Guía 2

¿QUÉ APLICACIONES TIENEN LOS ÁNGULOS Y LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS?

Indicadores de logros

- ✓ Clasifica ángulos según su medida y los dibuja con ayuda del transportador.
- ✓ Identifica los ángulos complementarios, suplementarios, positivos y negativos, ángulos en posición regular y expresa un ángulo en revoluciones, grados sexagesimales y radianes.
- ✓ Identifica las relaciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo en un triángulo rectángulo.
- ✓ Identifica la información requerida para ampliar sus conocimientos de una situación o problema (GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN).
- ✓ Ubica las distintas fuentes de información disponibles.
- ✓ Recoge organizadamente la información.
- ✓ Analiza la información recolectada.
- ✓ Utiliza la información recolectada para tomar decisiones y emprender acciones.
- ✓ Reconoce la información resultante de la experiencia de otros.
- ✓ Organiza y archiva la información recolectada.

¿QUÉ APLICACIONES TIENEN LOS ÁNGULOS Y LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS?

Antes de saberlo debemos recordar algunos conceptos sobre ángulos.

1. Con mis compañeros de mesa repaso oralmente las características de los siguientes ángulos. Con toda la información recolectada organizo las definiciones y las consigno en el cuaderno.
   a. Agudo
   b. Recto
   c. Obtuso
   d. Complementario
   e. Suplementario
   f. Llano
   g. De una vuelta

2. En mi cuaderno dibujo los ángulos dados. Para facilitar el proceso, ordeno los ángulos de menor a mayor o viceversa.
   a. 53°
   b. 225°
   c. 270°
   d. 135°
   e. 300°
   f. 90°
   g. 180°

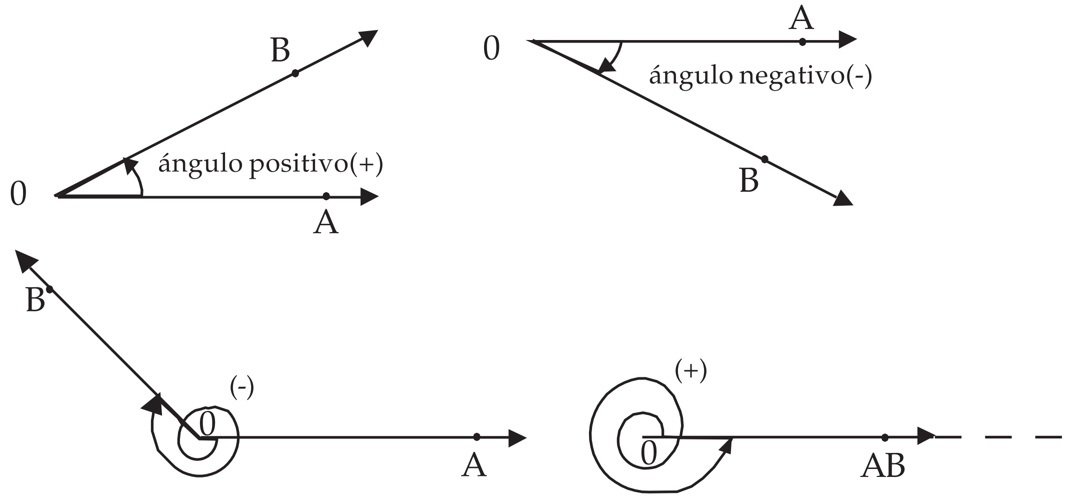
3. En mi cuaderno realizo los siguientes ejercicios. Puedo utilizar las soluciones de mis compañeros para chequear y corregir mis respuestas.
   a. Dibuje dos ángulos complementarios y diga la medida de cada uno.
   b. Dibuje dos ángulos suplementarios tal que uno mida 120°.
   c. Si un ángulo mide 15° 21' 40'', ¿Cuánto mide su complemento?
   d. Si un ángulo mide 140° 17' 51'', ¿Cuánto mide su suplemento?
   e. Si un ángulo mide 25° 10' 40'' ¿Cuánto miden su complemento y suplemento?

FUNDAMENTACIÓN - EJERCITACIÓN

Para ampliar sus conocimientos debe identificar toda la información que aparece a continuación y consignarla en su cuaderno.

Ángulos y medidas de ángulos

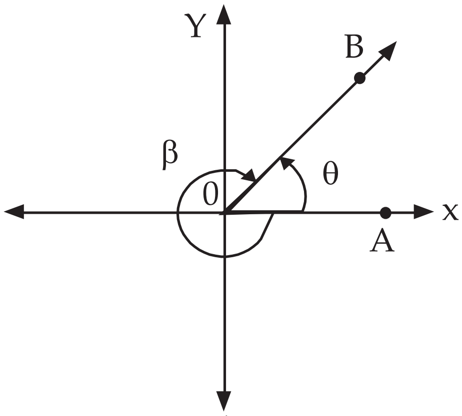
Trazo una semirrecta OA y la hago rotar alrededor de su origen O.

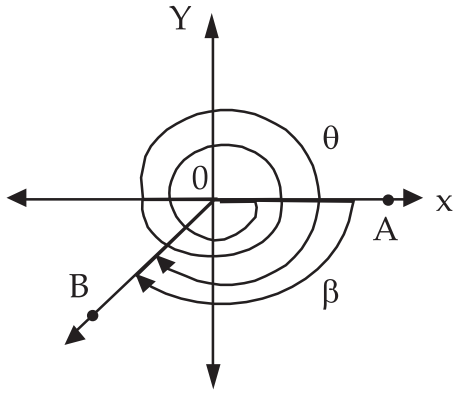


Observo que en cada ejercicio se generó un ángulo de rotación, en los que la semirrecta OA se llama LADO INICIAL del ángulo y la semirrecta OB se llama LADO TERMINAL del ángulo. El punto O de intersección de las rectas es el VÉRTICE.

Si la rotación de OA es contraria a la de las agujas del reloj, el ángulo es POSITIVO (+). Si la rotación coincide con el sentido de giro de las agujas del reloj, el ángulo es NEGATIVO (-).

Decimos que un ángulo está en POSICIÓN REGULAR respecto a un sistema de coordenadas cartesianas, si su vértice coincide con el origen del sistema y su lado inicial coincide con el semieje positivo OX, como se aprecia en las siguientes gráficas.





Es importante observar que existen muchos ángulos diferentes que tienen los mismos lados inicial y terminal. Cada par de estos ángulos se llaman ÁNGULOS COTERMINALES. En la primera gráficaθ(ángulo positivo) es COTERMINAL con β (ángulo negativo); ambos están en POSICIÓN REGULAR. Si la medida de θ es 40°, la medida de β es - 320^0. ¿Qué conclusiones puede sacar de la segunda gráfica?

GRADO SEXAGESIMAL

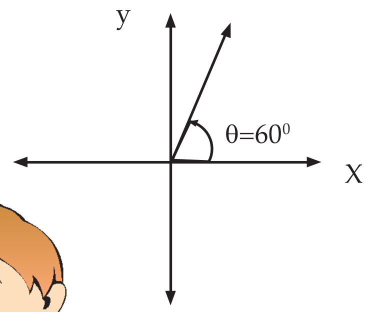
Recuerde que un ángulo de un grado es, por definición, la medida del ángulo formado por $\frac{1}{360}$ de una revolución completa, lo que equivale a decir que una revolución completa mide 360^0, media mide 180^0 y un cuarto 90^0.

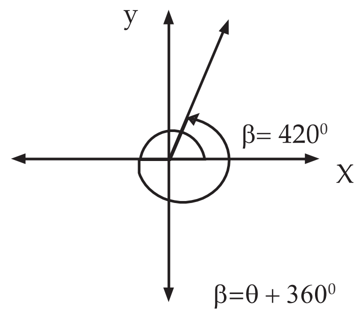
Para efectuar medidas más precisas se emplean los submúltiplos del grado que son el minuto (‘) y el segundo (‘’) sexagesimales, definidos así: $1^0 = 60'$ y $1' = 60''$.

A continuación se presentan 2 ejemplos con 10 ejercicios que deben ser analizados cuidadosamente para resolver los 3 ejercicios propuestos correspondientes al ejemplo 1 y los 6 correspondientes al ejemplo 2, los cuales deben ser consignados en el cuaderno. <u>Los ejemplos planteados son el resultado de las experiencias de otros</u>, que debemos aprovechar al máximo.

EJEMPLO 1. Trace el ángulo θ en posición regular y encuentre la medida de dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

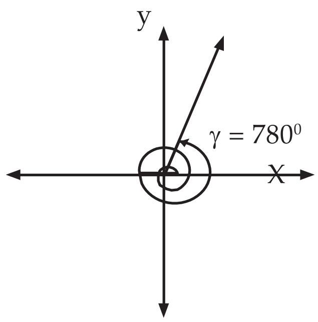
a) $\theta = 60^0$

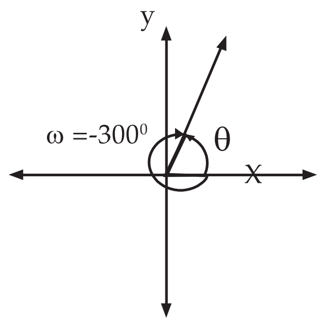


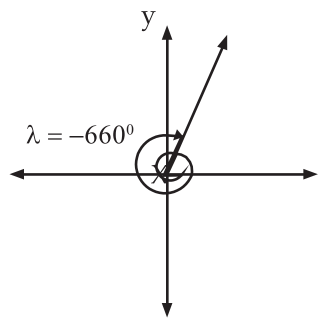


$\beta = \theta + 360^0$

$\beta = 60^0 + 360^0 = 420^0$







$\gamma = \theta + 2(360^0)$

$\gamma = 60^0 + 720^0$

$\gamma = -\ 780^0$

$\omega = \theta - 1(360^0)$

$\omega = 60^0 - 360^0$

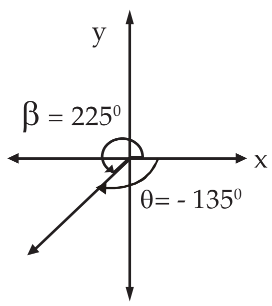
$\omega = -300^0$

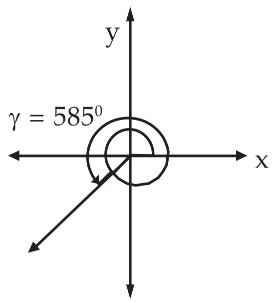
$\lambda = \theta - 2(360^0)$

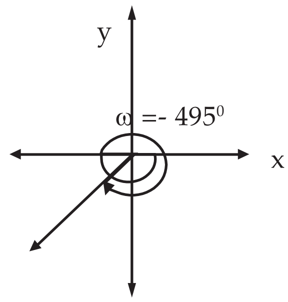
$\lambda = 60^0 - 720^0$

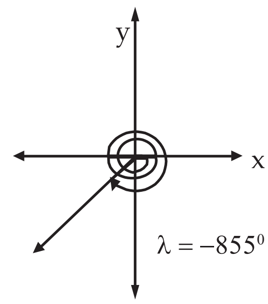
$\lambda = -660^0$

b) $\theta = -\ 135^0$









$\beta = \theta + 360^0$

$\beta = -\ 135^0 + 360^0$

$\beta = 225^0$

$\gamma = \theta + 2(360^0)$

$\gamma = -\ 135^0 + 720^0$

$\gamma = 585^0$

$\omega = \theta - 1(360^0)$

$\omega = -135^0 - 360^0$

$\omega = -\ 495^0$

$\lambda = \theta - 2(360^0)$

$\lambda = -\ 135^0 - 720^0$

$\lambda = -\ 855^0$

Analizando esta información se puede concluir que para encontrar un ángulo coterminal con el ángulo (θ) se aplica la siguiente fórmula. $F(n) = \theta + n360°$. Esto es, las medidas de todos los ángulos colaterales con θ pueden ser expresadas como una función del número de rotaciones completas «n» del lado terminal. Si la rotación es en el sentido de las agujas del reloj «n» es negativa, en caso contrario, «n» es positiva.

EJERCICIOS. Trace el ángulo en posición regular y encuentre la medida de un ángulo positivo y uno negativo que sean coterminales con el ángulo dado.

a) $\theta = 30°$ b) $\theta = 150°$ c) $\theta = -225°$

EJEMPLO 2. a) El valor en grados de un ángulo generado por $\frac{3}{4}$ de revolución es:

$$\frac{3}{4}\text{Rev} = \frac{3}{4}(360^0) = 270^0$$

b) Un ángulo que mide 120°. ¿Qué valor tiene en Revoluciones?

$$\text{Si } 1^0 = \frac{\text{Rev}}{360}, \quad \text{entonces} \quad 120^0 = \frac{120\text{ Rev}}{360} = \frac{1}{3}\text{ Rev}$$

EJERCICIOS

1. Hallar el valor en grados de un ángulo generado por la fracción de revolución dada:

a) $\frac{1}{2}$Rev. b) $\frac{5}{2}$ Rev. c) $\frac{3}{8}$ Rev.

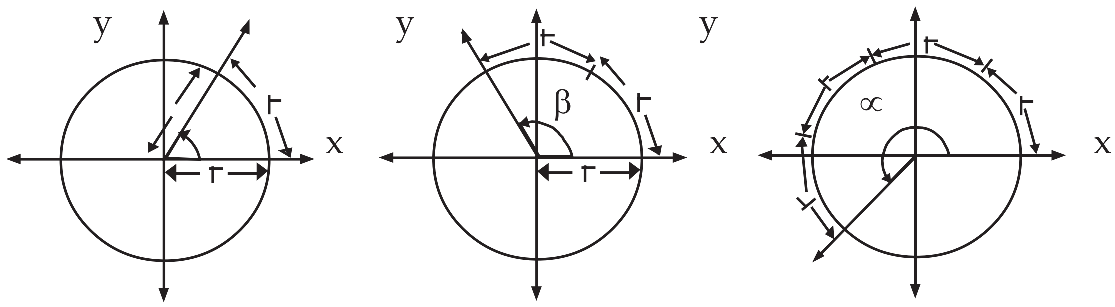
2. Hallar el valor en revoluciones del ángulo dado:

a) 90^0 b) 315^0 c) 450^0

Continúo analizando la información para enfrentar los ejercicios que debo resolver más adelante, basado en los ejemplos que debo identificar de acuerdo al tema.

RADIÁN

El RADIÁN se define como la medida del ángulo central, subtendido por un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.



$\theta = 1$ radián $\qquad \beta = 2$ radianes $\qquad \propto = 4$ radianes

Para saber cuántos radianes hay en una circunferencia de longitud $C = 2\pi r$, basta con hallar cuantos radios caben en C:

$\dfrac{2\pi\, r}{r} = 2\,\pi$ radianes, por lo tanto $\qquad 360^0 = 2\pi$ radianes, ó
$180^0 = \pi$ radianes

Con la igualdad anterior se puede obtener la medida en radianes de cualquier ángulo conociendo su medida en grados sexagesimales y viceversa.

$180^0 = \pi$ radianes

$1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ radianes ≈ 0.01745 radianes $(\pi = 3.14159)$

π rad $= 180^0$, por lo tanto 1 rad $= \dfrac{180^0}{\pi} \approx 57.2958^0$

EJEMPLO 3. Encuentre la medida en radianes de los ángulos dados:

a) $\theta = 120^0$

$$120^0 = 120 \text{ x} 1^0 = 120 \text{ x} \frac{\pi}{180} \text{ radianes} = \frac{120\,\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

b) $\theta = -\,315^0$

$$-315^0 = -315 \text{ x} 1^0 = -315 \text{ x} \frac{\pi}{180} \text{ radianes} = \frac{-315\pi}{180} = -\frac{7}{4}\pi$$

EJEMPLO 4. Encuentre la medida en grados de los ángulos dados.

a) $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ x 1rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ x } \frac{180^0}{\pi} = \frac{900^0}{6} = 150^0 \quad \left(1\text{rad} = \frac{180^0}{\pi}\right)$$

b) $\theta = \dfrac{7\pi}{12}$

$$\frac{7\pi}{12} \text{ rad} = \frac{7\pi}{12} \times 1 \text{ rad} = \frac{7\pi}{12} \times \frac{180^0}{\pi} = \frac{1260^0}{12} = 105^0$$

EJERCICIOS.

Después de analizar bien los ejemplos 3 y 4 resuelvo los ejercicios propuestos y los consigno en el cuaderno.

1. Encuentro la medida en radianes de los ángulos dados.

a) 72^0	b) 420^0	c) 510^0
d) -135^0	e) -450^0	f) -990^0

2. Encuentro la medida en grados de los ángulos dados en radianes.

a) $\dfrac{9\pi}{4}$	b) -3π	c) $\dfrac{4\pi}{3}$
d) $+\dfrac{5\pi}{2}$	e) $-\dfrac{7\pi}{6}$	f) $\dfrac{11\pi}{18}$

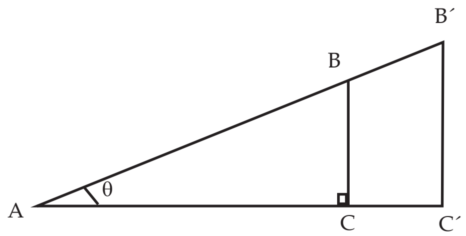
3. Organizo una tabla para establecer las equivalencias entre grados y radianes para ángulos de 15^0 en 15^0; desde 15^0 hasta 360^0.

4. Escribo una regla para convertir grados a radianes. Doy un ejemplo.
5. Escribo una regla para convertir radianes a grados. Doy un ejemplo.

SE NECESITA UNA PERSONA CAPAZ DE ORGANIZAR Y ARCHIVAR LA INFORMACIÓN RECOLECTADA, UTILIZANDO LOS RECURSOS MÁS APROPIADOS.

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Llegamos a las relaciones trigonométricas que son la columna vertebral de la trigonometría. Ubico las distintas fuentes de información para ampliar los conocimientos, pueden ser textos de grado 10°, calculadoras, el computador y el Internet. Sigo analizando la información con los ejemplos y la consigno en mi cuaderno. Finalmente, resuelvo los 10 ejercicios propuestos.

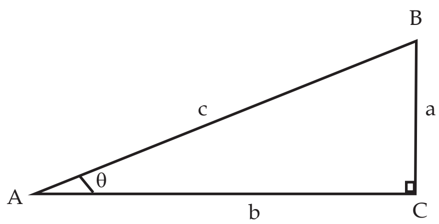


Consideremos los triángulos rectángulos ABC y AB′C′, que son semejantes por tener la medida de los ángulos respectivamente iguales. Por lo tanto se cumple:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

La proporción anterior muestra que la relación entre la medida del lado opuesto al ángulo θ y la de la hipotenusa depende solamente de la medida del ángulo y no de la medida de los lados del triángulo.

Esta relación constante se llama SENO DEL ÁNGULO θ. Existen otras cinco relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo llamadas: COSENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE.



En el triángulo rectángulo ABC:
a = longitud del cateto opuesto al ángulo A
b = longitud del cateto adyacente al ángulo A
c = longitud de la hipotenusa.
θ= Letra griega (theta) usada para denotar la medida del ángulo A.

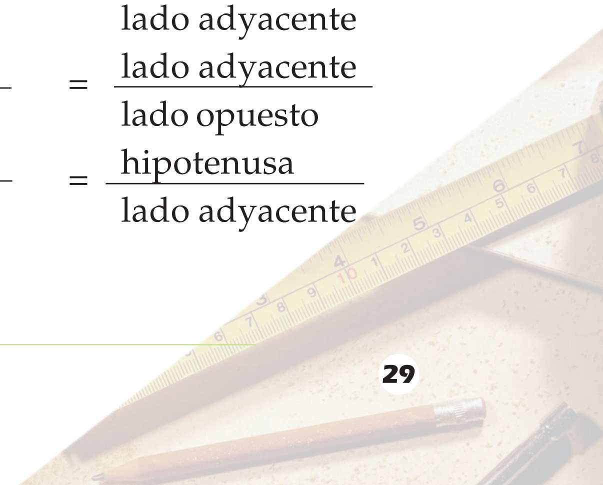
SENO DE θ : $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

COSENO DE θ : $\cos\theta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

TANGENTE DE θ : $\tan\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$

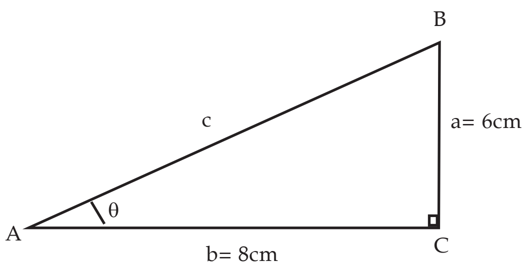
COTANGENTE DE θ : $\cot\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}}$

SECANTE DE θ : $\sec\theta = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$



COSECANTE DE θ : $\csc\theta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}$

EJEMPLO 1. Encuentre las seis relaciones trigonométricas de ángulo θ.



Con respecto al ángulo A, BC es el lado opuesto y AC es el lado adyacente.

Para hallar el valor de c (AB) se aplica el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 6^2 + 8^2$
$c^2 = 36 + 64$

$c = \sqrt{100} = 10$ cm; AB = 10 cm

$$\text{sen}\theta : \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB} = \frac{6\text{ cm}}{10\text{cm}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta : \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB} = \frac{8\text{cm}}{10\text{cm}} = \frac{4}{5}$$

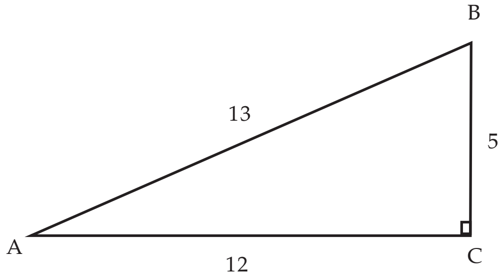
$$\tan\theta : \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{BC}{AC} = \frac{6\text{cm}}{8\text{cm}} = \frac{3}{4}$$

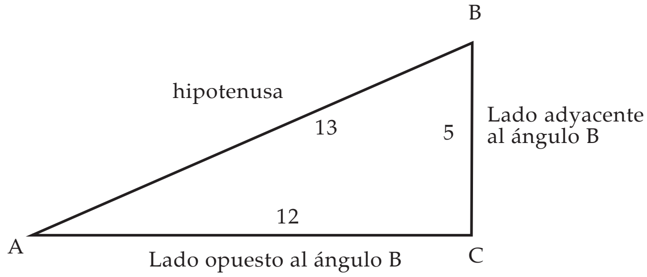
$$\cot\theta : \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8\text{cm}}{6\text{cm}} = \frac{4}{3}$$

$$\sec\theta : \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}} = \frac{AB}{AC} = \frac{10\text{cm}}{8\text{cm}} = \frac{5}{4}$$

$$\csc\theta : \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}} = \frac{AB}{BC} = \frac{10\text{cm}}{6\text{cm}} = \frac{5}{3}$$

EJEMPLO 2. Use la figura para escribir las 6 relaciones trigonométricas del ángulo B.





Con respecto al ángulo B, BC es el lado adyacente y AC es el lado opuesto.

$$\text{sen } B = \frac{12}{13} \qquad \csc B = \frac{13}{12}$$

$$\cos B = \frac{5}{12} \qquad \sec B = \frac{13}{5}$$

$$\tan B = \frac{12}{5} \qquad \cot B = \frac{5}{12}$$

Observe que los seis valores están escritos tales que, en cada fila el par de valores son RECÍPROCOS; seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente. Se puede concluir:

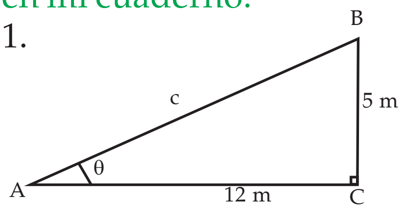
1. $\text{sen } \theta = \dfrac{1}{\csc \theta} \qquad \csc B = \dfrac{1}{\text{sen } \theta}$

2. $\cos \theta = \dfrac{1}{\sec \theta} \qquad \sec B = \dfrac{1}{\cos \theta}$

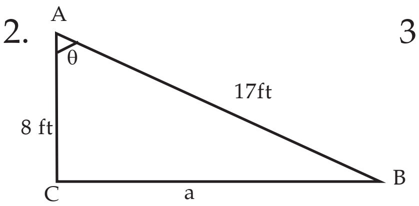
3. $\tan \theta = \dfrac{1}{\cot \theta} \qquad \cot B = \dfrac{1}{\tan \theta}$

EJERCICIOS. Encuentro las seis relaciones trigonométricas de θ. Los consigno en mi cuaderno.

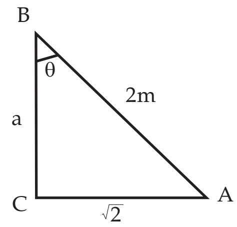
1.



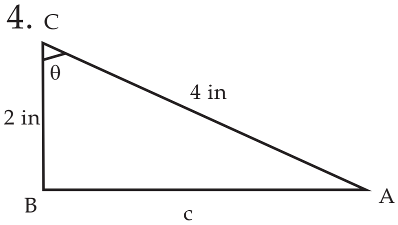
2.



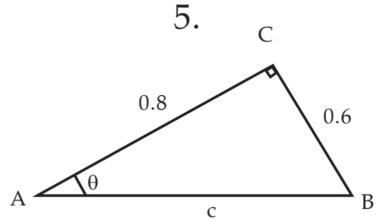
3.



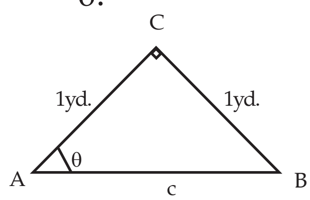
4.



5.



6.



Dos lados del triángulo rectángulo ABC están dados, en el cual el<C es el ángulo recto. Encuentro las seis relaciones trigonométricas del ángulo A. Trazo el triángulo apropiado en cada ejercicio.

7. $a = 4;\ b = 10$

8. $a = 20;\ c = 29$

9. $b = 4;\ c = 7$

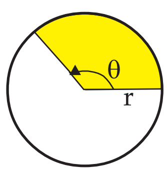
10. $a = \dfrac{1}{3};\ b = \dfrac{1}{4}$

D APLICACIÓN

Con un compañero, analizo la información o el ejemplo correspondiente a los ejercicios propuestos; resuelvo los ejercicios y escojo el que más me guste para explicarlo en la próxima actividad de conjunto.

La medida angular en radianes se usa para hallar el área del sector circular.

En la figura, el área de la parte coloreada depende del ángulo central θ. Esto es, $A = k\theta$. Para encontrar la constante k, consideremos el caso especial donde $\theta = 2\pi$



$$A = k\theta$$
$$\pi r^2 = k2\pi$$
$$k = \frac{1}{2}r^2$$

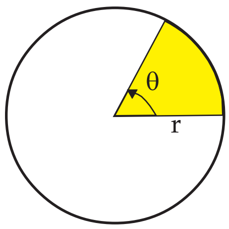
Por lo tanto el área de un sector circular con un radio r y un ángulo central θ está dado por:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

EJERCICIOS. Encuentro el área de los sectores circulares de radio y ángulo central dados. No olvido convertir primero grados a radianes.

a) $\theta = 60^0$	$r = 5$ cm.
b) $\theta = 45^0$	$r = 10$ cm.
c) $\theta = 240^0$	$r = 3$ ft.
d) $\theta = 330^0$	$r = 2$ m.
e) $\theta = 270^0$	$r = 4.5$ dm.
f) $\theta = 135^0$	$r = \sqrt{7}$ cm.

Observe como se resuelve el ejercicio a).



$$A = \frac{1}{2} r^2\theta \qquad r = 5 \text{ cm.},\ \theta = 60^0.$$

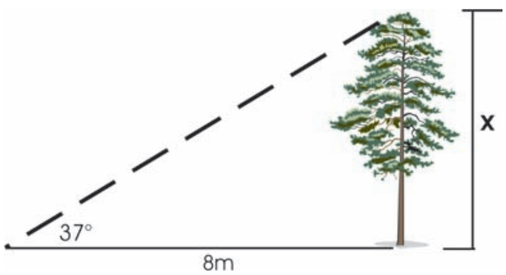
Primero se convierte 60^0 a radianes.

$$60^0 = 60x\ 1^0 = 60 \text{ x } \frac{\pi}{180} \text{ radianes } = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2\theta = \frac{1}{2}(5cm)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{25\pi}{6} cm^2 = \frac{25(3.14)}{6} \approx 13cm^2.$$

Las relaciones trigonométricas también se pueden aplicar en situaciones de la vida real.

EJEMPLO. Hallar la altura de un árbol con los datos de la gráfica.



$$\tan 37^0 = \frac{x}{8}$$

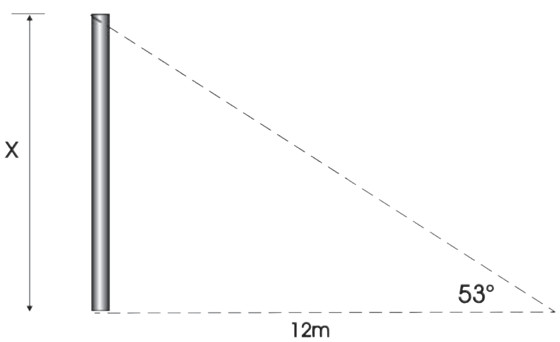
$x = 8 \text{ x } \tan 37^0$ (37 $\boxed{\text{tan}}$)

$x = 0.75 \text{ x } 8m$

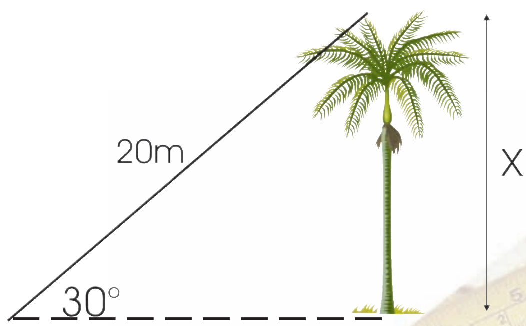
$x = 6m$

EJERCICIOS:

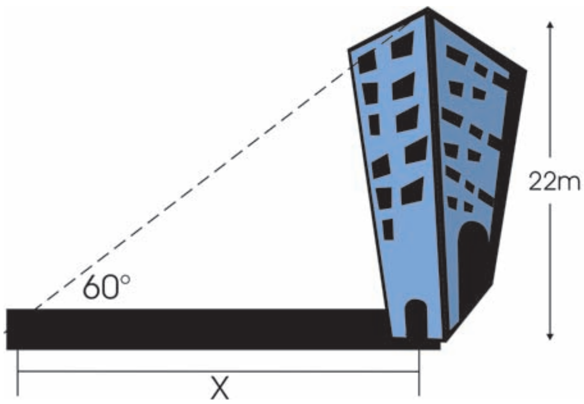
1) Hallo la altura del poste



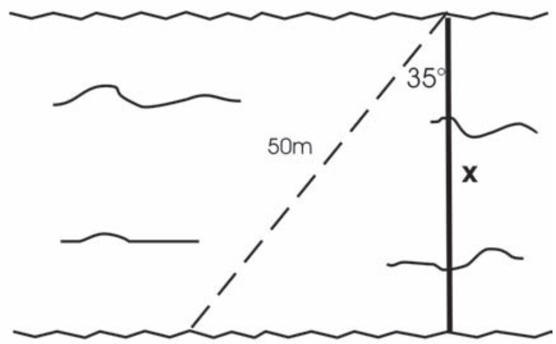
2) Hallo la altura de la palma



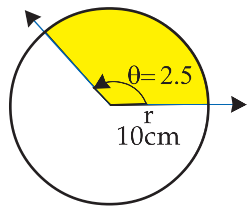
3) Hallo la longitud de la sombra del edificio



4) Hallo el ancho del río



EJEMPLO: Hallar la longitud del arco interceptado por un ángulo central de 2.5 radianes en una circunferencia de 10 cm.



Recordemos que la medida en radianes de un ángulo central θ puede ser encontrado dividiendo la longitud «s» del arco interceptado por el ángulo central θ por el radio «r» del círculo.

$\theta = \frac{s}{r}$, por lo tanto $s = r\theta$

$s = r \cdot \theta$

$s = (10 \text{ cm.})(2.5)$

$s = 25$ cm.

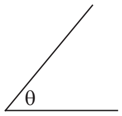
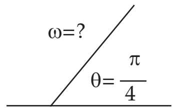
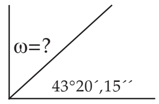
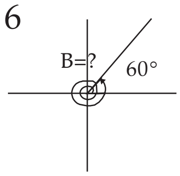
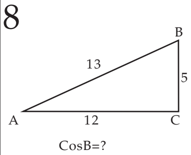
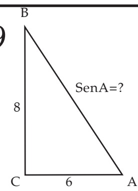
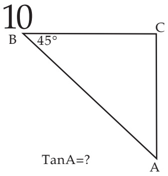
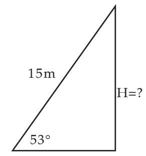
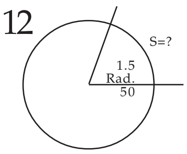
El arco tiene una longitud de 25 cm.

EJERCICIOS:

Hallo la longitud del arco interceptado por el ángulo central "θ" en la circunferencia de radio "r"

a) $\theta = 6.2$ rad $r = 27$cm.
b) $\theta = 15.6$ rad $r = 40$cm.
c) $\theta = 8.7$ rad $r = 95$cm.
d) $\theta = 4.9$ rad $r = 58$ cm.
e) $\theta = 3.4$ rad $r = 400$cm.
f) $\theta = 180°$ $r = 20$ cm.

Practico con el juego «PIÉNSALO». Recojo organizadamente la información para resolver el siguiente ejercicio. Lo presento al profesor.

1 	2 ÁNGULO LLANO	3 	4 $-315°$	5 	6 
7 $-\frac{5\pi}{3}$	8 	9 	10 	11 	12 

A $\frac{5}{13}$	B 75	C 1	D -300°	E 12	F $46^0\,39´45´´$
G 780^0	H 180^0	I $-\frac{7\pi}{4}$	J ÁNGULO AGUDO	K $\frac{3\pi}{4}$	L $\frac{4}{5}$

¿DESEA APRENDER MÁS?

Para ampliar los temas vistos, ubique distintas fuentes de información y aproveche la que esté más disponible. Aquí tiene dos opciones, usted puede buscar otras.

1. Consulte ALGEBRA AND TRIGONOMETRY, Max A. Sobel and Norbert Lerner, Prentice Hall y resuelva los ejercicios de las páginas 354 al 357.

2. Consulte por Internet el sitio http://www.awl.com/deman el tema que desea ampliar.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA