Guía 3

¿QUÉ HAY DE TRIGONOMETRÍA EN UN CÍRCULO?

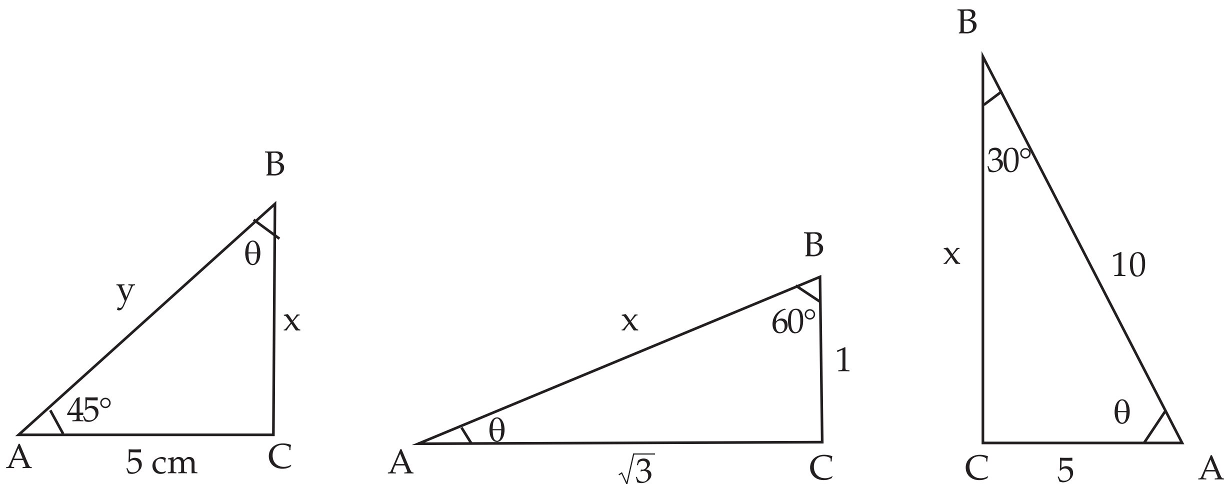
Indicadores de logros

- ✓ Identifica las funciones trigonométricas, en un círculo de radio 1, de un ángulo de cualquier cuadrante.
- ✓ Deduce las funciones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° y las aplica en la solución de problemas.
- ✓ Identifica las fortalezas y debilidades de sus procesos (REFERENCIACIÓN COMPETITIVA).
- ✓ Ubica procesos exitosos de otros.
- ✓ Analiza, compara y establece diferencias entre sus procesos y los de otros.
- ✓ Plantea acciones de innovación y mejoramiento.

¿QUÉ HAY DE TRIGONOMETRÍA EN UN CÍRCULO?

Durante el desarrollo de esta guía me daré cuenta de cuánta trigonometría hay en un círculo. Evalúo primero algunos presaberes:

Observo cada uno de los siguientes triángulos. ¿Puedo hallar los valores desconocidos?



En el primer triángulo $\theta = 45^0$ (ángulo complementario de 45^0). Por lo tanto, el ΔABC es isósceles y $x = 5$ cm. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$y^2 = x^2 + 5^2$$
$$y^2 = 5^2 + 5^2$$
$$y = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$$
$$y = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$x = 5 \text{ cm.}$$
$$y = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$
$$\theta = 45^0$$

EJERCICIOS:

Resuelvo los dos ejercicios propuestos. Comparo mi trabajo con el de mis compañeros de subgrupo para identificar mis fortalezas y debilidades en relación con estos presaberes y poder mejorar si lo necesito.

1. Encuentro los valores desconocidos de los otros dos triángulos.
2. Hallo las 6 relaciones trigonométricas de los tres triángulos.

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Para iniciar el estudio del círculo trigonométrico, analizo detalladamente, con mis compañeros de subgrupo, la siguiente información, la consigno en mi cuaderno y solicito la asesoría del profesor cuando no entienda algún concepto, ejemplo o instrucción. Si entiendo todo puedo asesorar a mis compañeros.

Considero un ángulo θ en posición estándar respecto a un sistema de coordenadas y sea P(x, y) un punto sobre el lado terminal, tal que:

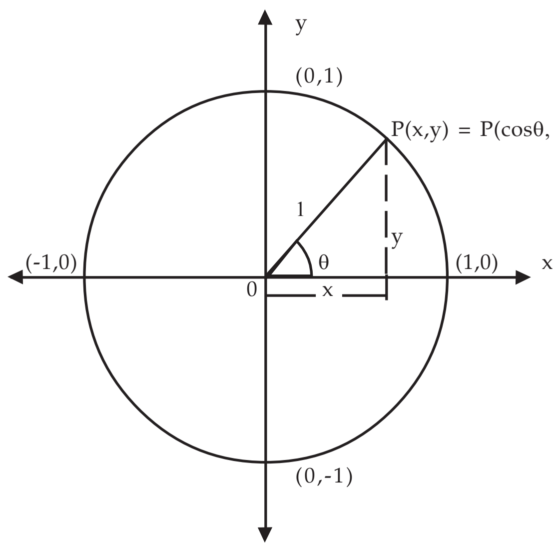
$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

Si el punto P hace un giro completo alrededor del origen O, entonces describe una circunferencia cuyo radio es la unidad y determina sobre los ejes X, Y los puntos (1, 0), (0, 1), (- 1, 0) y (0, - 1) como muestra la figura.

Esta circunferencia se llama CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA UNITARIA y tiene una longitud:

$C = 2\pi r$
Como $r = 1$

$C = 2\pi$



Aplico las definiciones de seno y coseno al ángulo θ de la figura.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Puedo deducir que la abscisa "x" del punto P corresponde al valor del coseno de θ y la ordenada "y" del punto P corresponde al valor del seno de θ.

Entonces las coordenadas de P están dadas por las funciones seno y coseno (llamadas funciones circulares):

$$P\,(x, y) = P\,(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

Así mismo, puedo sacar las demás funciones de θ, teniendo en cuenta las definiciones dadas en la Guía 2.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}} = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}} = \frac{x}{y}$$

EJEMPLO 1. Si $x = \frac{1}{2}$, hallar las funciones de θ.
Para hallar "y", aplico el Teorema de Pitágoras.

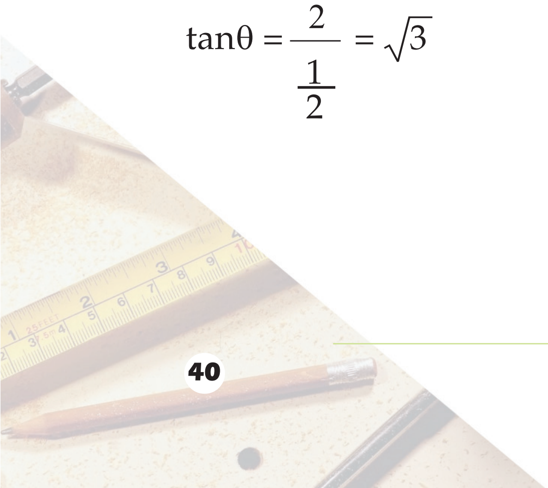
$$y^2 = r^2 - x^2; \qquad r = 1,\ x = \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sec\theta = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

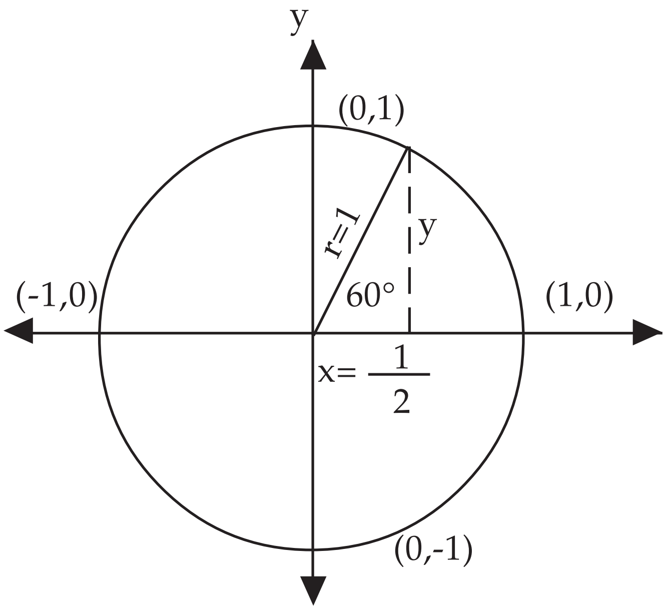


Recordemos que si m< $\theta = 30^0$, entonces el cateto opuesto es igual a la mitad de la hipotenusa. (Teorema 30 - 60 - 90)

También se cumple que si m<$\theta = 60^0$, entonces el cateto adyacente es igual a la mitad de la hipotenusa.

En el ejemplo anterior, se puede concluir que $\theta = 60^0$, ya que $x = \frac{1}{2}$ y $r = 1$.

Por lo tanto:



$\text{sen } 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 60^0 = 2$

$\csc 60^0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

EJERCICIOS:

Basado en el círculo trigonométrico, resuelvo los siguientes ejercicios en mi cuaderno. Socializo los resultados con mis compañeros para comparar mis procesos con otros, para mejorarlos o compartirlos, si los míos son más exitosos.

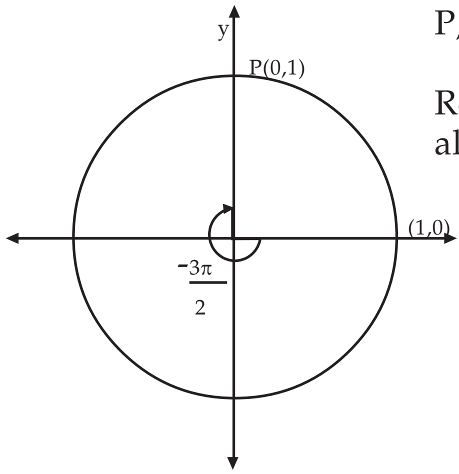
1. Si $y = \frac{1}{2}$, hallar las funciones de θ. ¿Cuál es el valor de θ? de razones.

   Haga una gráfica.

2. Teniendo en cuenta que $x = \cos\theta$ y $y = \text{sen}\theta$, ¿Cuáles son el seno y coseno de los siguientes ángulos?

   a. 90^0 b. 180^0 c. 270^0 d. 360^0 e. 630^0

EJEMPLO 2. Hallar las funciones de - $\frac{3\pi}{2}$



De la gráfica, deduzco que para el punto P, x = 0, y = 1, r = 1.

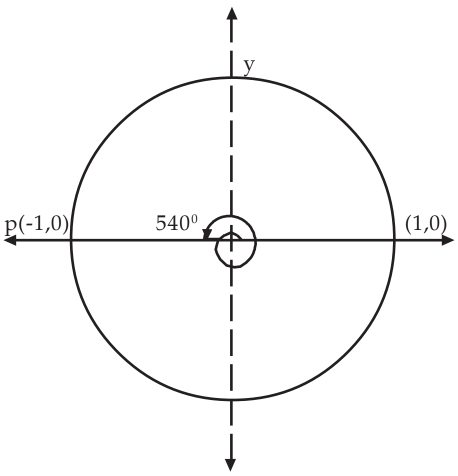
Reemplazo en las fórmulas que anteceden al ejemplo 1:

$$sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = y = 1 \ ; \ \csc\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = x = 0 \ ; \ \sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = ?$$

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = ? \ ; \ \cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

EJEMPLO 3. Hallar las funciones de 540^0.



El punto P sobre el lado terminal del ángulo de 540^0 tiene como coordenadas x = - 1, y = 0. Además r = 1 por ser círculo trigonométrico.

$$sen\ 540° = y = 0 \ ; \ \csc 540° = \frac{1}{y} = \frac{1}{0} = ?$$

$$\cos 540° = x = -1 \ ; \ \sec 540° = \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\tan 540° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \ ; \ \cot 540° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = ?$$

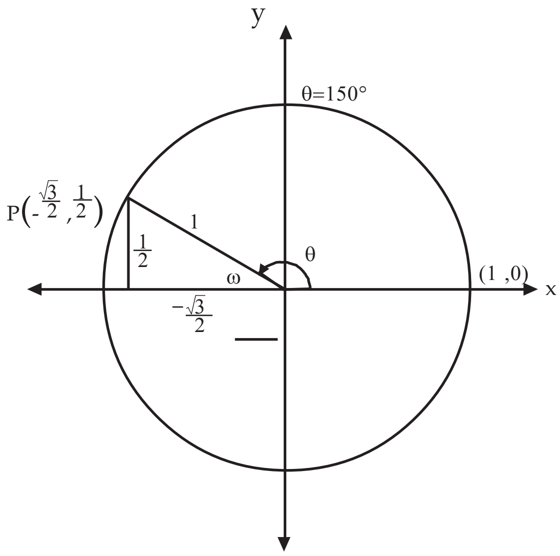
Las respuestas marcadas con ? es para recordar que no es posible dividir por cero, porque el resultado TIENDE A INFINITO.

EJERCICIO.

Aplico las fórmulas de las funciones trigonométricas para completar el cuadro. Puedo cambiar el modelo y PLANTEAR OTRO DONDE SE VEA INNOVACIÓN Y MEJORAMIENTO.

θ / FUNCIÓN	0^0	30^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0	-30^0	-60^0	-90^0
SENO										
COSENO										
TANGENTE										

EJEMPLO 4. Hallar sen θ, tan θ y sec θ, si $y = \frac{1}{2}$



Igual que en el ejemplo 1, aplicando el teorema de Pitágoras.

$x^2 = r^2 - y^2$

$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Escojo el valor negativo porque el punto P tiene abscisa negativa:

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad y = \frac{1}{2} \quad , \quad r = 1$$

$$\boldsymbol{Sen}\theta = \boldsymbol{y} = \frac{1}{2}$$

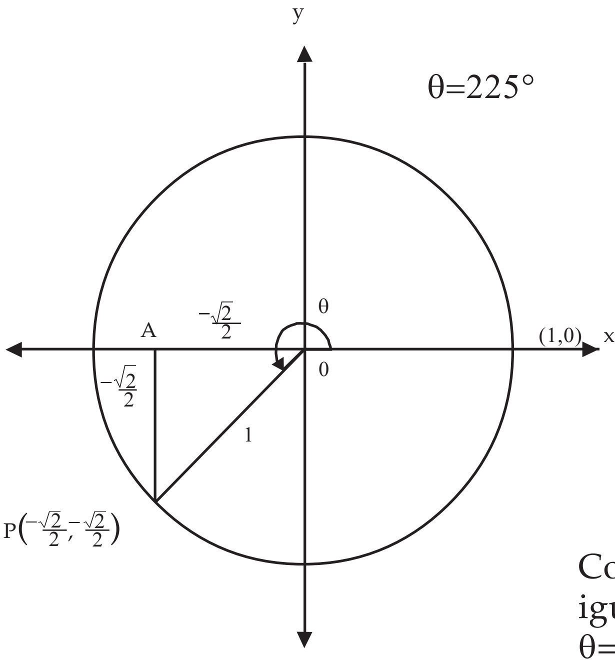
$$\mathbf{tan}\theta = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathbf{sec}\theta = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}} = 1 \div \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Se puede concluir que $\omega = 30^0$, por lo tanto $\theta = 150^0$.

EJEMPLO 5. Hallar $\cos\theta$, $\cot\theta$ y $\csc\theta$, si

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ y } \quad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



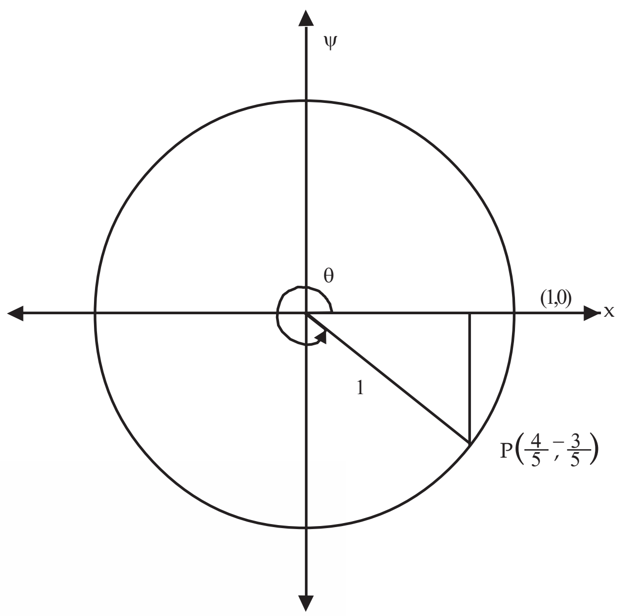
$$\cos\theta = x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$\csc\theta = \frac{1}{y} = 1 \div \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Como el Δ POA tiene los catetos iguales, es isósceles por lo tanto: $\theta = 180° + 45° = 225°$

EJEMPLO 6. Encuentre las seis funciones del ángulo θ cuyo lado terminal intersecta a la circunferencia unitaria en el punto $P(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$



$$sen\theta = y = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = x = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$$

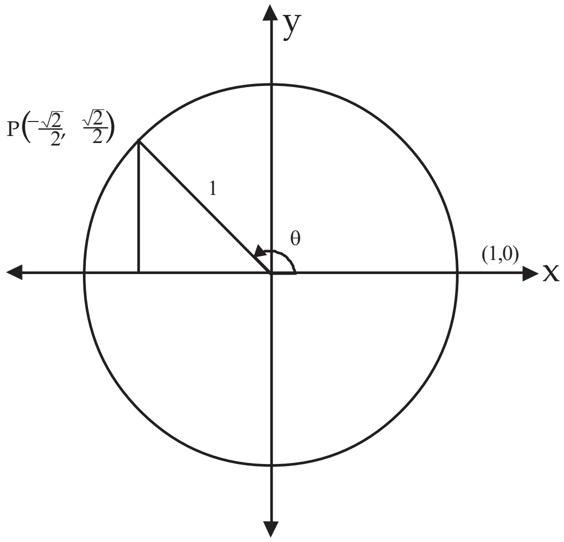
$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \left(\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{5}{4}$$

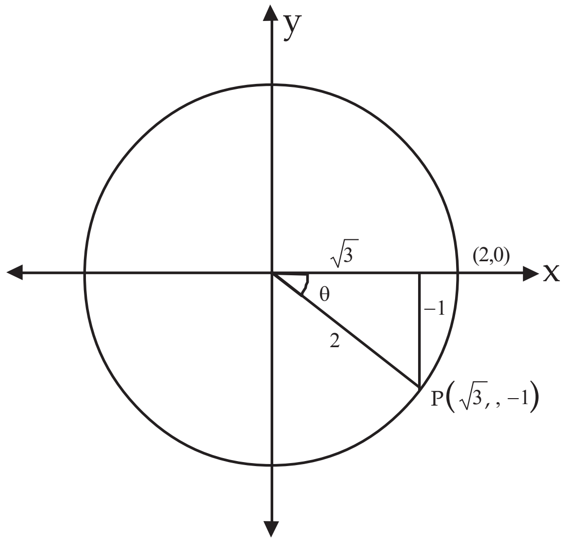
$$\csc\theta = \frac{1}{y} = -\frac{5}{3}$$

EJERCICIOS: Del análisis de los seis ejemplos anteriores, puedo IDENTIFICAR MIS FORTALEZAS Y DEBILIDADES para comprenderlos y las tengo en cuenta para resolver los siguientes ejercicios. Encuentre las 6 funciones del ángulo θ

1)



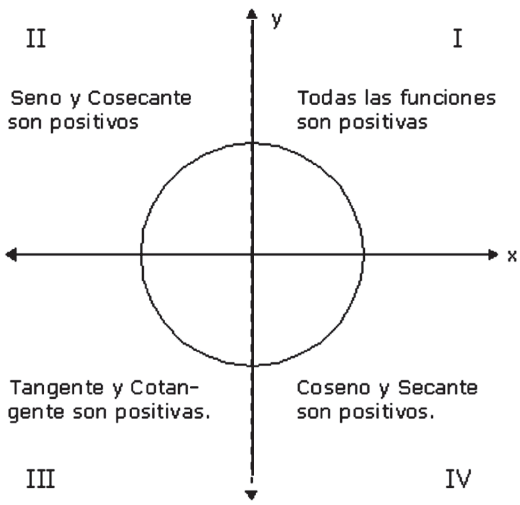
2)



Signo de las funciones

Ya puedo deducir que los valores de las funciones trigonométricas pueden ser positivos, negativos o cero, dependiendo de la ubicación del lado terminal del ángulo.

La siguiente figura muestra cuáles de los valores de las funciones trigonométricas son positivos en cada cuadrante. Si quiero, PUEDO REPRESENTAR LO MISMO CON UNA FIGURA O CUADRO DIFERENTE Y COMPARARLO CON ESTE para probar que sí se cumple:



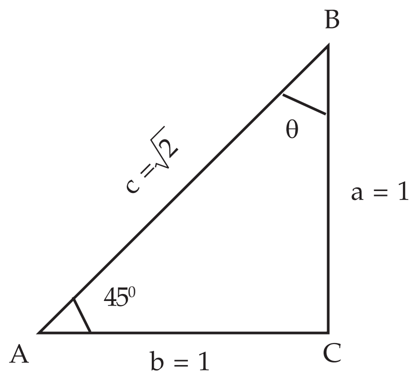
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Ya se vio cómo obtener las funciones de 60^0 utilizando el Teorema 30 - 60 - 90. Igualmente se planteó un ejercicio para obtener las funciones de 30^0.

La siguiente información me sirve para ANALIZAR, COMPARAR Y ESTABLECER DIFERENCIAS ENTRE LOS PROCESOS VISTOS Y LOS NUEVOS. La consigno en mi cuaderno.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45°

Considero un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen la misma longitud, igual a la unidad. Entonces la hipotenusa tiene longitud c, la cual se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras.



$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 1^2 + 1^2$

$c^2 = 2$

$c = \sqrt{2}$

De la gráfica se puede determinar fácilmente el valor de cada función trigonométrica para un ángulo de 45^0.

$$sen 45° = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{1} = 1$$

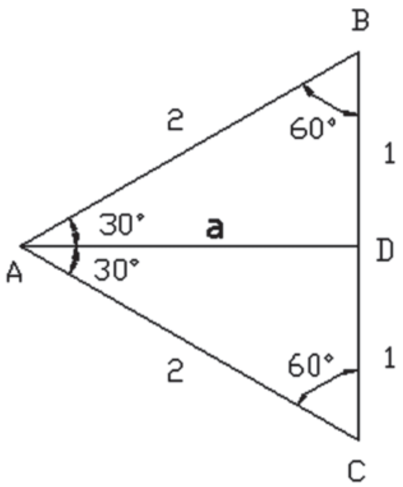
$$\cot 45° = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45° = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30° Y 60°.

Considero ahora un triángulo equilátero con lados de longitud 2. Si se traza la bisectriz de un ángulo agudo, se obtienen dos triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa de longitud 2, un cateto de longitud 1 y otro cateto de longitud «a», que se calcula con el Teorema de Pitágoras.



$a^2 + 1^2 = 2^2$

$a^2 = 4 - 1$

$a^2 = 3$

$a = \sqrt{3}$

FUNCIONES DE 30º

De la gráfica, considerando el triángulo rectángulo ADB, se puede determinar cada una de las funciones trigonométricas de un ángulo de 30^0:

$$sen\ 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{AB}{BD} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

FUNCIONES DE 60°

De la misma gráfica, considerando el triángulo ADC, puedo determinar cada una de las funciones de 60^0:

$$sen\ 60° = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60° = \frac{AC}{AD} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = \frac{AC}{CD} = \frac{2}{1} = 2$$

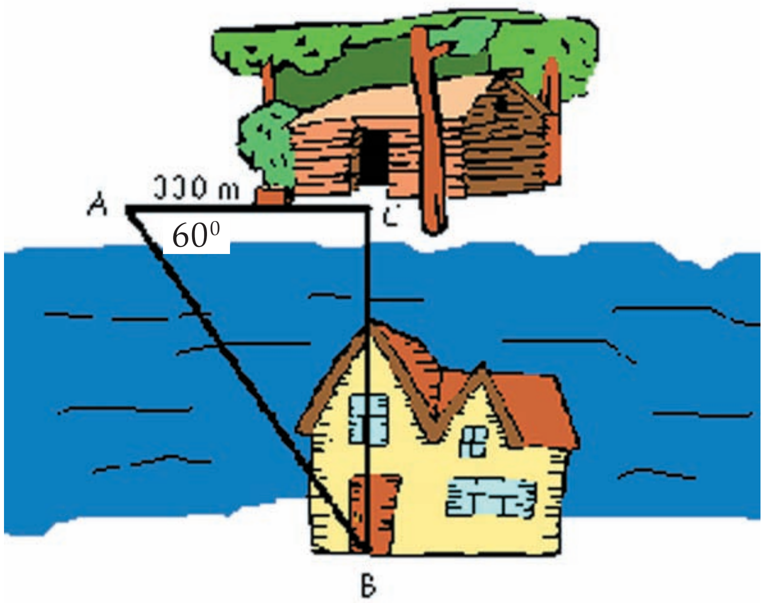
$$\tan 60° = \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D APLICACIONES

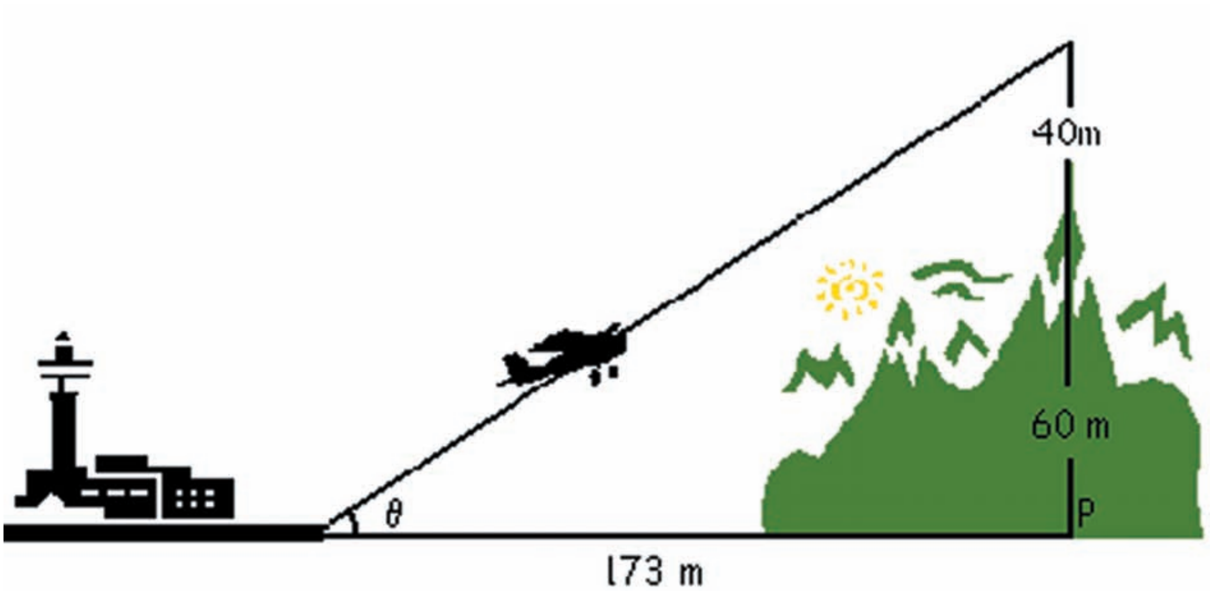
Resuelvo estos problemas y comparo mis respuestas con otros compañeros para ubicar sus procesos.

Con mis compañeros de subgrupo, analizo y resuelvo los siguientes problemas. Consigno el procedimiento en mi cuaderno.

1. Hallar la distancia entre las dos cabañas que están en los lados opuestos de un lago, sabiendo que la distancia AC es de 330 m y el ángulo es de 60^0.

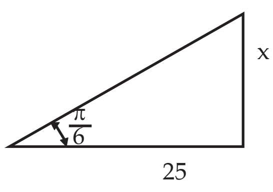


2. La cima de una montaña está 60 metros más alta que un aeropuerto cercano y la distancia horizontal desde el final de la pista hasta el punto P es de 173 m. Un avión despega desde el final de la pista en dirección a la montaña con un ángulo θ que debe ser constante hasta que pase la montaña. Si el piloto desea pasar 40 m por encima de la montaña, ¿Cuál debería ser el ángulo de despegue?

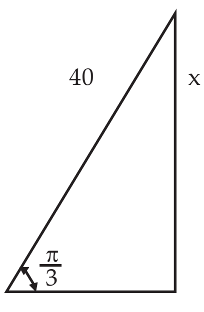


Hallo el valor de "x" en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos usando la tabla o la calculadora.

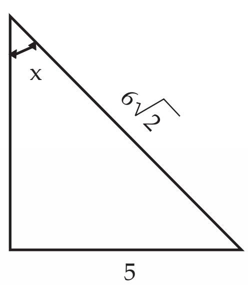
3.



4.



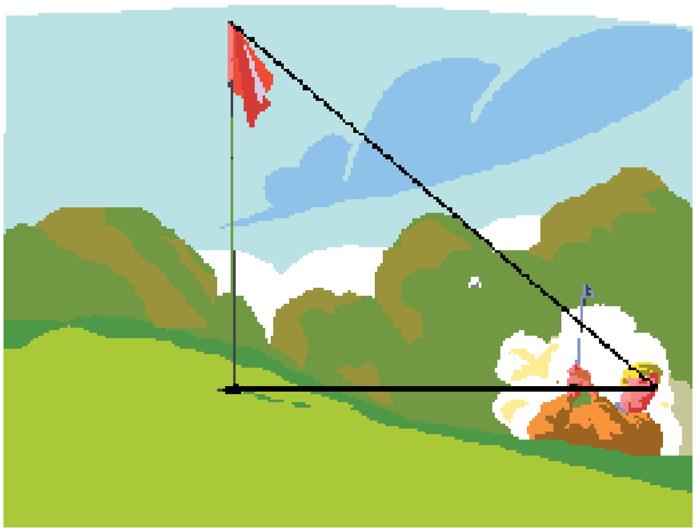
5.



COMPLEMENTACIÓN

Si desea saber más, consulte los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión y resuelva los siguientes problemas.

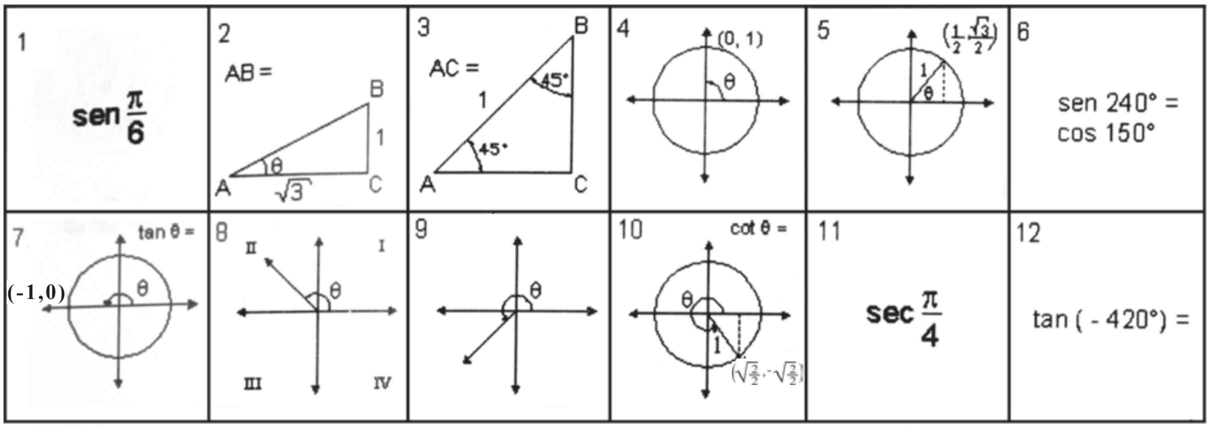
1. El ángulo de elevación es de 60°. ¿Cuál es la altura del tubo que sostiene la bandera si el observador esta situado a 25 m de la base del tubo?



2. ¿Cuál es la altura de un edificio cuya sombra horizontal es de 50 m, donde el ángulo de elevación del sol es de 45^0 ?

3. Desde lo alto de un tanque de agua de 170 pies de altura, el ángulo de depresión a una casa es de 30^0. ¿Qué tan lejos está la casa del tanque de agua? Haga el dibujo.

4. Tome un juego de «PIÉNSALO» y resuelva el siguiente ejercicio:



A sen θ = 1 cos θ = 0	B $\frac{1}{2}$	C $-\sqrt{3}$	D senθ= + tan θ = - sec θ = -	E $\frac{\sqrt{2}}{2}$	F cos θ = - cot θ = + csc θ = -
G 0	H -1	I $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	J 2	K sen θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos θ = $\frac{1}{2}$	L $\sqrt{2}$

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA