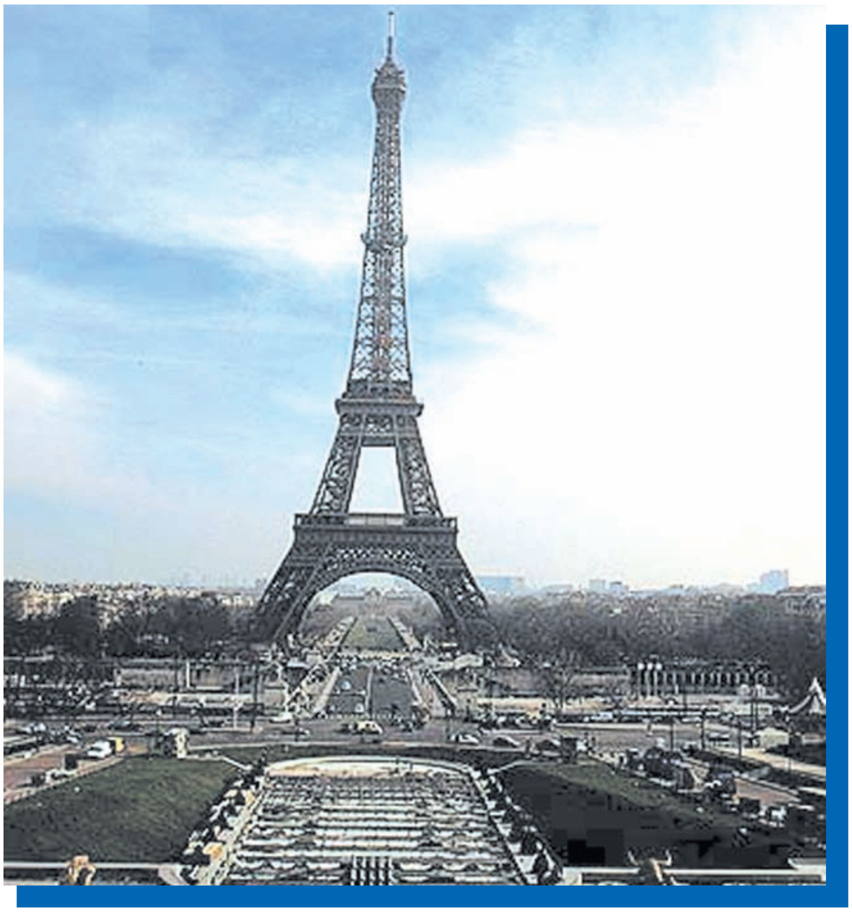
Guía 4

¿CÓMO SE RELACIONAN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS?



Indicadores de logros

- ✓ Reconoce como varía cada función a medida que el ángulo crece.
- ✓ Identifica las relaciones entre las diferentes funciones trigonométricas.
- ✓ Reduce cualquier ángulo al primer cuadrante y halla sus funciones trigonométricas.
- ✓ Analiza la información disponible (TOMA DE DECISIONES).
- ✓ Tiene en cuenta las diversas opiniones.
- ✓ Aplica criterios preestablecidos si existen, para tomar decisiones.
- ✓ Asume responsabilidades por las decisiones tomadas.

¿CÓMO SE RELACIONAN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS?

En esta guía se desarrollará la competencia TOMA DE DECISIONES o sea la capacidad de prever, elegir y poner en marcha alternativas de acción y se manifiesta en tomar decisiones en forma acertada y oportuna.

Tomar decisiones es algo que está presente en la vida cotidiana de cada persona. No puede decirse que existe un plan de acción, si no se ha tomado una decisión. Esta competencia trae beneficios como la participación y la cooperación en procesos de equipo ya sean familiares, educativos, sociales o empresariales.

En la guía N^0. 2 hemos visto que cada función tiene su recíproca. Aquí vamos a ver muchas otras relaciones entre funciones.

Resuelvo primero los siguientes ejercicios para recordar conceptos que serán útiles en el nuevo tema. DEBO ANALIZAR LA INFORMACIÓN DISPONIBLE.

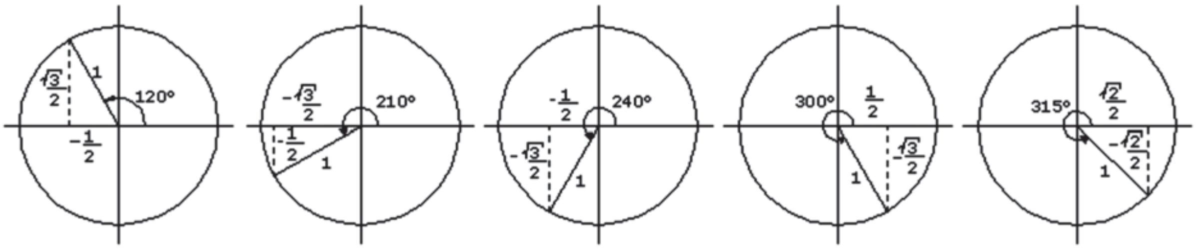
1. Hago en mi cuaderno una tabla como la que se muestra a continuación y la lleno con los valores de las funciones trigonométricas correspondientes a cada ángulo:

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
sen																	
cos																	
tan																	
cot																	
sec																	
csc																	

Las funciones de 30°, 45°, 60°, 135°, 150°, 225° y 330° ya fueron hallados en la guía anterior. El valor de los signos también se vio en la guía N^0 3.

Los valores del seno y coseno de 0°, 90°, 180°, 270° y 360° fueron encontrados en uno de los ejercicios propuestos en la guía 3. Para hallar las demás funciones tengo en cuenta que $x = \cos\theta$, $y = \text{sen}\ \theta$ y $r = 1$ y aplico las definiciones.

2. Hallo las funciones de 120°, 210°, 240°, 300° y 315° utilizando las siguientes gráficas y completo el cuadro.



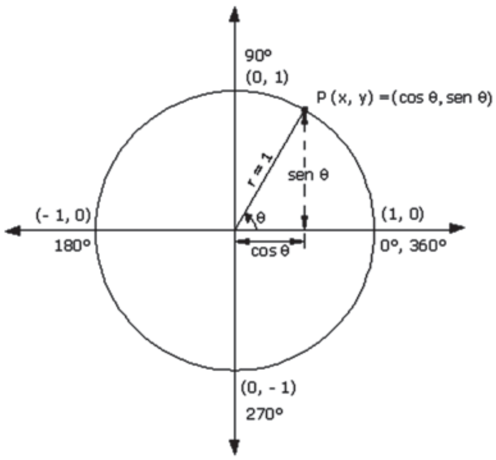
3. Comparo el cuadro con mis compañeros y TENGO EN CUENTA SUS OPINIONES Y SUGERENCIAS para hacer las correcciones respectivas.

B VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES

La correcta realización de los ejercicios de la parte A es importante para analizar cómo varía cada función.
APLICO MI PROPIO CRITERIO PARA DECIDIR SI TOMO APUNTES O NO DE LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

VARIACIONES DEL SENO DE UN ÁNGULO.
Analizando la tabla observo que cuando el ángulo está comprendido entre 0^0 y 90^0, el valor del seno crece entre 0 y 1, cuando en ángulo está comprendido entre 90^0 y 180^0, el valor del seno decrece entre 1 y 0; cuando el ángulo está comprendido entre 180^0 y 270^0, el valor del seno sigue decreciendo entre 0 y - 1 y cuando el ángulo está comprendido entre 270^0 y 360^0, el valor del seno crece entre - 1 y 0.

Lo anterior también lo puedo observar en el círculo trigonométrico.



Cuando el punto P(x, y) se mueve desde P(1, 0) correspondiente a 0^0 hasta P(0, 1) correspondiente a 90^0, el valor del seno pasa de 0 a 1 (crece); cuando se mueve desde P(0, 1) hasta P(- 1, 0) correspondiente a 180^0, el valor del seno pasa de 1 a 0 (decrece); cuando se mueve desde P(- 1, 0) hasta P(0, - 1) correspondiente a 270^0, el valor del seno pasa de 0 a - 1 (sigue decreciendo) y cuando se mueve desde P(0, - 1) hasta P(1, 0) correspondiente a 360^0, el valor del seno pasa desde - 1 a 0 (crece). Aquí termina un ciclo, si el punto sigue girando, el ciclo se repite con las mismas variaciones.

Variaciones del coseno de un ángulo.

Hago consideraciones análogas a las hechas sobre el seno y concluyo que cuando el ángulo está comprendido entre 0^0 y 180^0, el valor de coseno decrece entre 1 y - 1 y cuando el ángulo está comprendido entre 180^0 y 360^0, el valor del coseno crece entre - 1 y 1.

Variaciones de la tangente de un ángulo.

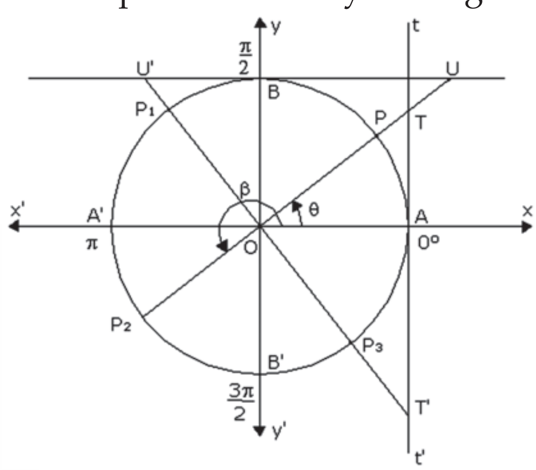
Al analizar la tabla, veo que la tangente de 90^0 y 270^0 no está definida:

$\tan 90° = \frac{y}{x}$, como $y = \text{sen}\theta = 1$; $x = \cos\theta = 0$

$\tan 90° = \frac{1}{0}$, Este valor $\frac{1}{0}$ tiende a infinito: $\frac{1}{0} = \infty$

Para entender el concepto de infinito analizo bien la siguiente información:

Consideramos un círculo trigonométrico. Tracemos por A, punto situado sobre el eje de los cosenos, una perpendicular indefinida t't a este eje. Es ésta el eje de las tangentes. Su sentido positivo es t't y su origen A.



Por B tracemos una perpendicular UU′ al eje "y". Ésta es el eje de las cotangentes.

El segmento AT es la tangente del arco AP o del ángulo θ.
El segmento BU es la cotangente del arco AP o del ángulo θ.

Dos ángulos cuyos lados terminales están diametralmente opuestos tienen la misma tangente y cotangente (θ y β).

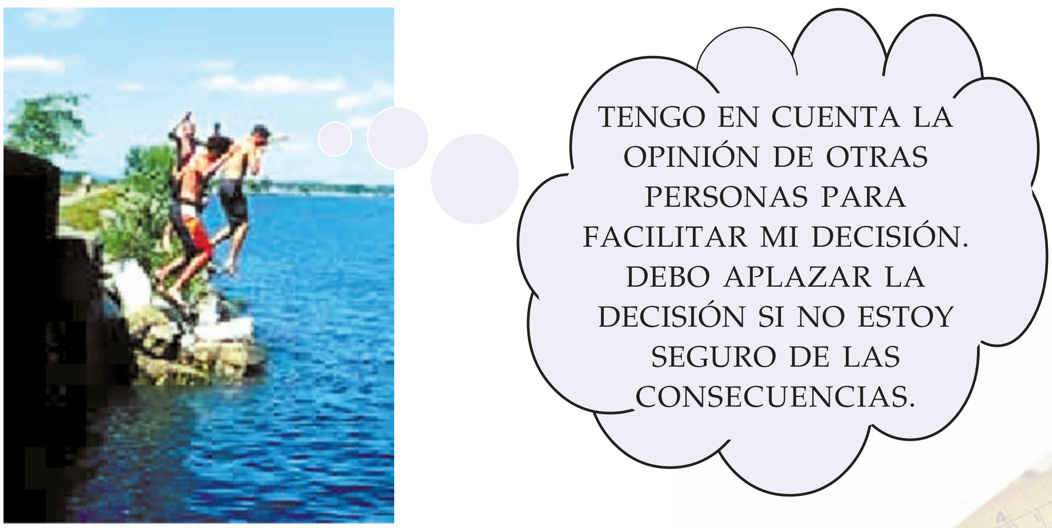
Supongamos que el extremo P del arco recorre toda la circunferencia desde A hasta A, creciendo el arco de 0 a 2π y veamos cómo varía la tangente.

Cuando el arco tiene el valor cero, P se encuentra en A, y T también está en A, la tangente es nula.

A medida que el arco aumenta de 0 hasta $\pi/2$, el punto P se aproxima a B, y el punto T se aleja de A hacia arriba: la tangente es positiva y va creciendo. Aumenta más allá de todo límite cuando el punto P está infinitamente aproximado a B y cuando el arco vale $\pi/2$, se dice que la tangente es infinitamente grande, que vale $+\infty$.

Pero cuando el arco pasa de $\pi/2$, el punto P correrá entre B y A′; la prolongación del radio ya no encuentra t′t por encima de A., sino por debajo. La tangente pasa bruscamente de $+\infty$ a $-\infty$, lo cual se llama una discontinuidad. Mientras el arco sigue aumentando de $\pi/2$ a π, la tangente pasa de $-\infty$ a 0, es decir que crece.

Cuando el arco crece de π a 2π pasa otra vez por los mismos valores que antes.



La tabla siguiente hace resaltar lo anterior.

VALOR DE θ		VALOR DE LA TANGENTE	
0	0^0	0	
			CRECE
$\frac{\pi}{4}$	45^0	1	
			CRECE
$\frac{\pi}{2}$	90^0	$+\infty$ $-\infty$	
			CRECE
$\frac{3\pi}{4}$	135^0	-1	
			CRECE
π	180^0	0	
			CRECE
$\frac{5\pi}{4}$	225^0	1	
			CRECE
$\frac{3\pi}{2}$	270^0	$+\infty$ $-\infty$	
			CRECE
$\frac{7\pi}{4}$	315^0	-1	
			CRECE
2π	360^0	0	

EJERCICIOS: Basado en la tabla de la actividad A y los análisis hechos, realizo en mi cuaderno los siguientes ejercicios. Recordemos que la habilidad para usar la información disponible como la tabla anterior, facilita la realización de actividades o la toma de decisiones.

1. ¿Cómo varía la cotangente entre 0^0 y 180^0?
2. ¿Cómo varía la secante entre 90^0 y 270^0?
3. ¿Cómo varía la cosecante entre 0^0 y 360^0?

Relaciones entre las funciones trigonométricas

El tema que sigue relaciona todas las funciones trigonométricas. Lo analizo con cuidado y lo consigno en mi cuaderno.
Las seis funciones trigonométricas de un ángulo θ están relacionadas entre sí.

Por definición: $\operatorname{sen}\ \theta = \dfrac{y}{r}$; $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

Si divido sen θ entre cos θ:

$$\frac{sen\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

$$\boxed{\tan\theta=\frac{sen\theta}{\cos\theta}}$$

Si divido cos θ entre sen θ

$$\frac{\cos\theta}{sen\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

$$\boxed{\cot\theta=\frac{\cos\theta}{sen\theta}}$$

Tengo en cuenta nuevamente las definiciones:

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}=\frac{1}{\cot\theta}$$

$$\boxed{\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{1}{\frac{x}{r}}=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\boxed{\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{1}{\frac{y}{r}}=\frac{1}{sen\theta}$$

$$\boxed{\csc\theta=\frac{1}{sen\theta}}$$

A partir de las relaciones anteriores, puedo obtener otras importantes.

Si $sen\theta=\frac{y}{r};\quad entonces\quad sen^2\theta=\frac{y^2}{r^2}$

Si $\cos\theta=\frac{x}{r};\quad entonces\quad \cos^2\theta=\frac{x^2}{r^2}$

Si se suma: $sen^2\theta+\cos^2-=\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=\frac{y^2+x^2}{r^2}$

Como $y^2+x^2=r^2$, entonces: $sen^2\theta+\cos^2\theta=1$

Esta última expresión se conoce con el nombre de RELACIÓN BÁSICA DE LA TRIGONOMETRÍA, la cual se cumple para cualquier valor de θ en grados o radianes.

Si divido la RELACIÓN BÁSICA por $\cos^2\theta$, obtengo:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Y si divido la RELACIÓN BÁSICA por $\operatorname{sen}^2\theta$, obtengo:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$$

Las 8 relaciones anteriores me permiten expresar cualquier función trigonométrica en función de las demás.

Analizo los siguientes EJEMPLOS y según mi criterio decido cuales consigno en mi cuaderno.

EJEMPLO 1. Si sen θ = 4/5 y θ es un ángulo del cuadrante II, determino el valor de las otras cinco funciones.

Si $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, entonces $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

Como $\cos\theta < 0$ en el cuadrante II, entonces:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{5}{4}$$

EJEMPLO 2. Si $\tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, θ es un ángulo del cuadrante IV, encuentro $\csc\theta$.

De la relación $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$$\csc\theta = \pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

Como θ es un ángulo del cuadrante IV, entonces $\csc\theta < 0$

$$\csc\theta = -\sqrt{1+(-2\sqrt{2})^2} = -\sqrt{1+8} = -\sqrt{9} = -3$$

Luego $\csc\theta = -3$

EJEMPLO 3. Encuentro la fórmula para expresa $\cos\beta$ en términos de $\cot\beta$.

$$\cot\beta = \frac{\cos\beta}{sen\beta}; \qquad \cos\beta = \cot\beta\cdot sen\beta = \cot\beta\cdot\frac{1}{\csc\beta}$$

Como, $1+\cot^2\beta = \csc^2\beta$ entonces $\csc\beta = \pm\sqrt{1+\cot^2\beta}$

Por lo tanto: $\cos\beta = \frac{\cot\beta}{\pm\sqrt{1+\cot^2\beta}}$

EJERCICIOS. Resuelvo los siguientes ejercicios y los consigno en mi cuaderno.

1. Si $\cos\theta = 3/5$ y θ es un ángulo del cuadrante IV, determinar el valor de las otras funciones.

2. Si $\csc\theta = 3$ y θ es un ángulo en el cuadrante II, encontrar $\tan\theta$.
3. Expresar $\sec\theta$ en términos de $sen\,\theta$.

4. Expresar cada función en términos de $sen\,\beta$

5. Si $sen\,\theta = 1/2$ y $\cot\theta = \sqrt{3}$, encontrar los valores de las otras cuatro funciones.

Reducción de cualquier ángulo al primer cuadrante

Consulto la opinión de los demás integrantes del subgrupo para establecer las estrategias que nos permitan sacarle el máximo provecho a este tema.

Como se puede observar en el cuadro que llenaron en la parte A de esta guía, las funciones trigonométricas toman periódicamente los mismos valores que, con la sola diferencia del signo, son los mismos que en el primer cuadrante.

Para hallar cualquier función trigonométrica de un ángulo mayor de 90^0 basta con reducirlo al primer cuadrante y tener en cuenta el signo de cada función, visto en la guía 3.

Operaciones que deben efectuarse.

a) Si el ángulo está comprendido entre 90^0 y 180^0, se debe restar de 180°.

b) Si el ángulo está comprendido entre 180^0 y 270^0, se le debe restar 180°.

c) Si el ángulo está comprendido entre 270^0 y 360^0, se le debe restar de 360^0.

d) Si el ángulo es mayor de 360^0, se le resta 360^0 las veces que sea necesario para que el ángulo quede menor de 360^0 y se le pueda aplicar una de las operaciones a), b) ó c).

Analizo los siguientes ejemplos y si quiero los consigno en mi cuaderno.

EJEMPLO 1.

a) Hallar sen 150^0.

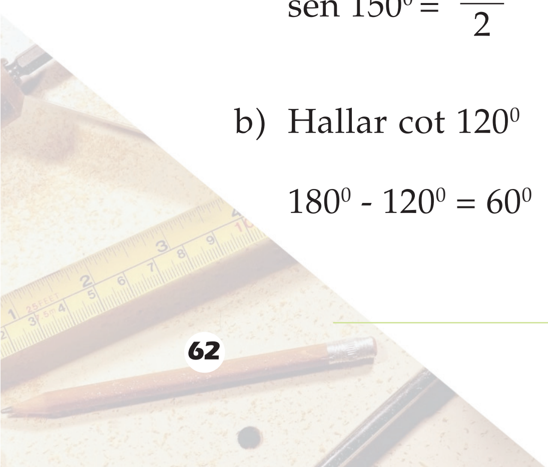
$180^0 - 150^0 = 30^0$

sen 150^0 = sen 30^0 (en valor absoluto)

sen $150^0 = \frac{1}{2}$ (Positivo porque el seno es positivo en el segundo cuadrante)

b) Hallar cot 120^0

$180^0 - 120^0 = 60^0$



$\cot 120^0 = \cot 60^0$ (en valor absoluto)

$\cot 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Negativo porque la cotangente es negativa en el cuadrante II)

EJEMPLO 2.

a) Hallar $\tan 225^0$.

$225^0 - 180^0 = 45^0$

$\tan 225^0 = \tan 45^0 = 1$ (El valor es positivo porque la tangente es positiva en el cuadrante III).

b) Hallar $\sec 240^0$.

$240^0 - 180^0 = 60^0$

$\sec 240^0 = \sec 60^0 = -2$ (El valor es negativo porque la secante es negativa en el cuadrante III)

EJEMPLO 3.

a) Hallar $\cos 323^0$.

$360^0 - 323^0 = 37^0$

$\cos 323^0 = \cos 37^0 = 0.8$ (El valor es positivo porque el coseno es positivo en el cuadrante IV).

b) Hallar $\csc 315^0$.

$360^0 - 315^0 = 45^0$

$\csc 315^0 = \csc 45^0 = -\sqrt{2}$ (La cosecante es negativa en el cuadrante IV)

EJEMPLO 4.

a) Hallar sen 930^0.

$930^0 - 2(360^0) = 930^0 - 720^0 = 210^0$

Sen $930^0 = \text{sen } 210^0 = \text{sen } (210^0 - 180^0) = \text{sen } 30^0 = -\frac{1}{2}$

(La respuesta es negativa porque 930^0 en un ángulo del cuadrante III donde el seno es negativo).

Se puede concluir que todo ángulo puede ser reducido a un ángulo en el primer cuadrante y este ángulo recibe el nombre de ÁNGULO DE REFERENCIA.

EJERCICIOS

Resuelvo los siguientes ejercicios y los consigno en mi cuaderno. Comparo mis respuestas con las de mis compañeros de subgrupo para decidir las respuestas correctas.

Hallo las seis funciones trigonométricas, utilizando el ángulo de referencia de los siguientes ángulos.

1. 300^0
2. 390^0
3. 413^0
4. 1125^0

D APLICACIONES

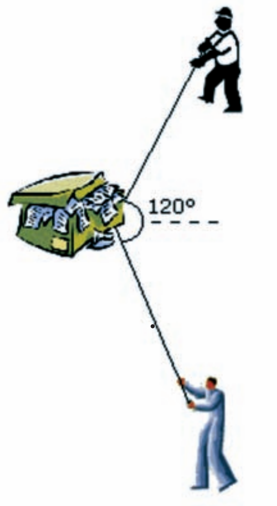
Una de las Competencias Laborales Generales es la TOMA DE DECISIONES o sea la capacidad para prever, elegir y poner en marcha alternativas de acción que se manifiestan al tomar decisiones en forma acertada y oportuna.

Los ejercicios de aplicación son una buena oportunidad para poner a prueba mi responsabilidad al tomar una decisión significativa. Decido cualquiera de las siguientes opciones: trabajar solo, trabajar con un compañero, realizar todos los ejercicios o realizar sólo 3 de los 5.

No olvido que la decisión que tome debe ser un acto de responsabilidad frente a mi aprendizaje.

Los resuelvo y los consigno en mi cuaderno.

1.



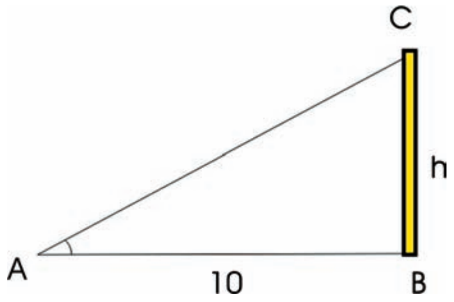
Las fuerzas de acción de dos fuerzas concurrentes forman entre sí un ángulo de 120^0; si la intensidad de cada cuerda es de 50 Newtons, se pide calcular analíticamente la fuerza resultante, aplicando la fórmula:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta}$$

2. A las 2:35 las agujas del reloj forman un ángulo aproximado de 225^0. Reduzca este ángulo al primer cuadrante y halle las 6 funciones trigonométricas.

3. Haga una tabla semejante a la que se hizo con la tangente para visualizar cómo varía la cosecante entre 0 y 2π.

4. Si sen A = 2/3 en el triángulo rectángulo ABC, determinar la altura del poste.



5. Si $\tan \theta = k$, con $\pi < \theta < 3\pi/2$, encontrar las demás funciones trigonométricas.

COMPLEMENTACIÓN

Si desea aprender más y para que TENGA EN CUENTA OTRAS FORMAS DE ENFOCAR LOS MISMOS TEMAS, consulte en el CD «Descartes» los tópicos de esta guía que desee ampliar.

Haga un círculo trigonométrico y represente geométricamente las funciones secante y cosecante.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA