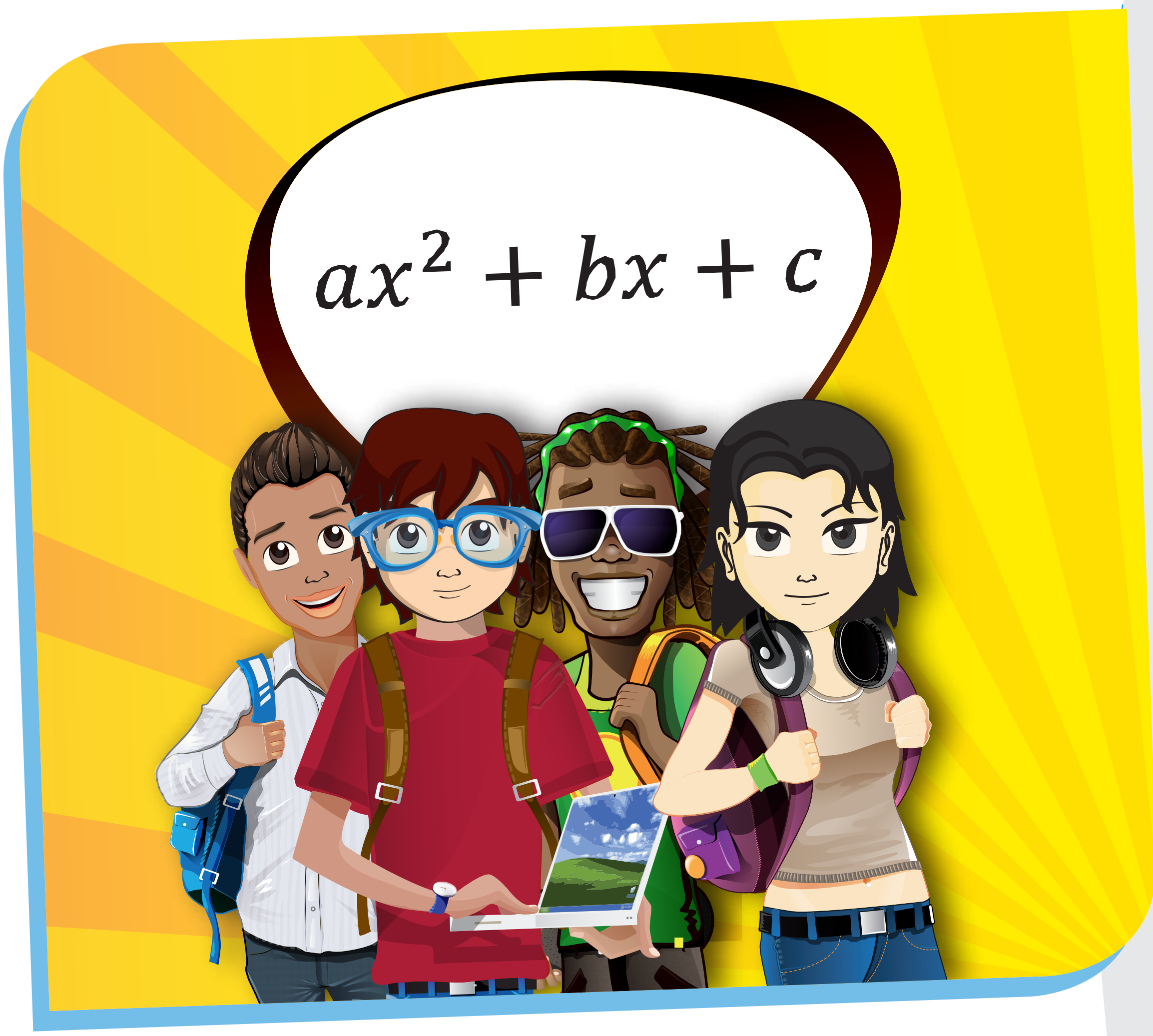
Guía 3

Avancemos en la factorización con trinomios



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Diferencia los diferentes trinomios y su correspondiente factorización.

Procedimental

- Ejercita los diferentes casos de factorización de cada trinomio.

Actitudinal

- Llega a consensos con sus compañeros en la solución de problemas algebraicos.

A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

1. En la comunidad existen algunos problemas, los identifico y organizo de menor a mayor complejidad. Pienso y selecciono dos de los problemas más complejos y genero pautas para dar soluciones.

TRABAJO EN EQUIPO

2. De acuerdo con los problemas planteados de manera individual, organizamos una lista en orden de prioridades, consignando en el cuaderno las razones para considerar su importancia. Seleccionamos dos de ellas y respondemos:

   a. ¿Qué datos numéricos necesitamos?

   b. ¿Cómo recogemos esa información?

   c. ¿Cómo podremos usar la matemática para que ayude al problema?

3. Algunas situaciones requieren que la matemática sea una herramienta para ver la solución y en algunos casos su tratamiento. ¿En qué te aportaría la matemática en esos dos casos? ¿Es posible que sirva la factorización? Justificamos las respuestas.

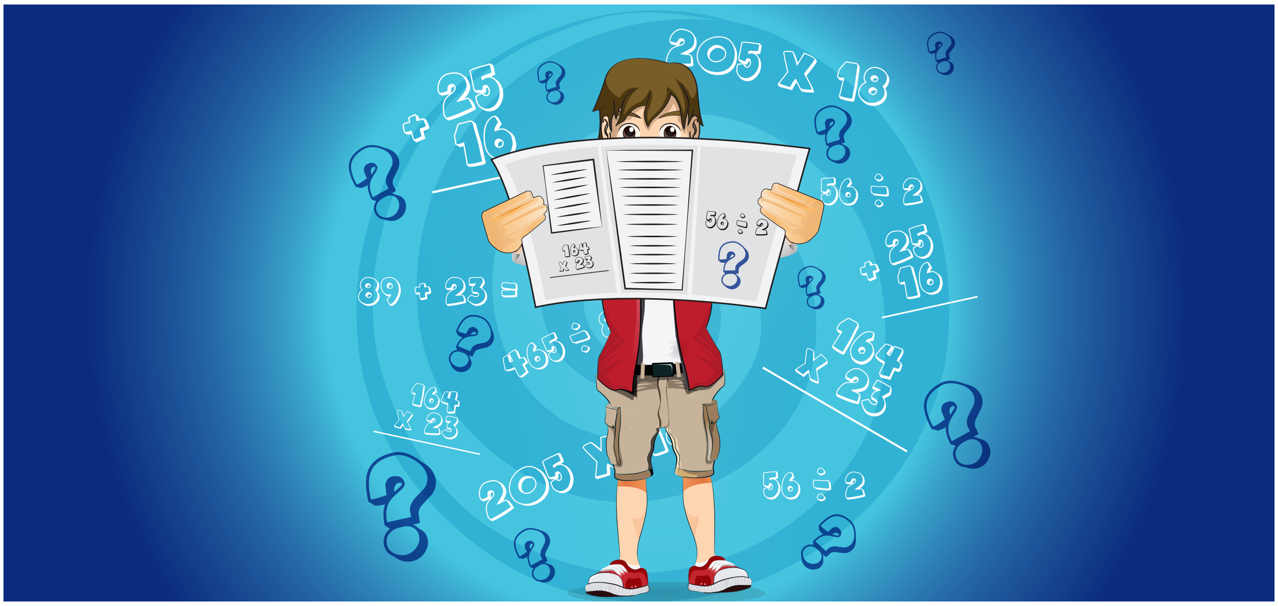
4. Escribimos un problema que utilice el producto

   $(x-3)\,(x+4) = x^2 + x - 12$

5. Organizamos una plenaria para compartir nuestras respuestas.

BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO



1. Continuamos aprendiendo acerca de otros métodos de factorización, leemos con atención y consignamos en el cuaderno lo que vayamos comprendiendo:

Recordemos que un trinomio es un polinomio que consta de tres términos de la forma $ax^2 + bx + c$.

Ejemplos:

a. $125m^2 + 40xy + 16n^2$

b. $x^2 + 5yz^3 + 7$

Los casos de factorización que involucran trinomios pueden ser de dos formas:

a. De la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a = 1$

b. De la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 1$

Cuando presenta la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a = 1$

Analizamos las características de este trinomio, donde a es el número 1 y b y c son números reales.

Ejemplo:

$$x^2 + 4x - 12$$

Donde $a = 1$, $b = 4$ y $c = -12$

2. Identificamos en los siguientes trinomios, los coeficientes a, b y c:

a. $2x^2 + 3x + 5$

b. $9 + 6x + x^2$

c. $x^2 - 4x + 4$

d. $-x^2 - 5x + 6$

e. $x^2 - 2x + 1$

f. $3x^2 - 10x - 3$

3. Continuamos con la lectura y extraemos las ideas principales:

Observemos los factores $(x + 6)$ y $(x - 2)$ al resolver la multiplicación:

$$(x + 6)(x - 2) = x^2 + 4x - 12$$

La **P** significa: Se multiplican los dos primeros términos de cada binomio.
La **I** significa: Se multiplican los dos términos internos de cada binomio.
La **E** significa: Se multiplican los dos términos externos de cada binomio.
La **S** significa: Se multiplican los dos segundos términos de cada binomio.

Por tanto, al resolver la multiplicación con el **Método PIES** se obtiene:

$$(x + 6)(x - 2) = (x + 6)(x - 2) = \underset{P}{x^2} + \underbrace{\underset{I}{6x} - \underset{E}{2x}}_{+4x} - \underset{S}{12}$$

$P = x \cdot x = x^2$
$I = 6 \cdot x = 6x$
$E = -2 \cdot x = -2x$
$S = 6(-2) = -12$

4. Apliquemos la técnica PIES para calcular los siguientes productos:

a. $(x + 7)(x + 4)$

b. $(x - 2)(x - 5)$

c. $(x + 8)(x - 10)$

d. $(x - 3)(x + 9)$

e. $(x - 2)(x + 5)$

f. $(x + 2)(x - 7)$

g. $(x - 12)(x - 1)$

h. $(x - 15)(x + 12)$

i. $(x + 1)(x + 16)$

j. $(x - 13)(x - 10)$

5. Seguimos con la lectura y consignamos en el cuaderno las explicaciones correspondientes:

Si observamos los trinomios son:

$$x^2 + bx + c = (x + \blacksquare)(x + \blacksquare)$$

Aquí van números

Ahora, estudiemos algunas formas para factorizarlos:

Método 1: Ensayo y error

El caso de $x^2 + 8x + 12$

Una forma es enlistar todas las parejas de números que nos dan 12 y ensayar cuáles son las que nos dan el resultado deseado:

Factores de 12	Factores posibles	Productos de los factores
(1) (12)	(x+1) (x+12)	$x^2 + 13x + 12$
(2) (6)	(x + 2) (x +6)	$\mathbf{x^2 + 8x + 12}$
(3) (4)	(x + 3) (x + 4)	$x^2 + 7x + 12$
(-1) (-12)	(x – 1) (x – 12)	$x^2 -13x + 2$
(-2) (-6)	(x – 2) (x – 6)	$x^2 - 8x + 12$
(-3) (-4)	(x – 3) (x – 4)	$x^2 - 7x + 12$

6. Realizamos la factorización de los siguientes trinomios por el método ensayo y error, realizando una tabla como la que aparece en el ejemplo anterior:

a. $x^2 - 11x + 30$

b. $x^2 + 9x + 18$

c. $x^2 - 15x + 36$

d. $x^2 + 9x + 20$

Como observamos, para verificar si corresponden al método, siempre multiplicamos los números para que nos dé el tercer término y sumamos esos números para que nos dé el segundo.

7. *Ahora conozcamos el método 2.*

Método 2:

Este requiere de tres pasos, estudiémoslo a través de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

$$\boldsymbol{x^2 + 3x + 2}$$

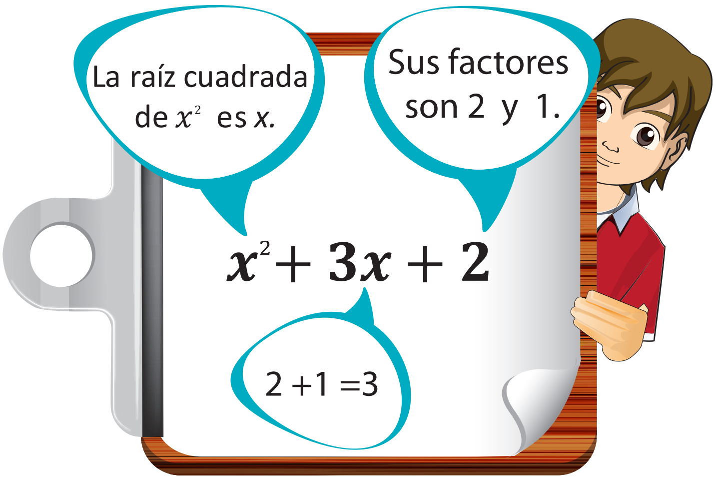
En primer lugar obtenemos la raíz cuadrada de $\boldsymbol{x^2}$, que en este caso sería $\boldsymbol{x}$.

En segundo lugar encontramos dos números cuyo producto sea igual al tercer término o constante; que en este caso es 2.

Estos números son (1) (2) y (-1) (-2).

A la vez, al sumar esos números nos debe dar el coeficiente del segundo término, que en este caso es (2) y (1), porque al sumarlo 2+1=3

Entonces, la factorización del trinomio se obtiene a partir de reconocer en sus términos lo siguiente:



De esta manera obtenemos;

$$(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})(\boldsymbol{x} + \mathbf{1})$$

Ejemplo 2:

Factorizamos el siguiente trinomio;

$$\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{15}$$

Obtenemos la raíz cuadrada del primer término, que en este caso es $\boldsymbol{y}$.

Ahora buscamos dos números que multiplicados den como resultado -15 y al sumarlos nos dé como resultado -2. Los números que cumplen con estas características son: (-5) y (3).

Entonces la factorización sería así:

$$(\boldsymbol{y} - \mathbf{5})(\boldsymbol{y} + \mathbf{3})$$

Ejemplo 3:

$$x^2 - 6x + 9$$

La raíz del primer término es: x

Dos números que multiplicados den 9 y que sumados den -6. Estos son: (-3) y (-3).

Entonces la factorización es:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3)$$

8. Para ejercitar lo aprendido, factorizamos los siguientes trinomios:

a. $x^2 + 4x + 3$

b. $b^2 + 8b + 15$

c. $r^2 - 12r + 27$

d. $h^2 - 27h + 50$

e. $x^2 + 14xy + 24y^2$

f. $x^2 + 5x + 4$

g. $y^4 - 8y^2 + 16$

h. $1 + 49a^2 - 14a$

i. $\frac{a^2}{4} - ab + b^2$

j. $\frac{9}{4}x^2 + 2xy + \frac{4}{9}y^2$

9. Realizamos las siguientes multiplicaciones de binomios con el Método de PIES y escribimos las características de cada término:

a. (2x - 5)(3x+5)

b. (5x + 8)(x – 4)

c. (8x – 20)(2x – 6)

d. (2x – 1)(6x – 4)

e. (9x – 7)(3x – 10)

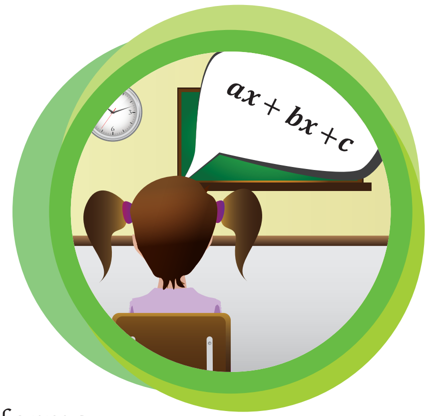
f. (4x + 12)(x – 18)

g. (7x + 3)(5x + 4)

h. (x – 6)(10x – 2

i. (2x – 9)(6x + 13)

j. (9x + 5) (x – 8)



Todos los productos dan como resultado un trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, donde $\boldsymbol{a \neq 1}$. Podemos observar que el producto de los primeros términos del binomio da el término cuadrático de x. Así mismo, se nota que el producto de los últimos términos de los binomios produce el último término o constante del trinomio. Por último, se puede observar que la suma de los productos de los términos exteriores e interiores de los binomios da el término medio del trinomio.

Factorizar trinomios de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, donde $\boldsymbol{a \neq 1}$

Método 1: Ensayo y error

Al factorizar $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ por el método de ensayo error, el producto de los primeros términos en los factores del binomio, debe ser igual al primer término del trinomio $\boldsymbol{ax^2}$, el producto de las constantes en los factores del binomio, incluido sus signos, debe ser igual a la constante o tercer término, c, del trinomio:

Ejemplo:

Trinomio	Factores del primer trinomio	Factores del tercer término	Factores posibles	Productos de los factores
$2x^2+7x+6$	$(2x)(x)$	$(1)(6)$	$(2x+1)(x+6)$	$2x^2+13x+6$
		$(-1)(-6)$	$(2x-1)(x-6)$	$2x^2-13x-6$
		$(2)(3)$	$(2x+3)(x+2)$	$2x^2+7x+6$
		$(-2)(-3)$	$(2x-3)(x-3)$	$2x^2-7x+6$

10. *Factorizamos los siguientes trinomios por el método de ensayo y error:*

a. $6x^2-7x-3$

b. $2x^2+3x-2$

c. $3x^2-5x-2$

11. *Ahora veamos el segundo método.*

MÉTODO 2: Por agrupamiento

La factorización $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, por agrupamiento debe realizar los siguientes pasos que se explicarán a través de un ejemplo:

Ejemplo 1: Factorizar: $6x^2-11x+4$

Seguimos los siguientes pasos:

Paso 1: Establecemos qué números son a, b y c. En nuestro ejemplo son $a=6$, $b=-11$ y $c=4$.

Paso 2: Encontramos dos números cuyo producto sea igual al producto a por c y cuya suma sea igual a b:

$a\cdot c=24$ y $b=-11$, estos números son negativos porque 24 es positivo y la suma debe dar -11, estos son: -8 y -3.

Paso 3: Reescribimos el término bx como la suma de dos términos que utilicen los números encontrados:

$$6x^2-8x-3x+4$$

Paso 4: Factorizamos por agrupamiento:

$$6x^2-8x-3x+4=(6x^2-3x)-(8x-4)=3x(2x-1)-4(2x-1)$$
$$=(2x-1)(3x-4)$$

Entonces la factorización de $6x^2 - 11x + 4$ es $(2x-1)(3x-4)$.

Ejemplo 2: Factorizar $16x^2 + 24x + 9$

Paso 1: Establecemos qué números son a, b y c. En nuestro ejemplo son $a = 16$, $b = 24$ y $c = 9$.

Paso 2: Encontramos dos números cuyo producto sea igual al producto a por c y cuya suma sea igual a b .

Paso 3: $a \cdot c = 144$ y $b = 24$, estos números son positivos porque 144 es positivo y la suma debe dar 24, estos son: 12 y 12.

Paso 4: Reescribimos el término bx como la suma de dos términos que utilicen los números encontrados:

$$16x^2 + 12x + 12x + 9$$

Paso 5: Factorizamos por agrupamiento:

$$16x^2 + 12x + 12x + 9 = (16x^2 + 12x) + (12x + 9)$$
$$= 4x(4x+3) + 3(4x+3) = (4x+3)(4x+3)$$

12. Factorizamos los siguientes trinomios con el método de agrupamiento:

a. $5x^2 + 11x + 2$

b. $4x^2 + 7x + 3$

c. $5 + 7b + 2b^2$

d. $6x^2 + 7x - 5$

e. $3m^2 - 7m - 20$

f. $6x^2 + 7x + 2$

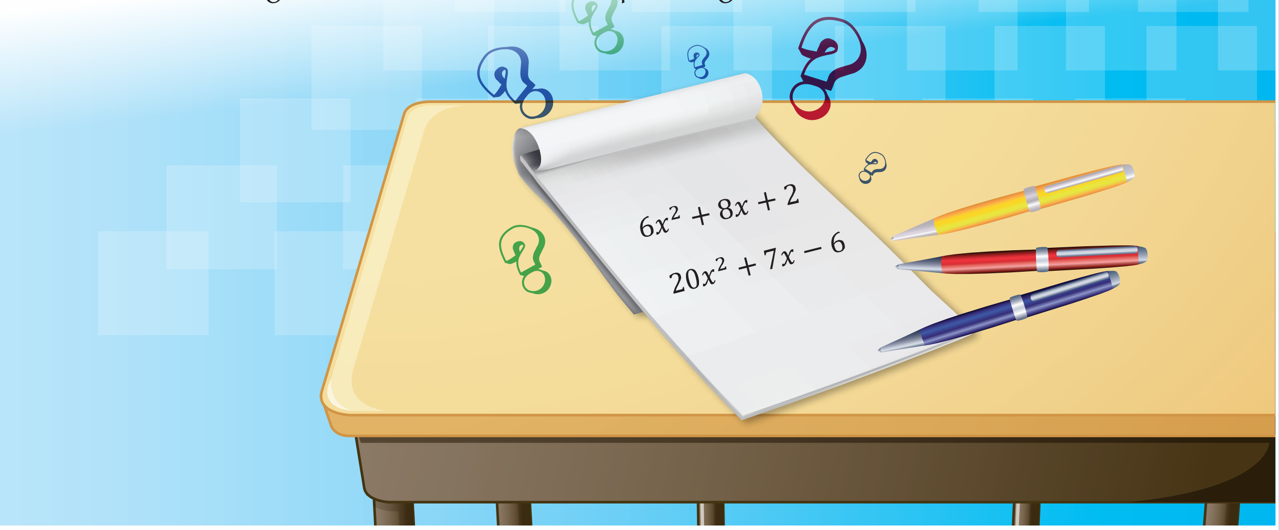
g. $5x^2 + 13x - 6$

h. $20x^2 + 7x - 6$

i. $6x^2 + 22x + 20$

j. $6x^2 + 8x + 2$

13. Invitamos al profesor al equipo de trabajo para que revise los ejercicios realizados y nos aclare las dudas que tengamos.

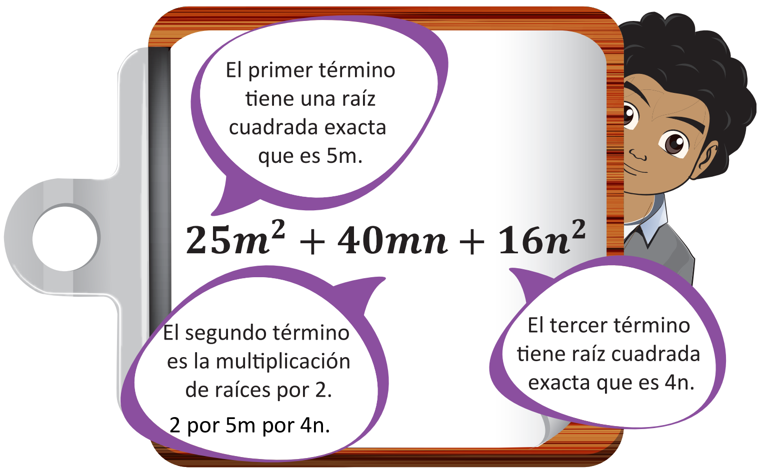


D Aplicación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Leemos la siguiente información que muestra una manera de identificar a un trinomio que se conoce como cuadrado perfecto: Este caso es una aplicación de los casos estudiados:

El siguiente trinomio $\mathbf{25m^2 + 40mn + 16n^2}$, es un trinomio cuadrado perfecto, revisemos las razones:



Si encontramos un trinomio que cumpla con las condiciones:

- El primer y tercer término del trinomio tienen raíz cuadrada exacta.
- El segundo término del trinomio equivale al doble del producto de las raíces anteriores.

Podemos decir que estamos hablando de un **Trinomio Cuadrado Perfecto.**

2. Revisamos los siguientes trinomios e identificamos cuáles de ellos pueden ser trinomios cuadrados perfectos:

a. $144m^2 - 72mp + 9p^2$

b. $25a^2 + 24ab + 4b^2$

c. $121f^2 - 22fg + g^2$

d. $64x^2 - 40xy + 16y^2$

e. $49a^2 + 42ab + 4b^2$

f. $16x^6y^8 - 8x^3y^4z^7 + z^{14}$

3. Leemos detenidamente la manera de factorizar un trinomio cuadrado perfecto y consignamos en el cuaderno:

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, en primer lugar identificamos que sus términos cumplan los criterios anteriormente vistos, quedaría así:

Como $\mathbf{25m^2 + 40mn + 16n^2}$ es un trinomio cuadrado perfecto, se factoriza así:

Tomamos la raíz cuadrada del primer término y la raíz cuadrada del tercer término y el signo del segundo término; quedaría de la siguiente manera:

$$\mathbf{(5m + 4n)^2}$$

Ejemplo 1:

Factorizar el trinomio $\mathbf{-4x + x^2 + 4}$

Primero, organizamos los términos $\mathbf{x^2 - 4x + 4}$, luego sacamos la raíz cuadrada del primer y tercer término que son x y 2.
Verificamos que nos dé el segundo término: $2\,(x)(2) = 4x$
Entonces se puede factorizar rápidamente, así: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

4. Factorizamos los siguientes trinomios teniendo en cuenta el procedimiento para solucionarlos:

a. $x^2 + 4x + 4$

b. $b^2 + 8b + 16$

c. $r^2 - 12r + 36$

d. $h^2 - 20h + 100$

e. $x^2 + 14xy + 49y^2$

f. $x^2 + 10x + 25$

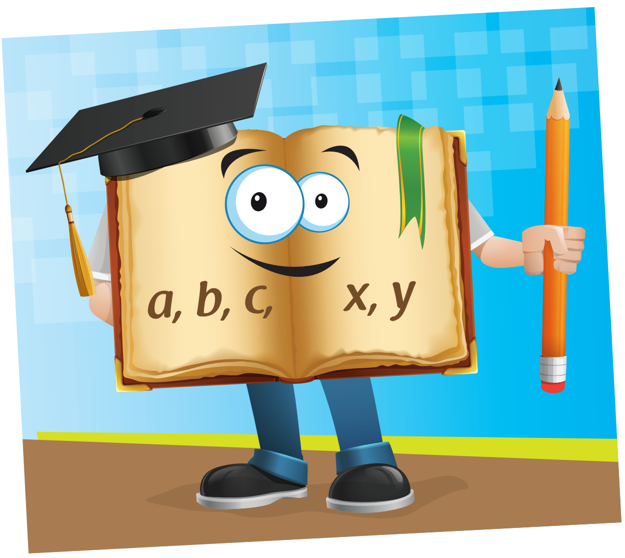
g. $a^4 + 18a^2 + 81$

h. $\frac{n^2}{9} + 2mn + 9m^2$

i. $16 + 40x^2 + 25x^2$

j. $9 - 6x + x^2$

5. Convocamos al profesor para que valore el aprendizaje logrado hasta el momento y nos aclare las dudas presentadas.



E Complementación

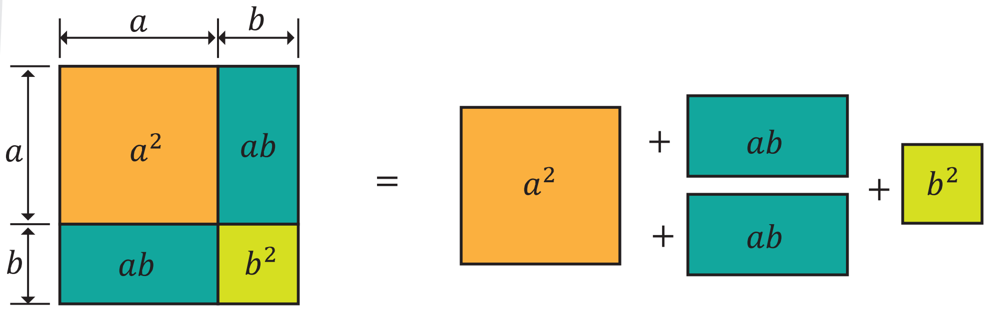
TRABAJO EN EQUIPO

1. Le solicitamos respetuosamente al compañero indicado que seleccione los materiales apropiados para representar geométricamente la factorización de trinomios que hemos visto en la guía, teniendo en cuenta el siguiente procedimiento:

Si fuera a representar el trinomio cuadrado perfecto de forma geométrica:

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$$

Si representamos el cuadrado y descomponemos cada uno de sus términos tendremos:



$$(a+b)^2 \quad = \quad a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$$

2. Realizamos las representaciones geométricas de los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

   a. $x^2 + 6x + 9$

   b. $x^2 + 2x + 1$

   c. $x^2 + 10x + 25$

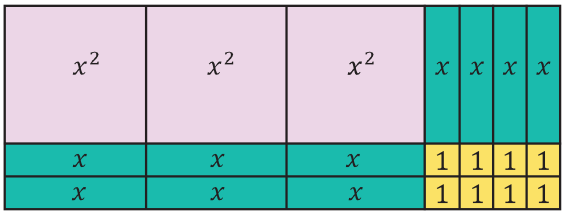
   d. $9x^2 + 30x + 25$

3. También podemos representar de forma geométrica trinomios de la forma:

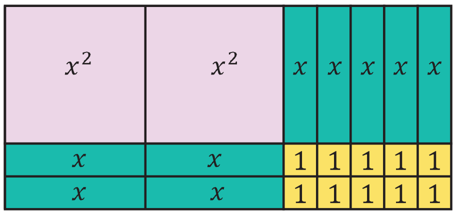
$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$$

   a. Descomponemos cada uno de los términos de las siguientes figuras y realizamos una explicación del área de cada pedazo:

$3x^2 + 10x + 8$



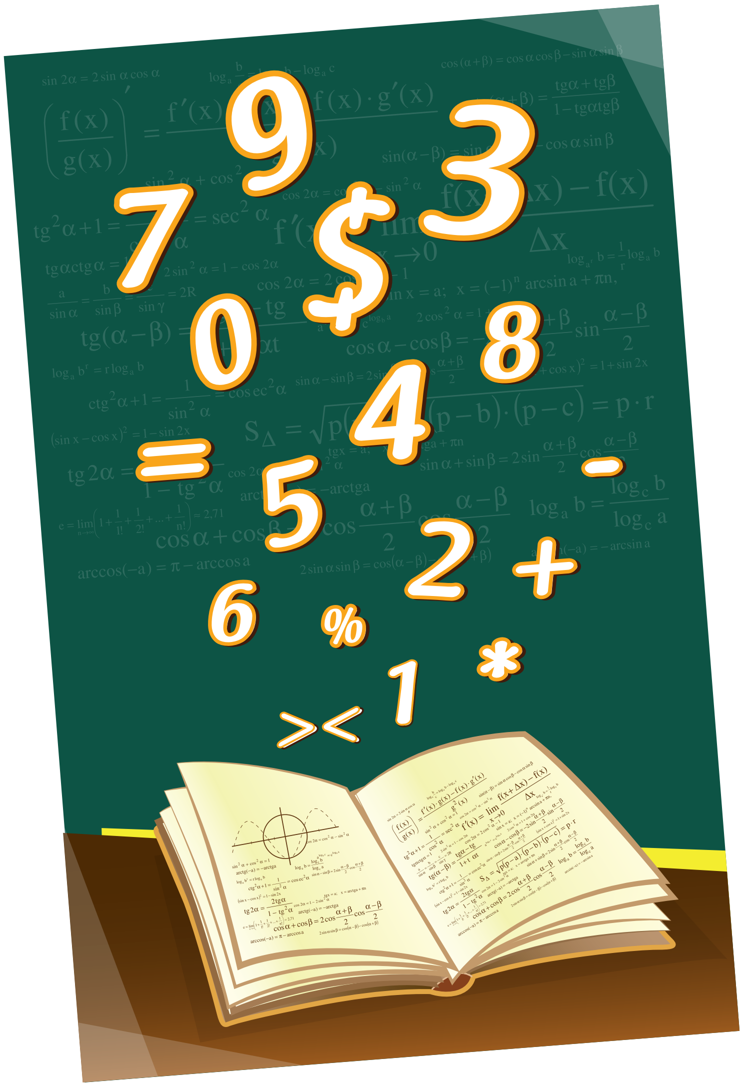
$2x^2 + 9x + 10$



b. Representamos geométricamente los siguientes trinomios:

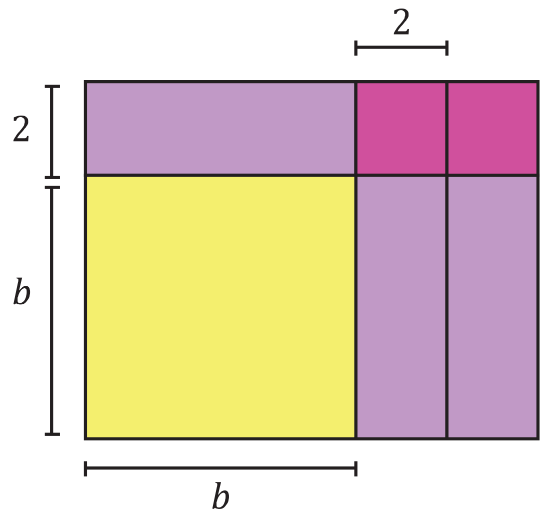
- ✓ $2x^2 + 3x + 2$
- ✓ $y^2 + 6y + 8$
- ✓ $x^2 + 3x + 10$

4. Socializamos las actividades realizadas en la plenaria para que conjuntamente con el profesor aclaremos dudas.



Evaluación por competencias

1. La siguiente representación geométrica a qué trinomio puede corresponder:



A. $b^2 + 3b + 2$

B. $b^2 + 6b + 8$

C. $b^2 + 4b + 2$

D. $b^2 + 2b + 2$

1

2. Un trinomio cuadrado perfecto es:

A. Es un producto de un binomio al cuadrado.

B. Es un producto de una diferencia de cuadrados.

C. Es un cuadrado de un polinomio.

D. Es un polinomio de tres términos.

2

3. La expresión factorizada del trinomio $5x^2 + 4x - 12$ es:

A. $(5x - 4)(x + 3)$

B. $(5x - 6)(x + 2)$

C. $(5x + 6)(x - 2)$

D. $(3x - 4)(2x + 3)$

3

4. La expresión factorizada del siguiente trinomio $x^2 + 3x - 10$ es:

A. $(x - 5)\ (x - 2)$

B. $(x + 5)\ (x - 2)$

C. $(x + 5)\ (x + 2)$

D. $(x - 5)\ (x + 2)$

4

5. Relaciono el trinomio con su factorización:

A. $16x^2 - 40xy + 25y^2$	( )$(5x - 7y)(5x - 7y)$
B. $x^2 - 3x - 28$	( )$(4x - 5y)(4x - 5y)$
C. $25x^2 - 70\,xyn + 49y^2$	( )$(x - 7)(x + 4)$
D. $x^2 + 2x - 35$	( )$(x + 7)(x - 5)$

5

Glosario

- **Agrupamiento:** Reunión de términos algebraicos donde se emplea los paréntesis, con la que se puede obtener factores.

- **Ensayo y error:** Forma de factorización que pretende a través de tanteos, encontrar factores de un polinomio.

- **Método PIES**: Manera de realizar la multiplicación de dos binomios para obtener un trinomio.

- **Representación geométrica:** Es determinar representaciones cuadradas o rectangulares de un área para determinar la factorización y el resultado de un producto de dos factores.

- **Trinomio:** Un polinomio que se compone de tres términos.

- **Trinomio cuadrado perfecto:** Es un polinomio de tres términos que resulta de elevar al cuadrado un binomio.