia la derecha.

Si , $\dfrac{\propto}{B} > 0$, entonces la gráfica se corre $\dfrac{\propto}{B}$ unidades hacia la izquierda.

Lo mismo se aplica para $y = A \cos (Bx + \propto)$

EJERCICIOS.

Dibuje las gráficas de las siguientes funciones, en el mismo plano cartesiano. Obtenga el período y la amplitud de cada función. Utilice la tecnología más apropiada. Se sugiere visitar la sala virtual y utilizar el CD «Descartes», en el tema GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

1. $y = sen\ x;\qquad y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\qquad -2\pi \le x \le 2\pi$

2. $y = \cos 2x;\qquad y = -2\cos x;\qquad -2\pi \le x \le 2\pi$

3. $y = \frac{1}{2} sen\ x;\qquad y = 3\ sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right);\qquad -2\pi \le x \le 2\pi$

4. $y = sen\ x;\qquad y = \frac{1}{2} sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right);\qquad -\frac{\pi}{8} \le x \le 2\pi$

NO OLVIDE REALIZAR EL MANEJO PREVENTIVO DE LOS EQUIPOS UTILIZADOS EN LA SALA VIRTUAL.

UTILICE LAS HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EN FORMA ADECUADA: NO DEJE CAER LA CALCULADORA, APÁGUELA CUANDO NO LA USE...

APLICACIÓN

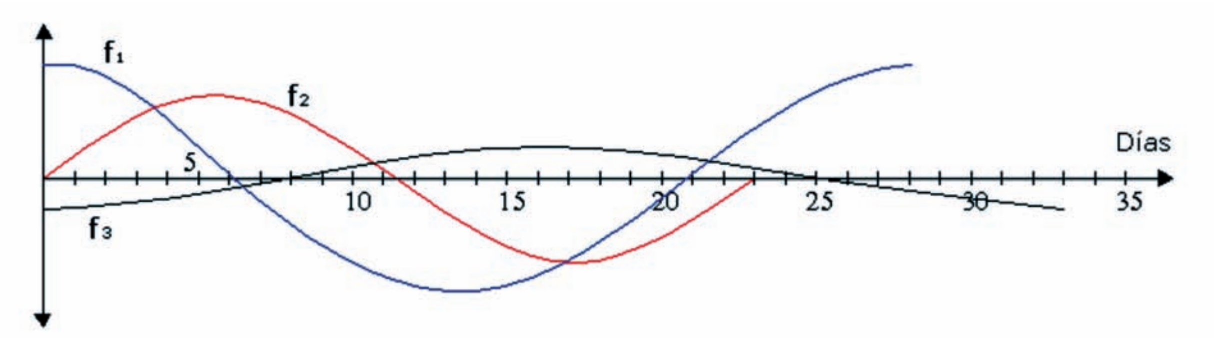
Utilizo la sala virtual para buscar por INTERNET una dirección donde encuentre solución a los siguientes ejercicios. También puedo solicitar una dirección al profesor.

1. Grafico la función $y = 3\ sen\left(\frac{x}{2}\right);\qquad -2\pi \le x \le 2\pi$
   a. ¿Cuál es la amplitud?
   b. ¿Cuál es la frecuencia?
   c. ¿Cuál es el dominio? ¿Cuál es el rango?
   d. ¿Cuál es el período?

2. Grafico las funciones $y = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right),\quad y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$
   a. ¿Cuál es la amplitud de cada una?
   b. ¿Cuál es la frecuencia de cada función?
   c. ¿Cuál es el período de cada función?

3. Escribo una descripción de la gráfica de cualquiera de las funciones trigonométricas. Si leo esta descripción a mis compañeros, ¿ellos podrán identificar la función?

4. La teoría del BIORRITMO establece que el funcionamiento orgánico de una persona depende de tres factores o ritmos que posee el individuo desde que nace: FACTOR EMOCIONAL (f_1), FACTOR FÍSICO (f_2) y FACTOR INTELECTUAL (f_3). Estos factores varían en forma de seno y coseno respecto al tiempo. De la gráfica obtengo el período de cada factor.



5. Una onda se puede describir por medio de la ecuación:

$$y = 20\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Hallo:
a) Amplitud
b) Período
c) Frecuencia
d) Desfasamiento

¿DESEA APRENDER MÁS?

Puedo aprender más consultando en la sala virtual. Para que los computadores se conserven en buen estado, los cuido, no tomo bebidas cuando los estoy usando y los cubro adecuadamente, cuando termine mi trabajo, para protegerlos del polvo.

1. Consulto funciones pares e impares, especialmente las trigonométricas. ¿Cuáles son pares? ¿Cuáles son impares?

2. Consulto el tema sobre reflexión y tomando como base $y = \text{sen } x$ grafico las funciones:

   a. $y = \text{sen }(-x)$
   b. $y = -\text{sen } x$

3. Resumo en una tabla el dominio de las seis funciones trigonométricas.

4. Hago una lista de las órdenes que le puedo dar al televisor con el control remoto.

5. Escribo el procedimiento para grabar un cassette en un equipo de sonido.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA