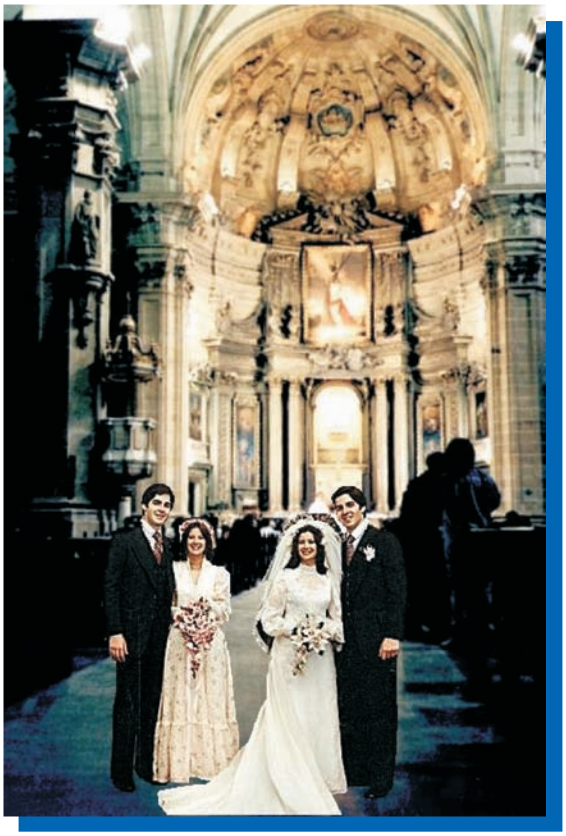
Guía 2

LAS IDENTIDADES: UNA HERRAMIENTA EN LOS PROCESOS MATEMÁTICOS



Indicadores de logros

- ✓ Deduce y aplica las fórmulas en las que aparecen las funciones trigonométricas de $(\theta + \beta)$, $(\theta - \beta)$, 2θ, $\theta/2$ y $(\pi/2 - \theta)$.
- ✓ Toma decisiones basadas en principios y valores sociales y particulares (COMPETENCIA AXIOLÓGICA).
- ✓ Cuida los bienes ajenos, públicos y del entorno.
- ✓ Actúa y se desempeña con autodisciplina, sin necesidad de supervisión en el marco de la autonomía otorgada.
- ✓ Analiza y reflexiona sobre su comportamiento y el de los otros.
- ✓ Acepta a los otros sin importar sus condiciones socioculturales.
- ✓ Respeta los acuerdos consensuados.

HAY MUCHO MÁS SOBRE IDENTIDADES

Durante 5 minutos hagamos un análisis y reflexión a la **competencia axiológica** o sea la capacidad de actuar basado en principios y valores sociales y consensuados en los grupos donde interactúa.

Esta competencia busca incentivar en el estudiante los valores positivos y reflexionar sobre los aspectos negativos. A través del trabajo de las guías, debo demostrar mis valores relacionados con responsabilidad, compromiso, interés por el trabajo, respeto y acatamiento a las normas convivencia-cooperación, características de un ser social.

Al final de la guía haremos una evaluación grupal, que nos permita identificar los desempeños de cada uno, en relación con los valores mencionados.

La primera reflexión podría ser que debo esforzarme al máximo para no defraudar a mis padres que hacen todo lo posible para darme estudio.

Una norma importante de convivencia es respetar el uso de la palabra y prestar mucha atención a la persona que esté hablando.

1. Tomo del CRA un juego de «PIÉNSALO» para recordar los conceptos básicos de la guía anterior.

Con uno de mis compañeros de subgrupo, resuelvo el siguiente ejercicio. Cuando se nos presente alguna dificultad, consultamos al profesor para recibir su orientación. Una vez revisado el ejercicio por el profesor, tengo cuidado de devolver el juego completo y en buen estado

1 $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta$	2 $\tan^2\theta + 1$	3 $\text{sen}(-\theta)$	4 $\tan(-\theta)$	5 $1 + \cot^2\theta$	6 $\cos(-\theta)$
7 $\cot\theta$	8 $1 - \text{sen}^2\theta$	9 $\tan\theta$	10 $1 - \cos^2\theta$	11 $\frac{1}{\cos\theta}$	12 $\csc\theta$

A $\csc^2\theta$	B $\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$	C $\cos^2\theta$	D $\frac{1}{\text{sen}\theta}$	E $\text{sen}^2\theta$	F $\sec\theta$
G $-\text{sen}\,\theta$	H $-\tan\theta$	I $\sec^2\theta$	J $\cos\theta$	K 1	L $\frac{1}{\cot\theta}$

2. Tomo un juego de «ÁLGEBRA ES UN JUEGO» y con dos compañeros de subgrupo resuelvo los siguientes ejercicios para recordar algunos casos de factorización. Presento cada ejercicio a mi profesor.

a. $5x + 10$
b. $-21x^2 + 28$
c. $-18x^2 - 9x$
d. $18x^2 - 12x + 24$
e. $x^2 - 25$
f. $4 - x^2$
g. $16x^2 - 9$
h. $x^2 - 9x + 20$
i. $6x^2 + 7x + 2$
j. $20x^2 + x - 1$

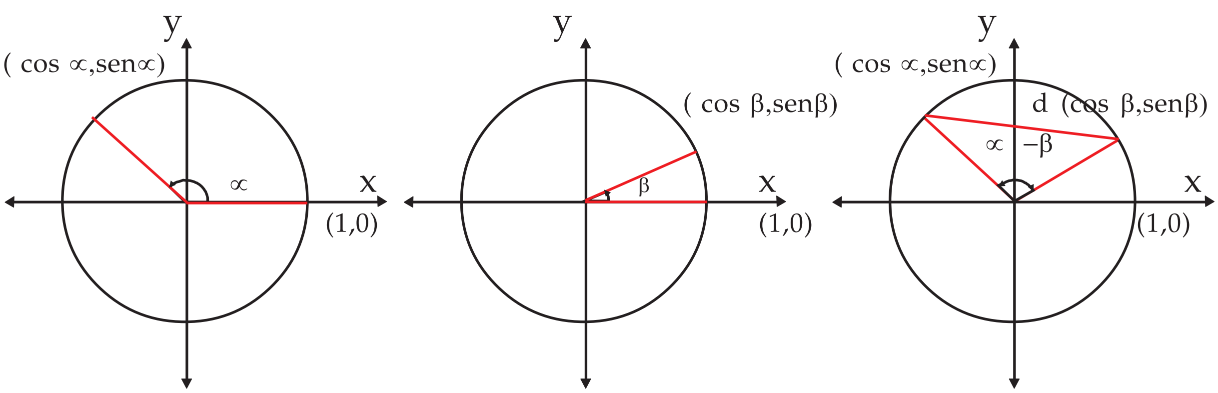
Una vez terminados los ejercicios, verifico que las fichas estén completas y llevo el juego al CRA.

IDENTIDADES DE LA SUMA Y RESTA DE DOS ÁNGULOS

Coseno de la diferencia de dos ángulos

Analizo cuidadosamente la siguiente demostración y la consigno en mi cuaderno.

Considero el círculo trigonométrico donde los ángulos $\propto$ y β tienen las coordenadas mostradas.



La figura de la derecha muestra los ángulos $\propto$ y β en el mismo plano cartesiano.
Noto que el ángulo entre ellos es $\propto - \beta$
Para encontrar la distancia «d» entre los puntos (cos $\propto$, sen $\propto$) y (cosβ , senβ) aplico la fórmula $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

$$d^2 = (\cos \propto - \cos \beta)^2 + (\text{sen} \propto - \text{sen } \beta)^2$$

$$= (\cos^2 \propto - 2\cos \propto \cos \beta + \cos^2 \beta) + (\text{sen}^2 \propto - 2\text{sen} \propto \text{sen } \beta + \text{sen}^2 \beta)$$

$$= (\cos^2 \propto + \text{sen}^2 \propto) + (\cos^2 \beta + \text{sen}^2 \beta) - 2\cos \propto \cos \beta - 2\text{sen} \propto \text{sen } \beta$$

$$= 1 + 1 - 2\cos \propto \cos \beta - 2\text{sen} \propto \text{sen } \beta$$

$$= 2 - 2 (\cos \propto \cos \beta + \text{sen} \propto \text{sen}\beta)$$

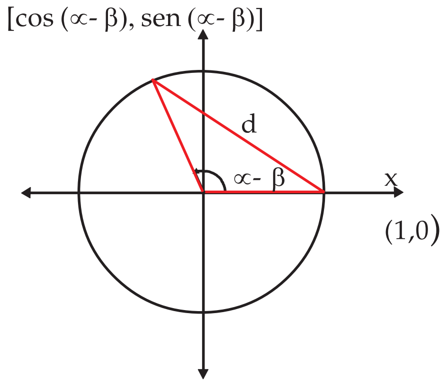
Ahora imagino que el triángulo del último círculo trigonométrico es rotado tal que $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ quede en (1, 0). La distancia "d" no ha cambiado.

$d^2 = [\cos(\propto - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\propto - \beta) - 0]^2$

$= [\cos^2(\propto - \beta) - 2\cos(\propto - \beta) + 1] + \operatorname{sen}^2(\propto - \beta)$

$= [\cos^2(\propto - \beta) + \operatorname{sen}^2(\propto - \beta)] + 1 - 2\cos(\propto - \beta)$

$= 2 - 2\cos(\propto - \beta)$



Igualando las dos expresiones para "d^2", obtengo:

$2 - 2\cos(\propto - \beta) = 2 - 2(\cos\propto\cos\beta + \operatorname{sen}\propto\operatorname{sen}\beta)$

$-2\cos(\propto - \beta) = -2(\cos\propto\cos\beta + \operatorname{sen}\propto\operatorname{sen}\beta)$

$\boxed{\cos(\propto - \beta) = \cos\propto\cos\beta + \operatorname{sen}\propto\operatorname{sen}\beta}$ (IDENTIDAD DE LA RESTA)

EJEMPLO 1. Simplifico $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

Aplico la identidad $\cos(\propto - \beta) = \cos\propto\cos\beta + \operatorname{sen}\propto\operatorname{sen}\beta$, donde $\propto = 3\pi/4$ y $\beta = \pi/3$.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + sen\frac{3\pi}{4}sen\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-1 + \sqrt{3}\right), \quad ó \quad \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right), \quad ó \quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

EJEMPLO 2. Encuentro $\cos 15^0$

Escribo 15^0 como la diferencia de dos ángulos que tengan valores conocidos para seno y coseno; pueden ser 60^0 y 45^0 ó 45^0 y 30^0.

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0)$$
$$= \cos 45^0 \cos 30^0 + \operatorname{sen} 45^0 \operatorname{sen} 30^0$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \quad \text{ó} \quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Coseno de la suma de dos ángulos

$\cos(\propto + \beta)$ es equivalente a $\cos[\propto - (-\beta)]$ o sea el coseno de la diferencia de los ángulos $\propto$ y $-\beta$

$$\cos(\propto + \beta) = \cos[\propto - (-\beta)]$$

$$= \cos \propto \cos(-\beta) + \operatorname{sen} \propto \operatorname{sen}(-\beta)$$

Pero $\cos(-\beta) = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$, entonces

$\boxed{\cos(\propto + \beta) = \cos\propto \cos\beta - \operatorname{sen}\propto \operatorname{sen}\beta}$ (IDENTIDAD DE LA SUMA)

EJEMPLO 3. Encuentro $\cos 105^0$

Escribo 105^0 como la suma de dos ángulos con valores conocidos para las funciones trigonométricas.

$$\cos 105^0 = \cos(60^0 + 45^0)$$

$$= \cos 60^0 \cos 45^0 - \operatorname{sen} 60^0 \operatorname{sen} 45^0$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

EJERCICIOS.

Use las identidades del coseno de la suma y resta de dos ángulos para realizar los siguientes ejercicios:

1. Simplifique $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$
2. Simplifique $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$
3. Simplifique cos (45° + 30°)
4. Hallar cos 165°
5. Hallar cos 195°

Hago un paréntesis para analizar con mis compañeros nuestro comportamiento durante el desarrollo de las guías:

a. ¿Aprovechamos el tiempo al máximo o charlamos demasiado?
b. Cuando el profesor se ausenta, ¿Seguimos trabajando con autodisciplina?
c. ¿Actuamos correctamente para evitar sanciones o por principios?

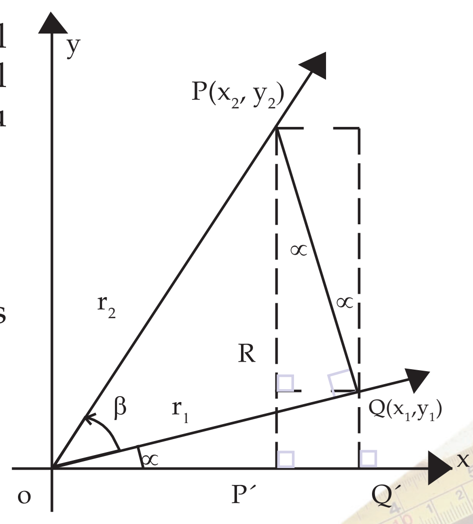
Si las respuestas son positivas, FELICITACIONES, en caso contrario debemos reflexionar y tomar decisiones para remediar las situaciones anómalas. Compartimos nuestras conclusiones con el grupo. De cada subgrupo el profesor escogerá un estudiante para que socialice los compromisos adquiridos por consenso.

Seno de la suma y diferencia de dos ángulos.

Analizo la demostración de sen (∝ + β), la consigno en mi cuaderno y trato de obtener la identidad para sen (∝ - β).

Considero la siguiente construcción geométrica de los ángulos agudos positivos ∝ y β, con vértice en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares.

Por el punto P (x_2, y_2) sobre el lado terminal del ángulo ∝ + β,trazo una recta perpendicular al lado terminal del ángulo ∝ y sea Q (x_1, y_1) su punto de intersección.



Al trazar RQ paralelo al eje x, obtengo:

< QOQ′ ≅ < QPP′(por tener los lados respectivamente perpendiculares)

En el ΔOPP′ se cumple:

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{PP'}{OP}=\frac{y_2}{r_2}=\frac{PR+RP'}{r_2} \qquad (1)$$

En el ΔRQP: $\cos \propto = \dfrac{PR}{PQ}$; $PR = PQ \cos \propto$ (2)

En el $\Delta OQQ'$: $\text{sen} \propto = \dfrac{QQ'}{OQ}$; $QQ' = OQ \,\text{sen} \propto = RP'$ (3)

Reemplazo (2) y (3) en (1)

$$sen(\alpha+\beta) = \frac{PQ\cos\alpha + OQsen\alpha}{r_2} \qquad (4)$$

Ahora, en el ΔOQP se cumplen las relaciones:

$$sen\beta = \frac{PQ}{r_2}; \qquad PQ = r_2 sen\beta \qquad (5)$$

$$\cos\beta = \frac{OQ}{r_2}; \qquad OQ = r_2\cos\beta \qquad (6)$$

Reemplazo (5) y (6) en (4)

$$sen(\alpha+\beta) = \frac{\cancel{r_2}sen\beta\cos\alpha + \cancel{r_2}\cos\beta sen\alpha}{\cancel{r_2}}$$

Por lo tanto $\boxed{\text{sen}(\propto + \beta) = \text{sen}\propto \cos\beta + \cos\propto \text{sen}\beta}$

EJERCICIO.

Consigne en el cuaderno la demostración de la identidad:

$\text{sen}(\propto - \beta) = \text{sen}\propto \cos\beta - \cos\propto \ \text{sen}\beta$

Analizo los siguientes ejemplos y decido si necesito o no resolver los ejercicios propuestos.

EJEMPLO 4. Simplifico $sen\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{5\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{4}sen\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right), \quad ó \quad \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

EJEMPLO 5. Hallo sen 105°

a) Puedo usar la identidad sen $(\propto + \beta) = \text{sen}\propto \cos\beta + \cos\propto \text{sen}\,\beta$, con $\propto = 60°$ y $\beta = 45°$.

$$\begin{aligned}\text{sen } 105° &= \text{sen } (60° + 45°)\\ &= \text{sen } 60° \cos 45° + \cos 60° \text{ sen } 45°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) \quad ó \quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

b) Puedo usar la identidad $\text{sen}(\propto-\beta)=\text{sen}\propto \cos\beta - \cos\propto \text{sen}\beta$, con $\propto=150^0$ y $\beta= 45°$.

sen 105° = sen (150°- 45°) = sen 150° cos 45° - cos 150° sen 45°

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

EJERCICIOS. Use las identidades del seno de la suma y resta de dos ángulos para realizar los siguientes ejercicios.

1. Simplifique:

   a) sen (120° + 45°)
   b) sen ($\pi/4 + \pi/6$)
   c) sen ($\pi/4 - \pi/6$)
   d) sen (90°- 15°)

2. Encuentre:
   a) sen 75
   b) sen 150°
   c) sen 135
   d) sen 195°

Tangente de la suma y diferencia de dos ángulos.

Con mis compañeros de subgrupo, analizo la deducción de las identidades de la tangente. Recordemos que trabajar en equipo no es solamente para desarrollar contenidos, también es una excelente oportunidad para ayudar a resolver un conflicto de cualquier compañero, para reflexionar sobre el comportamiento de todos y llegar a acuerdos que nos permitan desempeñarnos con autodisciplina.

La tangente de (∝ + β) puede ser deducida usando las identidades del seno y del coseno de (∝ + β).

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta}\times\frac{\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{sen\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}sen\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\dfrac{sen\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

La tangente de (∝ – β) puede ser deducida de dos maneras:

a) Usando las identidades del seno y coseno de (∝ – β).
b) Usando la identidad de tan (∝ + β), donde β se reemplaza por (– β).

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

EJEMPLO 6. Encontrar la tangente de 75^0.

Puedo utilizar cualquiera de las dos identidades.

a) $\tan(\propto + \beta)$, donde $\propto = 30^0$ y $\beta = 45^0$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$\tan 75^0 = \tan(30^0 + 45^0)$

$$= \frac{\tan 30 + \tan 45°}{1 - \tan 30° \tan 45°}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{9 + 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3}{9-3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{6(2+\sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

b) $\tan(\propto - \beta)$, donde $\propto = 120°$ y $\beta = 45°$.

EJERCICIOS.

Use las identidades de la tangente de la suma y diferencia de dos ángulos para realizar los siguientes ejercicios.

1. Demuestre la identidad $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan \alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

2. Halle $\tan 75^0$ usando la identidad $\tan(\propto - \beta)$.

3. Simplifique:
   a) $\tan(P + Q)$
   b) $\tan(60^0 + 45^0)$
   c) $\tan(60^0 - 45^0)$
   d) $\tan(3\pi/4 + \pi/6)$

4. Encuentre:
   a) $\tan 135^0$
   b) $\tan 210^0$
   c) $\tan 300^0$
   d) $\tan(-75^0)$

Identidades del ángulo doble y el ángulo medio

Analizo las siguientes identidades, sus deducciones y ejemplos. Consigno la teoría en mi cuaderno; no necesito copiar los ejemplos de fácil aplicación.

Identidades del ángulo doble

Las identidades en las que aparecen sen 2θ, cos 2θ ó tan 2θ son llamadas **identidades del ángulo doble**. Para deducir esas identidades se hace uso de las identidades de la suma.

Seno del ángulo doble

$$\begin{aligned}\text{Sen }(2\theta) &= \text{sen }(\theta + \theta)\\ &= \text{sen }\theta \cos\theta + \text{sen }\theta \cos\theta\\ &= 2\text{sen }\theta \cos\theta\end{aligned}$$

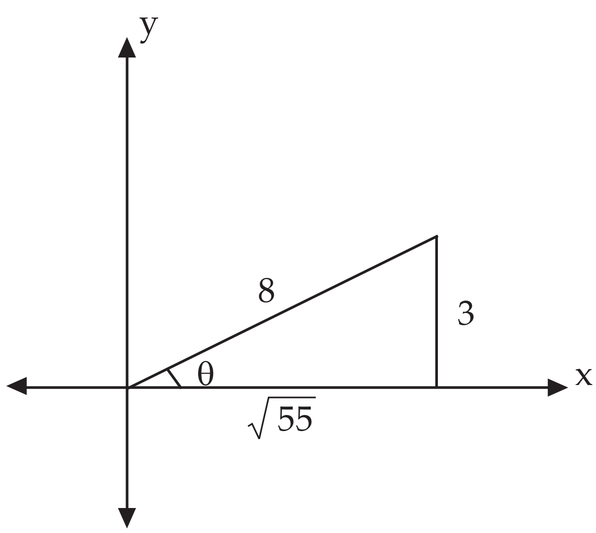
$$\boxed{\text{Sen }(2\theta) = 2\text{sen }\theta \cos\theta}$$

EJEMPLO 7. Si sen θ = 3/8 y θ es un ángulo del primer cuadrante, encuentro sen 2θ.

Del diagrama, deduzco que:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\begin{aligned}\text{Sen }(2\theta) &= 2\text{sen }\theta \cos\theta\\ &= 2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{55}}{8}\\ &= \frac{3\sqrt{55}}{32}\end{aligned}$$



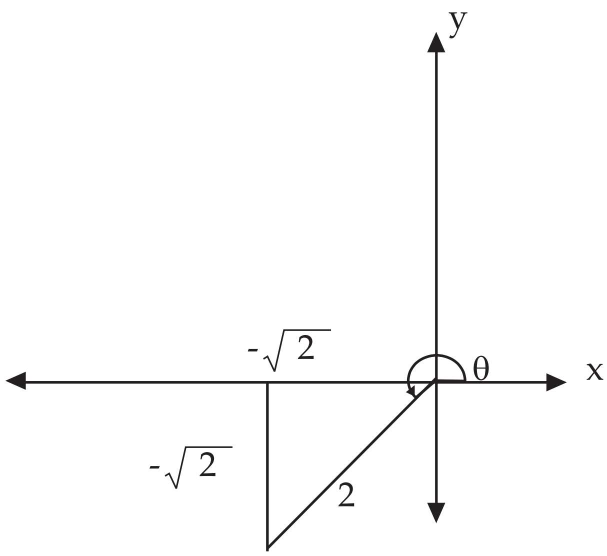
Coseno del ángulo doble

$$\begin{aligned}\text{Cos }(2\theta) &= \cos(\theta + \theta)\\ &= \cos\theta \cos\theta - \text{sen }\theta \text{ sen }\theta\\ &= \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cos}(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}$$

EJEMPLO 8. Si $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y θ es un ángulo del tercer cuadrante, encuentro cos2θ.

De la gráfica, sen $\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\text{Cos}\,(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= 0$$

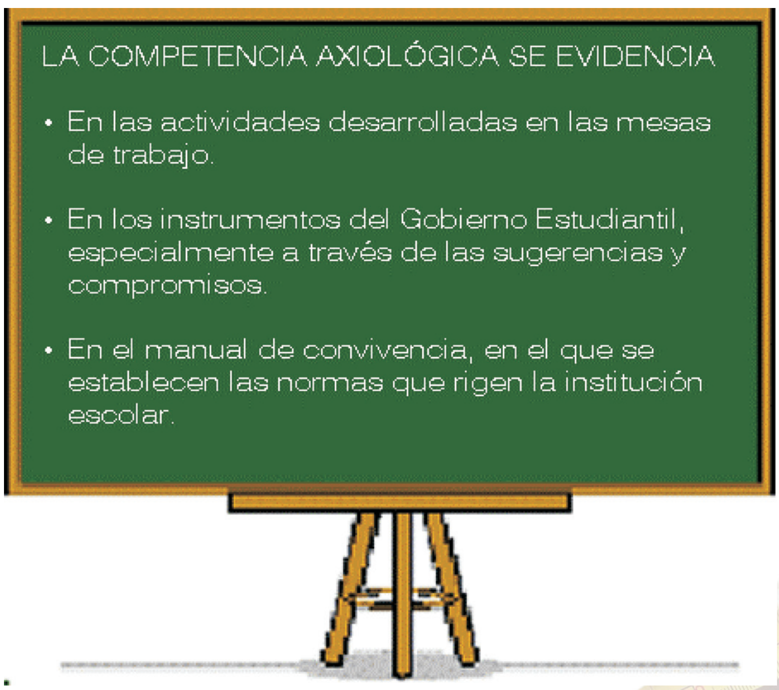
Tangente del ángulo doble

$$\tan(2\theta) = \tan(\theta + \theta)$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\,\tan\theta}$$

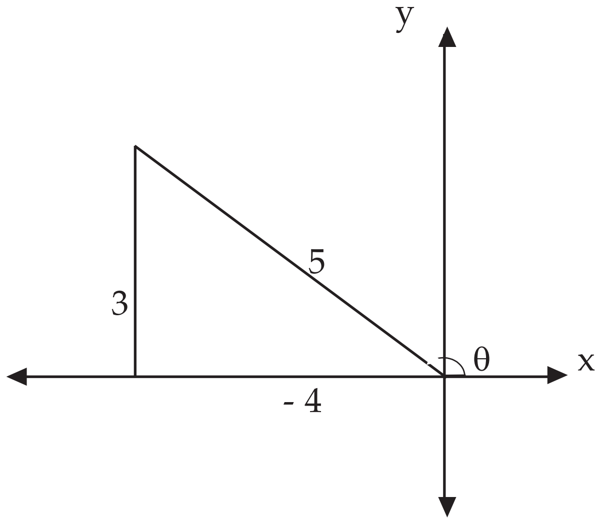
$$= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\boxed{\mathbf{tan2\theta} = \frac{\mathbf{2tan\,\theta}}{\mathbf{1 - tan^2\theta}}}$$



EJEMPLO 9. Si $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ y θ es un ángulo del segundo cuadrante, encuentro $\tan 2\theta$.

De la gráfica, $\tan\theta = -\dfrac{3}{4}$



$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\times -\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$$

$$= -\frac{3\times \cancel{16}^{8}}{\cancel{2}\times 7} = -\frac{24}{7}$$

EJERCICIOS. Use las identidades del ángulo doble para resolver en el cuaderno los siguientes ejercicios.

1. Si $\tan\theta = -3/4$ y θ es un ángulo del segundo cuadrante, encuentre:

   a) $\operatorname{sen} 2\theta$ b) $\cos 2\theta$ c) $\tan 2\theta$

2. Si $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, demuestre la identidades:

   a) $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ b) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

   c) $sen^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ d) $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

   e) $\tan^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

3. Encuentre $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ y el cuadrante en el que 2θ queda.

   a. $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ (θ en el tercer cuadrante)

   b. $sen\theta = \dfrac{5}{13}$ (θ en el segundo cuadrante)

Identidades del ángulo medio

Las identidades en las que aparecen sen $\phi/2$, cos $\phi/2$ ó tan $\phi/2$ son llamadas **identidades del ángulo medio**. Para deducir esas identidades se hace uso de las identidades demostradas en el ejercicio 2 del tema anterior. Consigno en mi cuaderno las demostraciones y el ejemplo 10.

Seno del ángulo medio

$$sen^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$ (Ver demostración del ejercicio 2, c)

Si $2\theta = \phi$, entonces $\theta = \frac{\phi}{2}$. Reemplazando en la anterior.

$$sen^2\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{2}$$

EL JOVEN TOMA DECISIONES BASADAS EN PRINCIPIOS Y VALORES SOCIALES Y PARTICULARES

$$\boxed{\mathbf{sen}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}}$$

Coseno del ángulo medio

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$ (Ver demostración del ejercicio 2, d)

Si $2\theta = \phi$, entonces $\theta = \frac{\phi}{2}$.

$$\cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1+\cos\phi}{2}$$

¿Que beneficios trae la competencia axiológica?

$$\boxed{\mathbf{cos}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}}$$

Tangente del ángulo medio

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$ (Ver demostración del ejercicio 2, e)

Si $2\theta = \phi$, entonces $\theta = \frac{\phi}{2}$.

$$\tan^2\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}$$

$$\boxed{\tan\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}}$$

EL JOVEN ACTÚA Y SE DESEMPEÑA CON AUTODISCIPLINA EN EL MARCO DE LA AUTONOMÍA OTORGADA

El signo $\pm$ de las tres identidades depende del cuadrante en el cual queda al ángulo $\phi/2$.

EJEMPLO 10. Utilizo las identidades del ángulo medio para encontrar el seno de 30°

$$sen30° = sen\frac{60°}{2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

La respuesta es positiva, porque 30^0 está en el primer cuadrante.

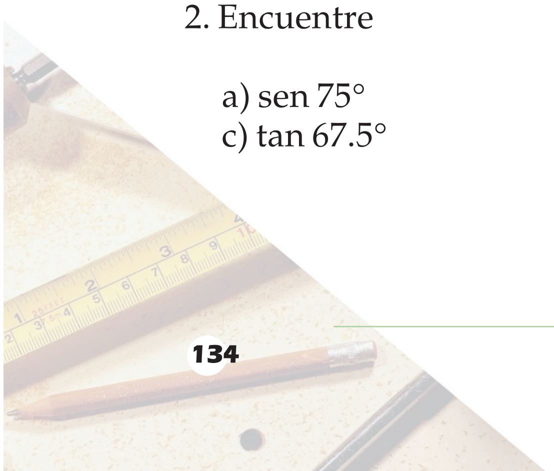
EJERCICIOS. Use las identidades del ángulo medio para resolver en el cuaderno los siguientes ejercicios.

1. Demuestre las identidades:

a) $\tan\frac{\phi}{2} = \frac{sen\phi}{1+\cos\phi}$ b) $\tan\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{sen\phi}$

2. Encuentre

a) sen 75° b) sen $5\pi/8$
c) tan 67.5° d) cos $3\pi/8$



3. Simplifique

a) $1-2sen^2\frac{x}{2}$ b) $2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

c) $2\cos^2\frac{x}{2}-1$ d) $\cos^2\frac{x}{2}-sen^2\frac{x}{2}$

Otras identidades

Las siguientes identidades relacionan un ángulo con su complemento. Analizo cuidadosamente la demostración de sen $(\pi/2 - \theta)$ y los ejemplos y resuelvo los ejercicios propuestos. Consigno en mi cuaderno lo más importante.

sen $(\pi/2 - \theta)$

Aplico la identidad sen $(\propto - \beta)$ = sen $\propto$ cos β - cos $\propto$ sen β donde $\propto = \pi/2, \beta=\theta$
sen $\pi/2 = 1$, cos $\pi/2 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{sen}(\pi/2 - \theta) &= \text{sen}\,\pi/2 \cos\theta - \cos\pi/2\ \text{sen}\,\theta \\ &=1 \cos\theta - 0 \cdot \text{sen}\,\theta \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos\theta}$$

EJEMPLO 11. Deduzco la identidad tan $(\pi/2 - \theta)$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{sen\frac{\pi}{2}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2}sen\theta}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+sen\frac{\pi}{2}sen\theta}$$

$$=\frac{1\cdot\cos\theta-0\cdot sen\theta}{0\cdot\cos\theta+1\cdot sen\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

$$= \cot\theta$$

$$\boxed{\tan(\pi/2 - \theta) = \cot\theta}$$

EJEMPLO 12. Si cos ($\propto$ - β) = cos $\propto$ cosβ + sen $\propto$ sen β demuestre que cos (π/2 –θ) = sen θ.

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2-\theta) &= \cos\pi/2\cos\theta + \text{sen}\,\pi/2\,\text{sen}\,\theta\\ &= 0\cdot\cos\theta + 1\cdot\text{sen}\,\theta\\ &= \text{sen}\,\theta\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\pi/2-\theta) = \text{sen}\,\theta}$$

EJERCICIOS. Use las identidades que necesite para simplificar o demostrar los siguientes ejercicios.

1. Simplifique.

a) $sen\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)\cdot sen\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)$

b) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

c) $sen\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}-sen\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}$

2. Encuentre las fórmulas de las siguientes identidades

a) sen (x - π/2)
b) cos (x + π/2)
c) cos (cos x + cos y)
d) sen (x + y + z)

D

APLICACIONES

«No es el conocimiento lo difícil, sino el ponerlo en práctica» Libro de Chang.

«La manera más breve de hacer muchas cosas, es hacer una cada vez» S. Smiles

Con mis compañeros de subgrupo, analizo y resuelvo los siguientes ejercicios. Consigno el procedimiento en el cuaderno.

1. Aplico las identidades del ángulo doble y de la suma de ángulos para encontrar una fórmula para cos 3θ en términos de las funciones de θ.

2. Encuentre una identidad para cot ($\propto$ + β) en términos de cot $\propto$ y cot β.
3. Encuentre una identidad para cot ($\propto$ - β) en términos de cot $\propto$ y cot β.

4. Demuestre las siguientes identidades

a) sen ($\propto$ + β) sen ($\propto$ - β) = sen$^2 \propto$ - sen^2 β
b) cos ($\propto$+ β) cos ($\propto$ - β) = 2cos $\propto$ cos β

5. Demuestre la siguiente identidad.

$$\frac{sen 2\theta + sen\theta}{\cos 2\theta + \cos\theta + 1} = \tan\theta$$

Una vez resueltos los ejercicios, comparto con mis compañeros las soluciones, unificamos criterios y presentamos el trabajo al profesor para que lo revise.

COMPLEMENTACIÓN

«La genialidad es la capacidad de reducir lo complicado a lo simple» C.W. Ceram

1. Las siguientes ecuaciones se presentan en la teoría de corriente alterna, en electricidad:

$$R = \frac{1}{wC(\tan\theta + \tan\phi)} \quad \text{y} \quad R = \frac{\cos\theta\cos\phi}{wCsen(\theta + \phi)}$$

Demuestre que las dos ecuaciones son equivalentes

2. En electricidad también se presentan las siguientes ecuaciones:

$$E_1 = \sqrt{2}E_t \cos\left(\theta + \frac{\pi}{\rho}\right), \qquad E_2 = \sqrt{2}E_t \cos\left(\theta - \frac{\pi}{\rho}\right),$$

Demuestre que $\dfrac{E_1 + E_2}{2} = \sqrt{2}E_t \cos\theta \cos\dfrac{\pi}{\rho}$ y $\dfrac{E_1 - E_2}{2} = -\sqrt{2}E_t sen\theta\ sen\dfrac{\pi}{\rho}$.

Concluida la guía, evaluemos los desempeños de acuerdo a lo propuesto al iniciarla. El profesor o el presidente del gobierno de aula, establecerá los procedimientos de evaluación.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA