UNIDAD 2

¿QUÉ IMPORTANCIA TIENEN LAS IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS ESTUDIANTES?

LOGROS

- ✓ Identifica las relaciones trigonométricas que son identidades y las verifica.
- ✓ Demuestra algebraicamente identidades de suma, resta, ángulo doble, ángulo medio, producto y factor.
- ✓ Resuelve ecuaciones trigonométricas haciendo uso de procesos algebraicos sencillos.
- ✓ Evalúa y compara sus procesos con otros similares, para innovar y mejorar (REFERENCIACIÓN COMPETITIVA).
- ✓ Actúa con base en principios y valores sociales y consensuados en los grupos donde interactúa (COMPETENCIA AXIOLÓGICA).
- ✓ Dinamiza procesos con métodos y enfoques innovadores (CREATIVIDAD).

Guía 1

¿ES POSIBLE QUE DOS COSAS DIFERENTES SEAN IDÉNTICAS?

Indicadores de logros

- ✓ Aplica las definiciones de las funciones trigonométricas para identificar las identidades fundamentales.
- ✓ Aplica las identidades fundamentales en la verificación de cualquier identidad.
- ✓ Analiza instrumentos de evaluación, comparación y analiza datos para tomar decisiones (REFERENCIACIÓN COMPETITIVA).
- ✓ Formula indicadores que permitan medir el desempeño de sus acciones.
- ✓ Reconoce las etapas del ciclo gerencial básico (PHVA).
- ✓ Reconoce procesos exitosos de otros.
- ✓ Identifica las debilidades de sus procesos y los compara con los de otros.
- ✓ Aprende y aplica en forma continua las mejores prácticas desarrolladas por otros.
- ✓ Asume una posición positiva al cambio, que permite ajustar sus prácticas habituales.

¿ES POSIBLE QUE DOS COSAS DIFERENTES SEAN IDÉNTICAS?

En esta guía, además de las competencias académicas, se desarrollará la competencia laboral REFERENCIACIÓN COMPETITIVA.

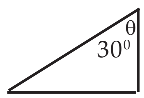
Con mis compañeros de subgrupo, analizamos los conceptos básicos. La **Referenciación Competitiva** es el proceso de compararse y evaluarse continuamente con otros, para lograr identificar los mecanismos, procedimientos y prácticas que ayuden a tomar acciones para mejorar los desempeños. Es una actividad de aprendizaje continuo y se adelanta a través de las etapas del ciclo gerencial básico: **Planear, Ejecutar, Verificar y Actuar.**

Solicitamos al profesor que nos aclare esta competencia con algunos ejemplos y redactamos dos conclusiones.

Un buen recolector de café aprende y aplica en forma continua las mejores prácticas desarrolladas por otros.

Con mis compañeros de subgrupo, resuelvo los siguientes ejercicios para identificar mis fortalezas y debilidades con respecto a mis presaberes.

1. Tomo un juego de PIÉNSALO y con un compañero pruebo mis conocimientos.

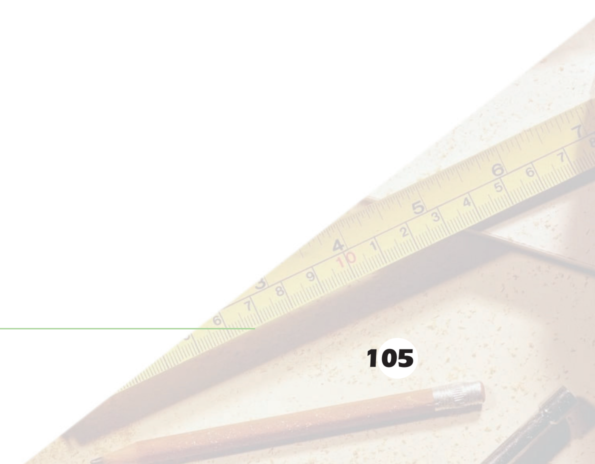
1 $\frac{y}{r}$	2 $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$	3 $\frac{y}{x}$	4 r^2	5 $\frac{1}{\cos^2\theta}$	6 $\frac{x}{y}$
7 $\frac{r}{x}$	8 	9 $\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$	10 $\frac{x}{r}$	11 $\frac{1}{\tan^2\theta}$	12 $\frac{r}{y}$

A $\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$	B $\cot\theta$	C $\tan^2\theta$	D $\sec^2\theta$	E $\cos\theta$	F x^2+y^2
G $\csc^2\theta$	H $\csc\theta$	I $\cot^2\theta$	J $\tan\theta$	K $\operatorname{sen}\theta$	L $\sec\theta$

Para el ejercicio 2, tengo en cuenta el siguiente ejemplo:

EJEMPLO. Demuestro que $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ (1)

Por definición: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ (2)



Reemplazo (2) en (1)

$$\frac{1}{\frac{x}{r}} = \sec\theta$$

$$\frac{r}{x} = \sec\theta \quad \left(\frac{r}{x} \text{ es la definición de Secante).} \right.$$

2. Demuestro en mi cuaderno, aplicando las definiciones:

a. $\dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

b. $\dfrac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} = \cot \theta$

c. $\dfrac{1}{\text{sen } \theta} = \csc \theta$

d. $\dfrac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$

Comparto y comparo los resultados de los ejercicios con algunos de mis compañeros e identifico las causas de mis aciertos y dificultades en los procesos. Formulo un plan que permita mejorar mis prácticas de estudio.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Analizo la siguiente información y consigno en mi cuaderno la teoría, los ejemplos más significativos y los ejercicios propuestos.

Una IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA es una relación de igualdad que existe entre expresiones trigonométricas que se cumple para cualquier valor de la variable, excepto para aquellos valores para los cuales las expresiones no están definidas.

Es el caso de la identidad $\mathbf{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$ que se conoce con el nombre de RELACIÓN BÁSICA DE LA TRIGONOMETRÍA y se cumple para cualquier valor de θ.

EJEMPLO 1.

a) Si $\theta = 30^0$, compruebo que $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

$$sen30° = \frac{1}{2}; \qquad sen^2 30° = \frac{1}{4}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos^2 30° = \frac{3}{4}$$

$$sen^2 30° + \cos^2 30° = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\mathbf{sen^2\ 30° + cos^2\ 30° = 1}$$

b) Si $\theta = 225^{0\circ}$, compruebo que $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

$$sen225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad sen^2 225° = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos^2 225° = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

También se cumple que: $\mathbf{sen^2 225^0 + cos^2 225^0 = 1}$

c) Si $\theta = 485°$, compruebo que la relación básica se cumple.

$$sen\ 485° = 0.81915; \qquad sen^2 485° = 0.67101$$

$$\cos 485° = -0.57358 \qquad \cos^2 485° = 0.32899$$

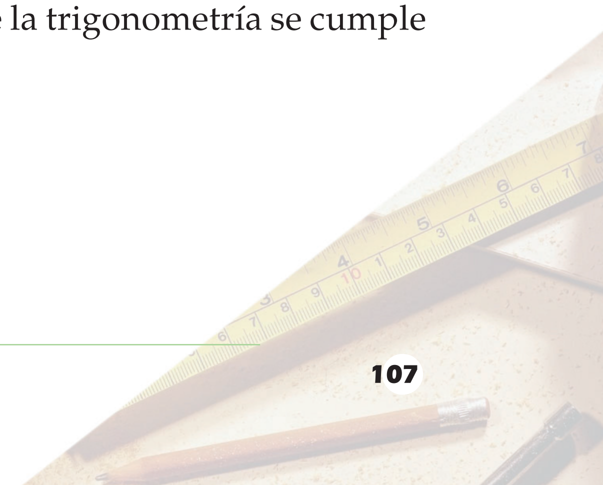
$$sen^2 485° + \cos^2 485° = 0.67101 + 0.32899 = 1$$

Nuevamente se cumple que: $\mathbf{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$

EJERCICIOS. Compruebe que la relación básica de la trigonometría se cumple para los siguientes valores de ángulos:

a) 60°   b) 90°   c) 135°

d) 200°   e) 500°   f) - 80°



EJEMPLO 2. Demuestro que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$. (1)

Si $sen\theta = \dfrac{y}{r}$,entonces $sen^2\theta = \dfrac{y^2}{r^2}$ (2)

Si $cos\theta = \dfrac{x}{r}$,entonces $cos^2\theta = \dfrac{x^2}{r^2}$ (3)

Reemplazo (2) y (3) en (1):

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{y^2 + x^2}{r^2} = 1 \quad ó \quad \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1 \qquad (4)$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$ (5)

Reemplazo (5) en (4): $\dfrac{r^2}{r^2} = 1$ ó sea **1 = 1**

EJERCICIOS: Aplique las definiciones para demostrar que las siguientes relaciones también son IDENTIDADES.

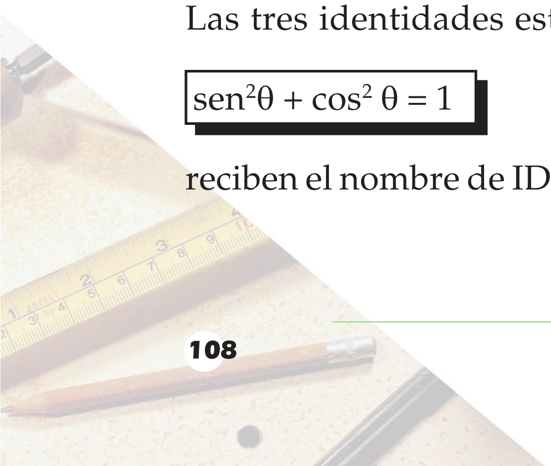
1. $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$

2. $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

Las tres identidades estudiadas hasta ahora:

$\boxed{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$ $\boxed{tan^2\theta + 1 = sec^2\theta}$ $\boxed{1 + cot^2\theta = csc^2\theta}$

reciben el nombre de IDENTIDADES PITAGÓRICAS.



En la Guía No. 3 de la Unidad 1 se determinaba el valor de las 6 funciones conociendo la abscisa, la ordenada o ambas y aplicando el teorema de Pitágoras o círculo trigonométrico. **Aquí podemos ubicar otro proceso exitoso, utilizando las identidades.**

Analizo el siguiente ejemplo y lo comparo con el EJEMPLO 6 de la Guía No. 3 de la Unidad 1. Lo consigno en mi cuaderno y **establezco las diferencias entre ambos procesos.**

EJEMPLO 3. Si sen θ = - 3/5 y θ es un ángulo del IV cuadrante, determino el valor de las otras cinco funciones.

Si $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, entonces $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$

Como $\cos\theta > 0$ en el cuadrante IV, entonces escojo la solución positiva:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{sen\theta} = -\frac{4}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

EJERCICIOS: Resuelva en el cuaderno los siguientes ejercicios:

1. Si csc θ = 3, y θ es un ángulo en el cuadrante IV, encontrar las otras cinco funciones.
2. Si $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y θ es un ángulo del II cuadrante, encontrar las otras 5 funciones.
3. Si $\csc\beta = -\frac{17}{15}$ y tan β > 0, encontrar las otras cinco funciones.

Las **identidades pitagóricas** hacen parte de las llamadas IDENTIDADES FUNDAMENTALES. La lista siguiente la consigno en mi cuaderno:

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}; \qquad \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}; \qquad \text{sen}\theta \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}; \qquad \text{sen}\theta \neq 0$$

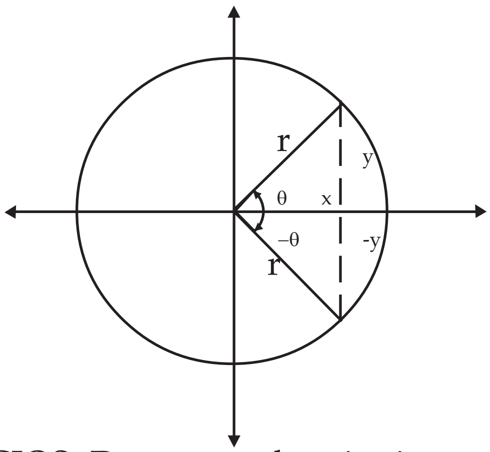
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \qquad \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}; \qquad \tan\theta \neq 0$$

sen (- θ) = - sen θ
cos (- θ) = cos θ
tan (- θ) = - tan θ

Una **fortaleza** de las identidades trigonométricas es que podemos transformar expresiones que contienen funciones trigonométricas en otras formas equivalentes, que hacen que ciertas operaciones puedan efectuarse con mayor facilidad.

EJEMPLO 4. Verifico que sen (- θ) = - sen θ



$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{-y}{r} =$$

$$-\left(\frac{y}{r}\right) =$$

$$-\ \text{sen}\,\theta\ =$$

EJERCICIOS: Demuestre las siguientes identidades.

1. cos (- θ) = cos θ

2. tan (- θ) = - tan θ

Todas las **identidades fundamentales** se demostraron aplicando las definiciones de las funciones trigonométricas.

Para demostrar cualquier identidad se seguirán utilizando las identidades fundamentales.

Como una identidad tiene muchas formas de verificación, puedo **plantear acciones de innovación y mejoramiento** para demostrar cualquier identidad por un método nuevo y rápido.

Consigno en mi cuaderno las siguientes recomendaciones, analizo bien los ejemplos y resuelvo los ejercicios.

Para verificar una identidad A = B, puede utilizar cualquiera de los siguientes procedimientos:

a) Transformar A en B
b) Transformar B en A
c) Transformar A en C y B en C.

Las siguientes sugerencias pueden ser útiles en la verificación de identidades trigonométricas:

1. Memorizar las identidades fundamentales.
2. Escoger el lado más complicado para ser transformado.
3. Cualquier función puede ser escrita en términos de otra. En particular, todas pueden escribirse en términos de seno y coseno.
4. Emplear artificios algebraicos.
5. Factorizar y simplificar adecuadamente.

EJEMPLO 5. Verifico la siguiente identidad, por cuatro métodos diferentes. Consigno en el cuaderno la mejor solución.

LA REFERENCIACIÓN COMPETITIVA AYUDA A APRENDER Y ADAPTAR LAS MEJORES PRÁCTICAS A LA INSTITUCIÓN Y A MEJORAR EL DESEMPEÑO DE LA MISMA.

a) $$\frac{1}{\cos^2 A} - 1 = \tan^2 A$$

$$\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{1} =$$

$$\frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A} =$$

$$\frac{sen^2 A + \cos^2 A - \cos^2 A}{\cos^2 A} = \qquad (1 = sen^2\ A + \cos^2\ A)$$

$$\frac{sen^2 A}{\cos^2 A} =$$

$$\tan^2 A = \qquad \left(\text{Si } \tan A = \frac{senA}{\cos A},\ \text{entonces } \frac{sen^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A\right)$$

El método utilizado fue transformar A en B.

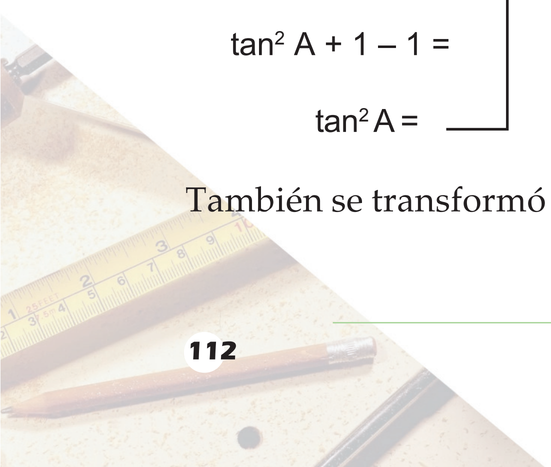
b) $$\frac{1}{\cos^2 A} - 1 = \tan^2 A$$

$$\sec^2 A - 1 = \qquad \left(\text{Si } \frac{1}{\cos A} = \sec A,\ \text{entonces } \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A\right)$$

$$\tan^2 A + 1 - 1 = \qquad (\sec^2 A = \tan^2 A + 1)$$

$$\tan^2 A =$$

También se transformó A en B.



c) $\dfrac{1}{\cos^2 A} - 1 = \tan^2 A$

$= \sec^2 A - 1 \qquad (\tan^2 A + 1 = \sec^2 A)$

$= \dfrac{1}{\cos^2 A} - 1 \qquad \left(\sec^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}\right)$

El método utilizado fue transformar B en A.

d) $\dfrac{1}{\cos^2 A} - 1 = \tan^2 A$

$\sec^2 A - 1 = \sec^2 A - 1 \qquad \left(\dfrac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A \;\; \text{y} \;\; \tan^2 A = \sec^2 A - 1\right)$

El método utilizado fue transformar A en C y B en C.

EJEMPLO 6. Verifico la siguiente identidad trigonométrica por 4 métodos diferentes. Consigno en el cuaderno el que comprenda mejor.

a) $\dfrac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \csc\theta - \cot\theta$

$\dfrac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1}{sen\theta} - \dfrac{\cos\theta}{sen\theta}$

$\dfrac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{sen\theta}$ [Multiplico ambos miembros } por(1 + cosθ) sen θ]

$$\frac{\cancel{(1+\cos\theta)}\cdot sen\theta\cdot sen\theta}{\cancel{1+\cos\theta}} = \frac{(1+\cos\theta)\cdot\cancel{sen\theta}\cdot(1-\cos\theta)}{\cancel{sen\theta}}$$

$sen^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad [(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta) = 1 - \cos^2\theta]$

$sen^2\,\theta = sen^2\,\theta \qquad$ (Si $sen^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, entonces $1 - \cos^2\theta = sen^2\,\theta$)

¿Qué método se utilizó?

b)

$$\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}=\csc\theta-\cot\theta$$

$$\frac{sen\theta}{(1+\cos\theta)}\cdot\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}=$$

(Multiplico numerador y denominador por el conjugado del denominador)

$$\frac{sen\theta-sen\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=$$

$$\frac{sen\theta-sen\theta\cos\theta}{sen^2\theta}=$$

($1-\cos^2\theta=sen^2\theta$)

$$\frac{\cancel{sen\theta}}{sen^{\cancel{2}}\theta}-\frac{\cancel{sen\theta}\cos\theta}{sen^{\cancel{2}}\theta}=$$

$$\frac{1}{sen\theta}-\frac{\cos\theta}{sen\theta}=$$

$\csc\theta-\cot\theta=$

¿Qué método se utilizó para esta segunda demostración?

c)

$$\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}=\csc\theta-\cot\theta$$

$$\frac{sen\theta}{(1+\cos\theta)}\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}=\frac{1}{sen\theta}-\frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

$$\frac{sen\theta-sen\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{sen\theta-sen\theta\cos\theta}{sen^2\theta}$$

$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}\right)$

$$\frac{sen\theta-sen\theta\cos\theta}{sen^2\theta}=\frac{sen\theta-sen\theta\cos\theta}{sen^2\theta}$$

($1-\cos^2\theta=sen^2\theta$)

d)

$$\frac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \csc\theta - \cot\theta$$

$$\frac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1}{sen\theta} - \frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

$$\frac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{sen\theta}$$

$sen^2\,\theta = (1 - \cos\,\theta)\,(1 + \cos\,\theta)$ (Multiplico en cruz)

$sen^2\,\theta = 1 - \cos^2\,\theta$

$sen^2\,\theta \quad = \quad sen^2\,\theta$ $(1 - \cos^2\,\theta = sen^2\,\theta)$

Analizo muy bien el siguiente ejemplo y basado en los dos ejemplos anteriores, **busco otra solución para comparar mis procesos con los del ejemplo y con los de mis compañeros.**

EJEMPLO 7. Verifico la siguiente identidad.

$$\frac{1+sen\theta}{1-sen\theta} - \frac{1-sen\theta}{1+sen\theta} = 4\tan\theta\sec\theta$$

$$\frac{(1+sen\theta)^2 - (1-sen\theta)^2}{(1-sen\theta)(1+sen\theta)} =$$

$$\frac{(1+2sen\theta+sen^2\theta)-(1-2sen\theta+sen^2\theta)}{1-sen^2\theta} =$$

$$\frac{1+2sen\theta+sen^2\theta-1+2sen\theta-sen^2\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$\frac{4sen\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$4\,\frac{sen\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} =$$

$$4\,\tan\,\theta\,\sec\,\theta =$$

EJERCICIOS: Demuestre, al menos por un método, las siguientes identidades:

1. $\cos^2 A - \text{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1$

2. $\text{sen}^2\theta \cot^2\theta + \cos^2\theta \tan^2\theta = 1$

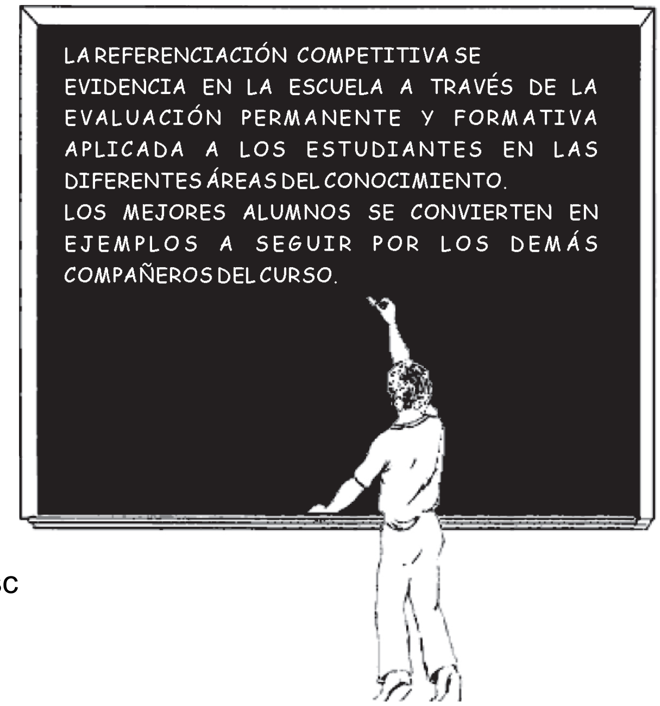
3. $\cot x + \tan x = \cot x \sec^2 x$

4. $\dfrac{\cos\beta + \text{sen}\beta\tan\beta}{\text{sen}\beta\sec\beta} = \csc\beta$

5. $(\tan^2\theta + 1)\cos^2\theta = 1$

6. $\left(\dfrac{\sec\beta + \csc\beta}{1 + \tan\beta}\right)^2 = \csc^2\beta$

7. $\dfrac{\cot x}{1 - \tan x} + \dfrac{\tan x}{1 - \cot x} = 1 + \sec x \cdot \csc$



D APLICACIÓN

Solucionar ejercicios de aplicación es una buena oportunidad para identificar mis fortalezas y debilidades en este tema de identidades. Los resuelvo y comparo mis procesos con los de otros para innovar y mejorar.

1. En una empresa aplicaron una prueba de aptitud a varios aspirantes a un empleo. La prueba consiste en resolver las 5 identidades siguientes en el menor tiempo. Resuélvalas y cronometre su tiempo y el de sus compañeros de mesa.

   a. $\tan^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x \tan^2 x$
   b. $\text{sen}x - \text{sen}\, x \tan x = \cos x$
   c. $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \dfrac{\sec\theta}{\csc\theta}$
   d. $\dfrac{\text{sen}x - \cos x}{\sec x - \csc x} = \dfrac{\cos x}{\csc x}$
   e. $\dfrac{\cos^2\theta + \cot\theta}{\cos^2\theta - \cot\theta} = \dfrac{\cos^2\theta\tan\theta + 1}{\cos^2\theta\tan\theta - 1}$

2. Invente una identidad trigonométrica. Empiece con una expresión trigonométrica simple y complíquela. Entréguela a un compañero de mesa para que la resuelva y solucione la identidad de él.

3. Escriba un párrafo en el cual debe describir una estrategia general para probar una identidad trigonométrica.

¿DESEA APRENDER MÁS?

Una oportunidad de mejoramiento es resolver identidades con un mayor nivel de dificultad.

1. La siguiente ecuación se presenta en el estudio de mecánica. Simplifique la ecuación si $I_1 = I_2$.

$$sen\theta = \frac{I_1 \cos\phi}{\sqrt{(I_1 \cos\phi)^2 + (I_2 sen\phi)^2}}$$

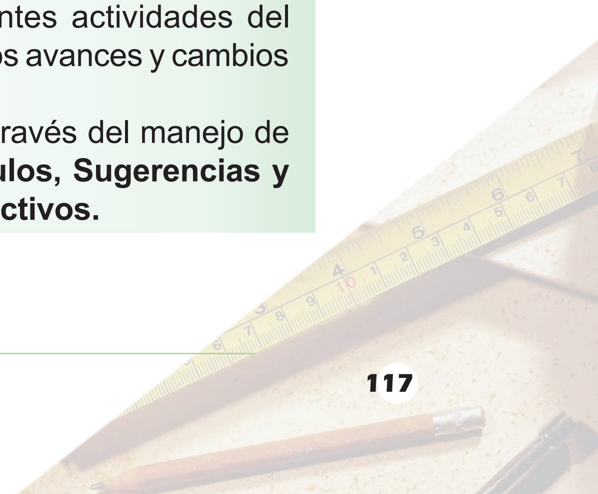
2. Pruebe las siguientes identidades trigonométricas

a. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = \csc\beta + \cot\beta$

b. $\sec^4 x - \tan^4 x = \dfrac{2-\cos^2 x}{1 - sen^2 x}$

c. $\sqrt{1+\cot^2 x} \cdot \sqrt{\sec^2 x - 1} \cdot \sqrt{1 - sen^2 x} = 1$

También se hace **Referenciación Competitiva** a través de las **Evaluaciones Institucionales** que permiten conocer si las metas proyectadas fueron cumplidas o no.
La participación de los estudiantes en las diferentes actividades del **Gobierno Estudiantil** permite al maestro detectar los avances y cambios positivos en cada uno de ellos.
Así mismo se hace Referenciación Competitiva a través del manejo de algunos instrumentos como el **Cuadro de Estímulos, Sugerencias y Compromisos y Proyectos Pedagógicos Productivos.**



ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA