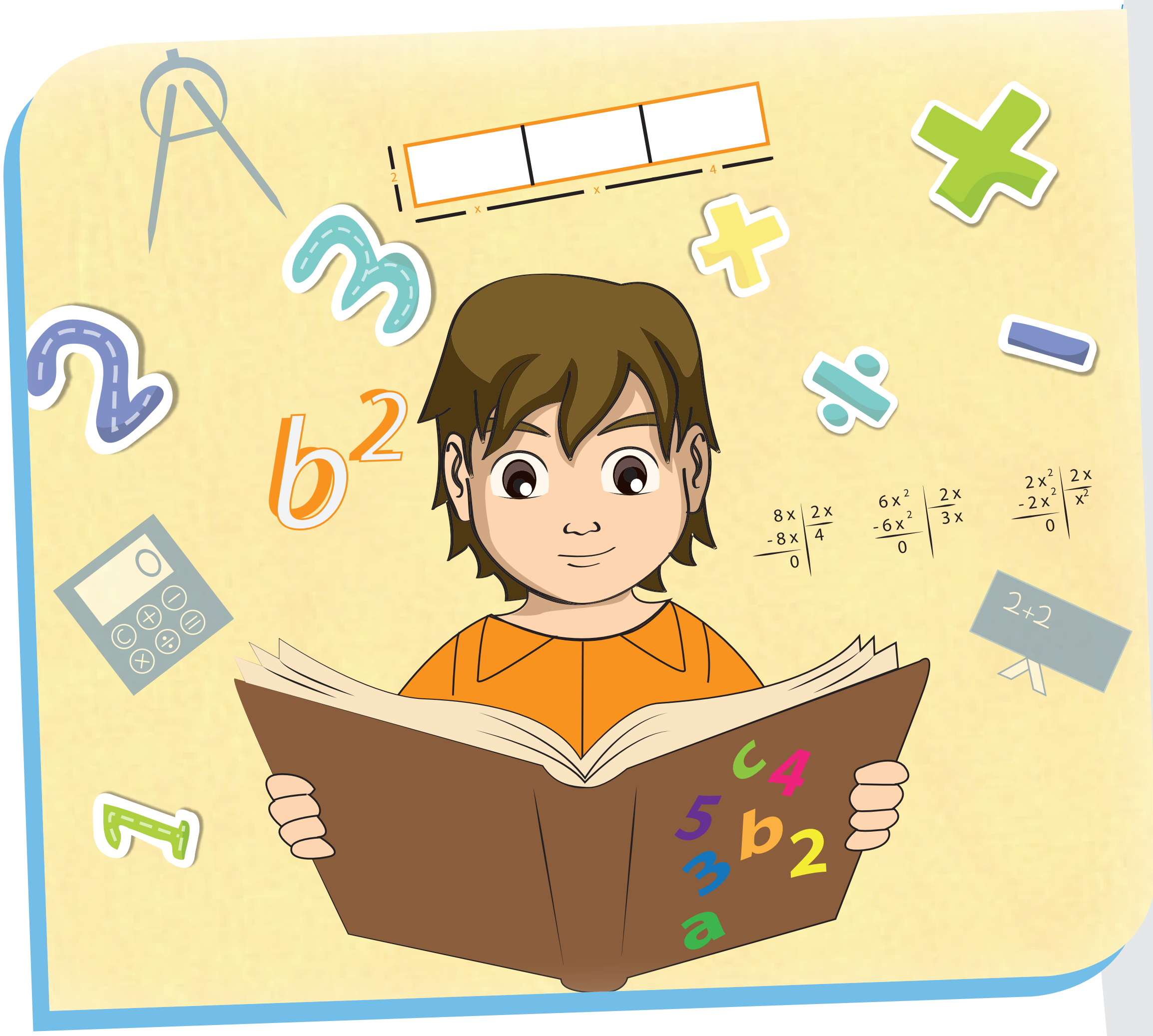
Guía 2

Aprendamos a factorizar polinomios



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Diferencia los diferentes casos de factorización.

Procedimental

- Ejercita los diferentes casos de factorización.

Actitudinal

- Valora el aporte de sus compañeros en las estrategias empleadas para resolver casos de factorización.

A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Leo atentamente las siguientes situaciones y las resuelvo:

   a. Hallo todos los posibles divisores de los siguientes números:

   - ✓ 10
   - ✓ 21
   - ✓ 38
   - ✓ 56
   - ✓ 63
   - ✓ 72
   - ✓ 81
   - ✓ 92
   - ✓ 120
   - ✓ 165

   b. Expreso los números anteriores como producto de números primos.

   c. Calculo los cocientes de:

   - ✓ $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$
   - ✓ $\dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x}$
   - ✓ $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$
   - ✓ $\dfrac{x^3 - x}{x(x - 1)}$
   - ✓ $\dfrac{4x^2 - 8x - 12}{2(x - 3)}$

   d. Realizo la prueba a cada una de las divisiones de la actividad anterior y determino cuáles de ellas son exactas.

TRABAJO EN EQUIPO

2. Comparo con mis compañeros los resultados obtenidos en las actividades anteriores y le solicitamos al profesor que evalúe nuestro trabajo.

Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Teniendo en cuenta la distribución de roles en el interior del equipo, le solicitamos respetuosamente a un compañero del grupo realizar la siguiente lectura, tomamos nota de los aspectos más importantes y finalmente desarrollamos las actividades propuestas:

Factorización

La **factorización**, también denominada **descomposición en factores**, es la descomposición de un número o una expresión algebraica como producto de sus divisores. Estos divisores se llaman factores.

Por ejemplo, la factorización de 120 consiste en encontrar los divisores de dicho número:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Y luego expresarlo como producto de estos números:

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \; = 2^3 \times 3 \times 5$$

Esto mismo ocurre con las expresiones algebraicas, obsérvese que

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Entonces $x - 3$ y $x + 1$ son factores de $x^2 - 2x - 3$.

La factorización de un monomio consiste en descomponer en factores primos su coeficiente y separar las variables, por ejemplo:

$$30x^2yz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z$$

Por otra parte, es necesario tener en cuenta que, así como los números primos no se pueden expresar como producto de números, algunos polinomios no pueden ser factorizados. Por ejemplo $x - y$ sólo se puede expresar como el producto de $(x - y)$ y 1

$$x - y = (x - y) \cdot 1$$

A continuación se muestran los métodos más habituales que se utilizan para factorizar polinomios:

- Máximo común divisor (MCD).
- Factor común.
- Factorización por agrupamiento.
- Suma de potencias.
- Diferencia de potencias.

Máximo común divisor de dos o más números

Recordemos que el Máximo Común Divisor (MCD) es el número mayor de los divisores que divide a todos los números de manera exacta.

Ejemplos:

- De los números 6 y 8 el máximo común divisor es 2.
- De los números 18 y 24 el máximo común divisor es el 6.

Máximo común divisor de dos monomios

En el caso de los monomios el máximo común divisor se determina así:

1. Se calcula el MCD de los coeficientes o de la parte numérica de cada término.

2. Se toman las variables comunes de la parte literal de cada término.
3. De estas variables se escogen las elevadas al menor exponente.
4. Se forma el Máximo Común Divisor con el MCD de los coeficientes como parte numérica y con las variables elevadas al menor exponente como parte literal.

Ejemplo:

Determinar el MCD de los términos $4xy, 8x^3y^2w$ y $12x^4y^3r^3$

1. Se calcula el MCD de los coeficientes 4, 8 y 12 que es el 4.
2. Si se observa, de cada monomio las variables comunes son x y y.
3. Luego, seleccionamos de esas variables cuál es el exponente menor; en el caso de la variable x es 1 y de y es 2, es decir xy^2.
4. Por lo tanto, el MCD de los tres términos es $4xy^2$.

2. Encontramos el MCD de cada grupo de monomios:

a. $18y^5 \;\; 15y^3 \; 27y^5$

b. $8x^3$, $16x^2$,$24x^5$

c. $15y^7$, $25y^5 \; 45y^3$

d. $18z^6$, $30z^2$,$54z^2$

e. $14xy^3$, $28x^2y^2$,$63x^3y$

f. $8x^2y^3$, $40x^4y^6$,$72x^6y^9$

g. $18a^3y^5$, $15a^2y^3$,$27a^3y^7$

h. $28x^2z^5$, $42x^3z^6 \; 56x^4z^8$

i. $120y^3z^5$, $144y^6z^6$,$240y^9z^8$

j. $18x^2y^5$, $54x^3y^6$,$90x^4y^8$

Factor común

Consiste en organizar dos factores. El primero de los factores se consigue de extraer el factor común de los términos del polinomio y el segundo factor es el que se obtiene de los términos, que al multiplicar por el factor común, se obtienen todos los términos del polinomio. Se utiliza la propiedad distributiva para verificar que al multiplicarse estos factores dé el polinomio.

Ejemplo 1:

Factorizar el polinomio $8x + 6x^2 + 2x^3$.

Determinanos el MCD de la parte numérica 8, 6 y 2, que es 2 y la variable común, que es x, con el exponente 1. Por tanto, el factor común es $2x$.

Para determinar el otro factor, se realiza la división de cada término del polinomio por el factor común $2x$:

$$\begin{array}{r|l} 8x & 2x \\ \cline{2-2} -8x & 4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6x^2 & 2x \\ \cline{2-2} -6x^2 & 3x \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2x^3 & 2x \\ \cline{2-2} -2x^3 & x^2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Entonces, el otro factor es: $(4 - 3x + x^2)$

Finalmente, establecemos la factorización utilizando los dos factores encontrados:

$$8x - 6x^2 + 2x^3 = 2x \cdot (4 - 3x + x^2)$$

Ejemplo 2:

Factorizar $36x^2y - 30xy^2$

El MCD de los coeficientes es 36 y 30 es 6, y de la parte literal de las variables comunes son x y y, cada una con el exponente 1. Por tanto, el factor común es $6xy$. Al realizar las divisiones correspondientes de cada término se tiene:

$36x^2y \div 6xy = 6x$

$-30xy^2 \div 6xy = -5y$

Luego el otro factor es: $(6x - 5y)$

Por tanto, la factorización se expresa así de acuerdo a la propiedad distributiva:

$$36x^2y - 30xy^2 = 6xy \cdot (6x - 5y)$$

Para comprobar el proceso de factorización, multiplicamos los factores mediante la aplicación de la propiedad distributiva. Si la factorización es correcta, el producto será el polinomio que estábamos factorizando.

3. Teniendo en cuenta la información anterior, resolvemos los siguientes ejercicios:

a. $8x - 8y + 8z$

b. $15x + 15a + 15b - 15z$

c. $32z^2 - 32y^2 + 32ab - 32cx$

d. $16x^2 - 16x + 32$

e. $3z^2 - 9z + 27xz - 81x$

f. $5z^2 - 15zy^2 + 45z^2y$

g. $13xyz^2 - 39xz + 130z$

h. $20m^2xy - 30mx^2y + 45mxy^2$

i. $6x^2y + 9xyz + 24xyz + 36yz$

j. $3x^3y + 12x^2y - 36xy^2$

k. $2x^2 - 2y^2 + 4x - 4y$

l. m. $-5az^2 - 25az$

m. $-5az^2 - 25az$

n. $15x^2y^2z + 60xy^2z + 135x^2yz - 390xy^2z - 540x^2yz - 1020xyz^2$

ñ. $1500x^2y^2z^2 + 510xyz - 1050x^2yz + 5010xy^2z - 15xyz^2 - 150x$

4. Invitamos al profesor para presentarle lo que hemos comprendido hasta el momento.

5. Continuamos con la lectura acerca de la factorización y consignamos los aspectos más importantes:

Factorización por agrupamiento

Este tipo de factorización se aplica a polinomios que tienen cuatro o más términos. Se agrupan de tal forma que esos términos tengan un factor común y este a la vez, permita encontrar en ellos, haciendo su suma, un factor común para el polinomio.

Ejemplo 1:

Factoricemos el polinomio $x^2 + 3x + 4x + 12$, observamos que en un principio no es posible encontrar un factor común a todos los términos del polinomio. Determinamos que términos podemos agrupar de tal forma que tengan un factor común:

$$x^2 + 3x + 4x + 12$$

Si agrupamos el primer y tercer término el factor común es x; y agrupando el segundo y cuarto término el factor común es 3. Luego la agrupación queda:

$(x^2 + 3x) + (4x + 12)$

Luego factorizamos cada grupo con el método factor común:

$(x^2 + 4x) + (3x + 12) = x(x + 4) + 3(x + 4)$

Si observamos bien, nos quedaron dos sumandos cuyo factor que es común en los dos es $x + 4$; por tanto, al factorizar:

$$(x^2 + 4x) + (3x + 12) = x(x + 4) + 3(x + 4) = (x + 3)(x + 4)$$

Ejemplo 2:

Factorizar el polinomio $3x^2 + 6xy + 4x + 8y$

En este caso se agrupan los dos primeros términos y los dos últimos:

$$(3x^2 + 6xy) + (4x + 8y)$$

Se factoriza cada grupo

$$(3x^2 + 6xy) + (4x + 8y) = 3x(x + 2y) + 4(x + 2y)$$

Ahora analizamos cada sumando y observamos que $x + 2y$ es un factor común de cada uno. Al aplicar la propiedad distributiva la factorización queda:

$$3x^2 + 6xy + 4x + 8y = (3x + 4)(x + 2y)$$

6. Factorizamos las siguientes expresiones teniendo en cuenta lo anterior:

a. $5z^2 + 8zx + 5z + 8x$

b. $2x^2 + xy + 6x + 3y$

c. $10y^2 + 6xy + 5y + 3$

d. $2ax^2 + 2bxy + ax + by$

e. $y^2 + yz + yz + z^2$

f. $x^2 + 2xy - 6xy + 3x^2$

Ejemplo 3:

Factorizar el polinomio $5xy + 7yz - 30xw - 42wz$

Para factorizar este polinomio, se agrupa el primero con el tercero; y el segundo con el cuarto, así:

$$5xy + 7yz - 30xw - 42wz = (5xy - 30xw) + (7yz - 42wz)$$

Factorizando cada grupo

$$(5xy - 30xw) + (7yz - 42wz)$$
$$= 5x(y - 6w) + 7z(y - 6w)$$

Y finalmente $y - 6w$ es un factor común de cada sumando, entonces la factorización es:

$$5xy + 7yz - 30xw - 42wz = (5x + 7z)(y - 6w)$$

7. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, factorizamos las siguientes expresiones:

a. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$

b. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$

c. $49x^4 - 25x^2 - 8y^2 + 30xy$

d. $a^2 - 4 - 4a - 9b^2$

e. $ax - 2bx - 2ay + 4by$

f. $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$

g. $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$

h. $a^2 + x^2 + 2ax - 4$

i. $x^2 - a^2 + x - a^2x$

j. $x^2 - 2xy + y^2 - m^2$

Ejemplo 4:

Factorizar: $x^2 - 4x - 5x + 20$

En este caso, se tiene que agrupar el primer y segundo término $(x^2 - 4x)$, y el tercero y cuarto, pero se debe poner un signo menos antes del paréntesis y cambiar los signos de los términos, así:

$$-(5x - 20)$$

Por tanto, se expresa:

$$x^2 - 4x - 5x + 20 = (x^2 - 4x) - (5x - 20)$$
$$= \quad x(x-4) - 5(x-4) = (x-4)(x-5)$$

8. Factoricemos como el ejemplo anterior los siguientes polinomios:

a. $a - b + 3 - 3b$

b. $x^2 - 3xy - 12y + 4x$

c. $x^3 + 5x^2 - 3x - 15$

d. $a^3 - 5a^2b + ab^2 - 5b^3$

e. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x$

f. $2a^2 - bc - ab + 2ac$

g. $x^3 - x^2 + x - 1$

h. $x^3 - 5x^2y^2 + 3xy^2 - 5y^4$

i. $xy + 2x^2 - 2xy - y^2$

j. $a^2b + b^2 - 2bc - 2a^2c$

9. Nuevamente invitamos al profesor para que valore lo que hemos aprendido y le hacemos preguntas si tenemos dudas sobre el tema.

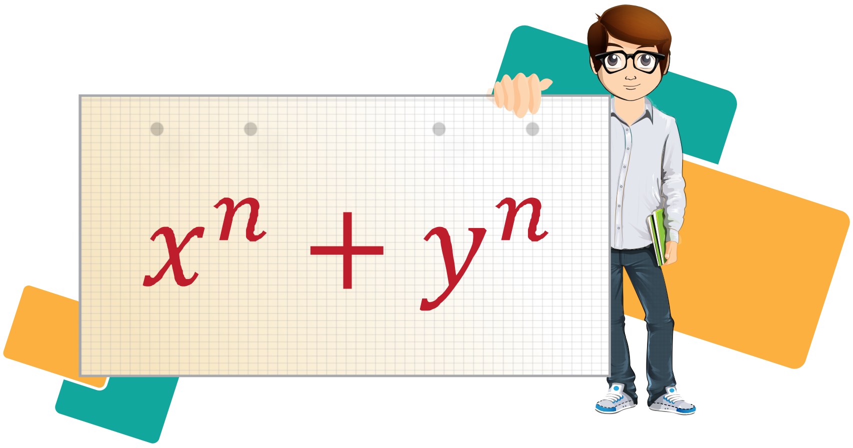
10. Continuamos con otra forma de factorizar:

Suma de Potencias

Cuando el polinomio es de la forma $x^n + y^n$, la factorización únicamente es posible si n es un número impar, y siempre uno de sus factores es la suma de sus respectivas bases por un polinomio de un grado menor al que se le van disminuyendo los exponentes con respecto a una variable y aumentando con respecto a la otra variable, en donde los signos de cada término van alternados.

Ejemplos:

- $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
- $8x^3 + y^3 = (2x)^3 + y^3 = (2x+y)((2x)^2 - (2x)y + y^2) = (2x+y)$ $(4x^2 - 2xy + y^2)$
- $a^4 + b^4 = (a^4 + b^4)\cdot 1$



11. Realizamos los siguientes ejercicios de factorización:

a. $27x^3 + y^3$

b. $27x^3 + 8y^3$

c. $32w^5 + a^5z^5$

d. $a^3x^3 + b^3z^3$

e. $x^7 + y^7$

f. $x^3 + (z+1)^3$

Diferencia de Potencias

Si el polinomio es de la forma $x^n - y^n$, n es impar. Uno de los factores es la resta de las bases, $x - y$ y el otro factor es un polinomio de un grado menor al que se le van disminuyendo los exponentes con respecto a una variable y aumentando con respecto a la otra variable y sus signos son positivos.

Ejemplo 1:

Al factorizar $x^5 - 32$ se tiene: $x^5 - 32 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 2^2x^2 + 2^3x + 2^4)$

$$x^5 - 32 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$$

En caso que n sea par en la expresión $x^n - y^n$, se resuelve como diferencia de cuadrados, así: Se saca la raíz cuadrada de cada término y se organizan dos factores con esas raíces, uno se expresa con una suma y el otro como una resta. Luego, se analiza si puede volver a factorizar uno de los factores.

Ejemplo 2:

$16x^4 - a^4$

Las respectivas raíces son: $4x^2$ y a^2

Luego, queda factorizado:

$16x^4 - a^4 = (4x^2 - a^2)(4x^2 + a^2)$

Como $(4x^2 - a^2)$ se puede factorizar nuevamente, se tiene que expresar así:
$(4x^2 - a^2) = (2x - a)(2x + a)$

Por tanto, factorizar

$16x^4 - a^4 = (4x^2 - a^2)(4x^2 + a^2) = (2x - a)(2x + a)(4x^2 + a^2)$

Ejemplo 3:

$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$

Ahora factorizamos $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
Factorizamos $(x^3 + y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
Por tanto: $(x^6 - y^6) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

12. Teniendo en cuenta el ejemplo, factorizamos lo siguiente:

    a. $x^4 - y^4$

    b. $27x^3 - y^3$

    c. $8x^3 - 64$

    d. $y^4 - 81$

    e. $27x^3 - a^3y^3$

13. Invitamos al profesor, le mostramos los ejercicios resueltos y le solicitamos evaluar la actividad.

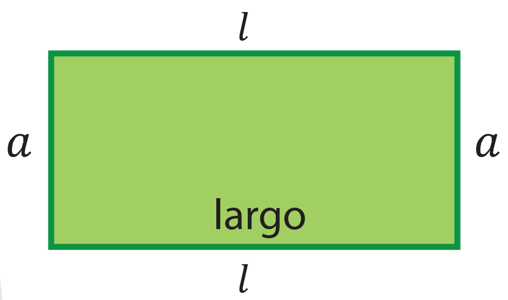
D Aplicación

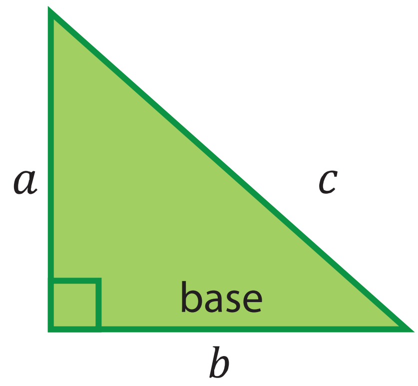
TRABAJO INDIVIDUAL

1. Realizamos la siguiente lectura y anotamos lo más importante en nuestro cuaderno:

   Cuando un rectángulo tiene de largo una cantidad l y de altura a , su área A se determina por la igualdad $A = l \times a$. Por otra parte, en un triángulo rectángulo de base b y de altura a , su área es

$$A = \frac{b \times a}{2}$$





2. En los siguientes ejercicios, calculamos el largo y la altura apropiados para un rectángulo que tiene de área:

   a. $7x^2 + 7x$

   b. $5z^2 + 8z + 5z + 8$

   c. $8y^3 + 1$

   d. $9x^2 - 49$

3. En los siguientes ejercicios, calculamos la base y la altura apropiadas para un triángulo rectángulo que tiene de área:

   a. $16x^2 - 4x$

   b. $8y^3 + 64$

   c. $7x^2 + 7x + 3x + 3$

   d. $z^3 + 125$

4. Daniel elabora unas expresiones para indicar la cantidad de basura (x) que se produce cada día (y) en el país. Relacionamos la expresión con su correspondientes factorización:

a. $81x^2 - 54xy + 9y^2$	( ) $(\frac{1}{2}x^3 - 6y)^2$
b. $\frac{4}{36}x^4 + \frac{10}{3}x^2y^2 + 25y^4$	( ) $(2xy + 9)^2$
c. $4x^2y^2 + 36xy + 81$	( ) $(\frac{2}{5}x^2y + \frac{1}{2})^2$
d. $\frac{1}{4}x^4 - 6x^3y + 36y^2$	( ) $(9x - 3y)^2$
e. $\frac{4}{25}x^4y^2 + \frac{2}{5}x^2y + \frac{1}{4}$	( ) $(\frac{1}{3}x^2 + 5y^2)^2$

E Complementación

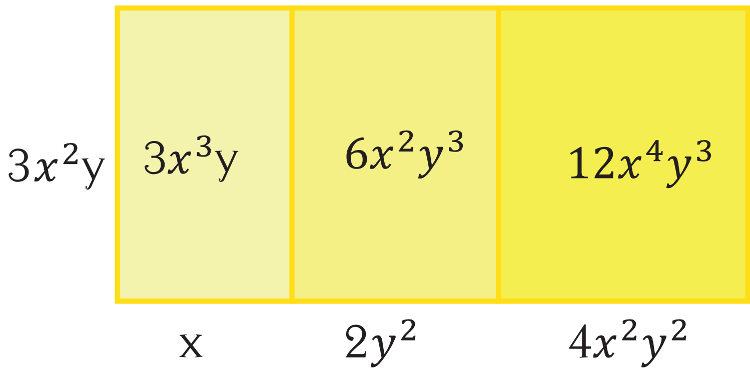
TRABAJO EN PAREJAS

1. Para aprender a representar geométricamente la factorización, tenemos en cuenta los siguientes pasos:

✓ Factorización por factor común

$$3x^3y + 6x^2y^3 + 12x^4y^2$$

Geométricamente se representa así:



Teniendo en cuenta la medida de sus lados, podemos encontrar que la altura es común a los tres rectángulos, lo que nos indica que este es el factor común.

Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$3x^2y\,(x + 2y^2 + 4x^2y)$$

Donde la altura es $3x^2y$ y la base es $x + 2y^2 + 4x^2y$

2. Ahora factoricemos los siguientes polinomios, utilizando el método geométrico expuesto anteriormente. No olvidemos realizar la gráfica correspondiente:

   a. $25m^4n^2p^5 + 15m^2np^3t^2 + 55m^3np^4r + 5m^2np^2$

   b. $16x^3y^2z + 24x^2y^3z + 32xy^2z^3 + 48x^2yz^2$

   c. $45x^4yz^5 + 90w^3xy^4z + 9x^2yz^2$

   d. $25m^4n^2p^5y^2 + 125m^2xn^3y^2 + +5m^2nxy^2z$

3. Compartimos los ejercicios ante el docente para su correcta verificación.

Evaluación por competencias

1. El largo y el ancho que debe tener un rectángulo cuya área mide $a^4 - b^4$ son respectivamente:

A. $(a-b)^4$

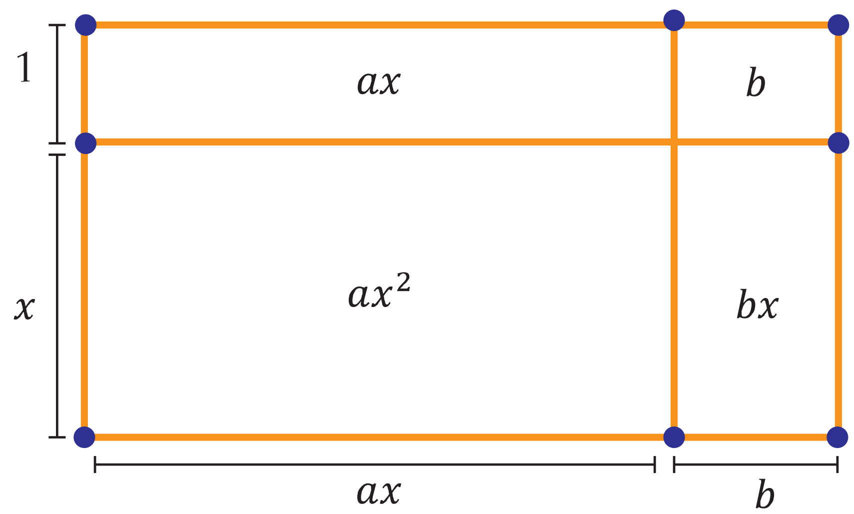
B. $(a+b)^2\,(a-b)^2$

C. $(a+b)^3(a-b)$

D. $(a^2-b^2)\,(a^2+b^2)$

1

2. El polinomio adecuado para representar el área de la figura es:



A. $ax^2 - ax + bx - b$

B. $ax^2 + ax - bx - b$

C. $ax^2 - ax - bx + b$

D. $ax^2 + ax + bx + b$

2

3. Indico el polinomio que posee factor común:

A. $5x^2 + 12x^2y + 6x - 2y$

B. $5x^3y^3 + 5x^2y + 20xy^2 - 35xy^3 - 15x^3y - 30xy$

C. $5x^3y^3z^3 + 5x^2yz^2 + 21xy^2z^2 - 35xy^3z - 15x^3yz - 12xyz$

D. $5x^3y^3 + 5xy + 21xy^2 - 35xy^3 - 15x^3y - 12xy$

3

4. Cuál es el término que falta para que la siguiente expresión algebraica pueda factorizarse por agrupamiento:

$6x^2 - 2x - \underline{\ ?\ } + 25y^2$

A. $15xy^2$

B. $30y^3$

C. $75xy^2$

D. $10y^3$

4

5. La siguiente expresión se factoriza por el método:

$8 - (x - y)^3$

A. Diferencia de cuadrados.

B. Diferencia de cubos.

C. Suma o diferencia de potencias iguales.

D. Factor común por agrupamiento.

5

Glosario

- **Casos de factorización:** Corresponde a los diferentes métodos que existen para factorizar una expresión algebraica.
- **Factorización:** Es la descomposición de una expresión como producto de sus divisores primos.
- **Mínimo Común Múltiplo:** Entre dos o más expresiones, es el menor de los múltiplos que estos tienen en común.
- **Procedimiento algebraico:** Manera de resolver una situación matemática a partir del uso de herramientas algebraicas.
- **Procedimiento geométrico:** Uso de instrumentos geométricos para resolver una situación.
- **Procedimiento numérico:** Resolución de situaciones mediante el uso de las operaciones básicas de los números reales.