Matemáticas

8°

Octavo

Escuela Nueva - Escuela Activa

Módulo de

Matemáticas

UNIDADES

1 - 2

PRESENTACIÓN

Uno de los insumos importantes del programa Escuela Nueva – Escuela Activa lo constituyen los materiales de interaprendizaje para estudiantes. El valor pedagógico que tienen las guías o módulos en la aplicación de los principios de la Escuela Nueva – Escuela Activa, se asocia con el desarrollo de competencias básicas, ciudadanas, laborales y demás competencias necesarias para el buen desempeño social de los estudiantes; además, la estructura metodológica del material, favorece el trabajo colaborativo y en equipo, la participación, la autonomía, las relaciones escuela – comunidad- escuela, la creatividad y el pensamiento lógico, a la vez que forma a los estudiantes en las diferentes disciplinas del conocimiento.

El presente módulo de interaprendizaje de Matemáticas para grado 8° fue construido en el marco de una Alianza de amplia trayectoria, constituida por el Comité de Cafeteros de Caldas y la Fundación Luker, y hace parte de las estrategias del Plan de Mejoramiento al Desempeño propuesto por estas dos instituciones, cuyo propósito fundamental es intervenir en la calidad de la educación básica de establecimientos educativos rurales y urbanos vinculados al programa Escuela Nueva y Escuela Activa Urbana.

El diseño de este módulo se realizó en concordancia con el modelo pedagógico activo y responde a los lineamientos de política del Ministerio de Educación Nacional en cuanto a los estándares curriculares y el enfoque de formación por competencias, además, introduce un componente de apoyo en la evaluación, que había sido ampliamente demandado por los docentes de Escuela Nueva y Escuela Activa Urbana.

Invitamos a los maestros y estudiantes a asumir este material como uno de los recursos que apoya el desarrollo del plan curricular. Su aprovechamiento eficaz, requiere por tanto, de la mediación permanente del maestro y en ningún caso pretende reemplazar su importante labor en el aula de clase.

La Fundación Luker y el Comité de Cafeteros de Caldas resaltan y agradecen a todas aquellas personas e instituciones que colaboraron en la construcción de esta nueva versión de Módulos, con la que esperamos contribuir para que los niños, niñas y jóvenes de Caldas y de Colombia, puedan tener una mejor educación como una condición de equidad, que les dará mayores posibilidades de alcanzar un proyecto de vida digno, donde todos y todas tengan igual oportunidad.

Fundación Luker
Comité de Cafeteros de Caldas
Manizales, agosto de 2014

CRÉDITOS MÓDULOS MATEMÁTICAS GRADO OCTAVO
COMITÉ DIRECTIVO

Elsa Inés Ramírez Murcia
Coordinadora Desarrollo Social
Programas de Educación
Comité de Cafeteros de Caldas

Pablo Jaramillo Villegas
Gerente Educación Fundación Luker

Santiago Isaza Arango
Director Educación Fundación Luker

COORDINACIÓN

Alexander Ossa Calvo
Comité de Cafeteros de Caldas

Paola Andrea Vallejo Aristizábal
Comité de Cafeteros de Caldas

EQUIPO TÉCNICO

María Piedad Marín Gutiérrez
Consultora Fase de Planeación

Diego Villada Osorio
Consultor Mallas Curriculares

Bibiana Yaneth Pérez Alcalde
Revisión Metodológica

CORPOEDUCACIÓN

Liz Stefany López Ospina
Coordinadora
Luz Alexandra Oicatá Ojeda
Revisión Disciplinar

AUTORES

Ligia Inés García Castro
Néstor Jaime Ríos Zuluaga
Leonardo López Orozco

ELABORACIÓN DE MALLAS CURRICULARES

Yolanda de Las Mercedes Beltrán de Covaleda, (Universidad de Antioquia-Acompañamiento Técnico), Jhoana Alexandra Muñoz Nieto, Carlos Alberto Bastos Sánchez, Jhon Fredy Ossa Calvo, Francisco Vallejo García, María Rubiela Castrillón Hurtado, Gonzalo Alarcón Cortez, Manuel Andrés Correa Gallego, Viviana Marcela Vásquez Osorio, Ligia Inés García.

VALIDACIÓN

Humberto Marín Mazo, Valentina Osorio Morales, Marta Jhanet Mondragón Valencia, Diego Alberto Toro Ortiz, Jhoiner Alfonso Mejía Castañeda, Paula Marcela Castrillón, Carlos Andrés Zuluaga, Jhon Jairo Quintero.

DISEÑO PROYECTO GRÁFICO Y DIAGRAMACIÓN

Editorial Blanecolor S.A.S.

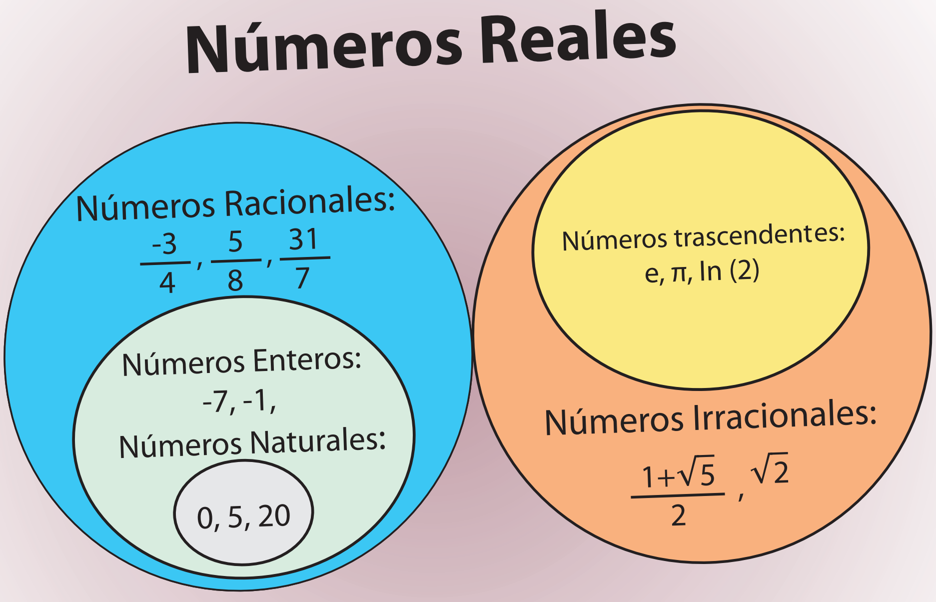
IMPRESIÓN

Carvajal Soluciones de Comunicación S.A.S. Marzo 2020

ISBN: 978-958-8702-65-0

CONTENIDO

Unidad 1



Ampliaremos el sistema numérico para dar soluciones a nuevas situaciones matemáticas

Estándares

- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.

- Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos, provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas y entrevistas).

- Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y muestro sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.

Competencias

Matemáticas:

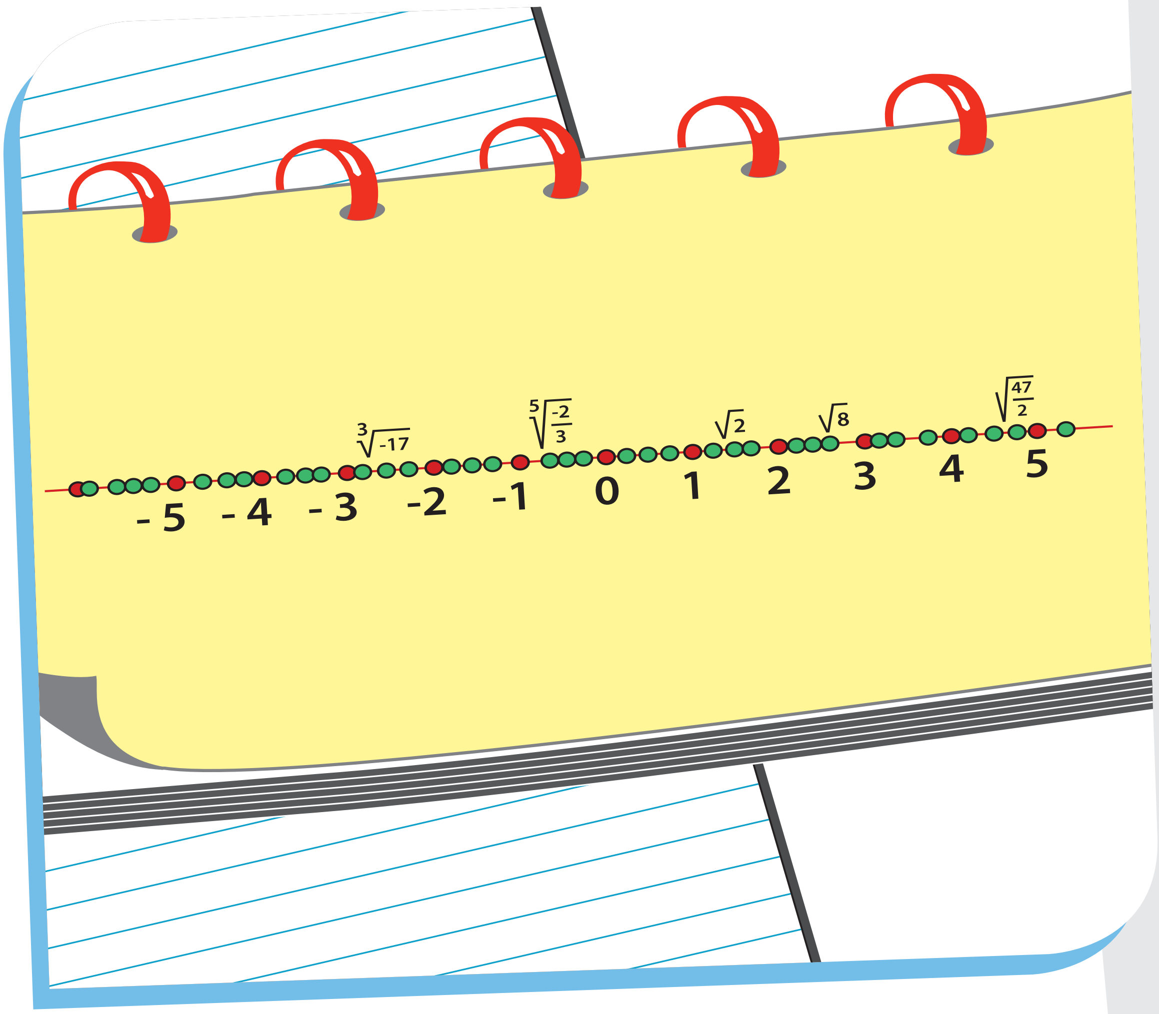
- Reconozco la generalización en expresiones algebraicas, Teorema de Pitágoras y otras relaciones geométricas, para contextualizar los números reales y solucionar situaciones problema.

Ciudadanas:

- Participo o lidero iniciativas democráticas en mi medio escolar o en mi comunidad, con criterios de justicia, solidaridad y equidad, y en defensa de los derechos civiles y políticos.

Guía 1

Conozcamos los números irracionales



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Reconoce las diferentes representaciones de los números irracionales.

Procedimental

- Emplea los modelos geométricos para determinar números irracionales.

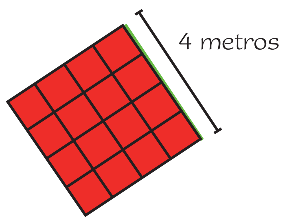
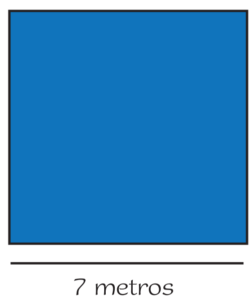
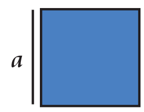
Actitudinal

- Hace uso adecuado de los instrumentos de medida.

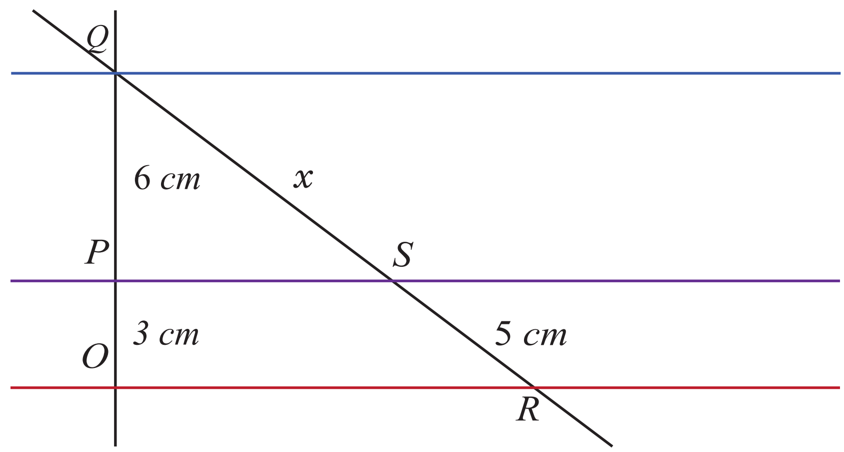
A Vivencia

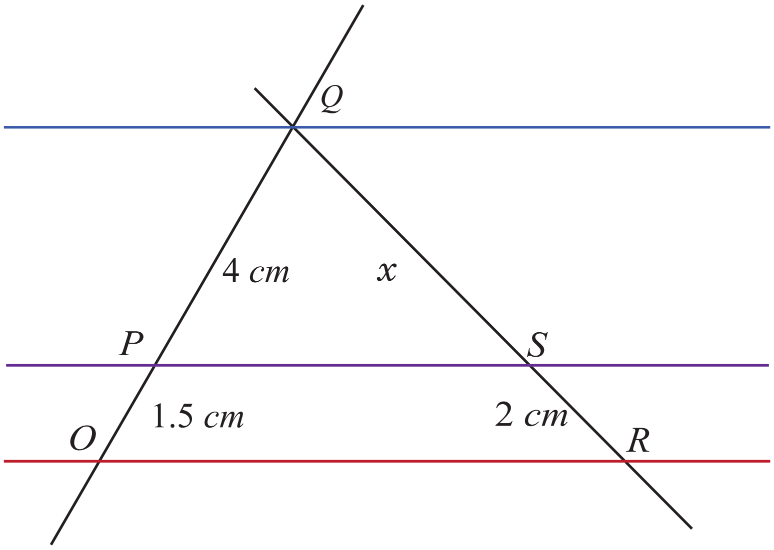
TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo las siguientes situaciones en mi cuaderno, teniendo en cuenta el manejo de la regla para dibujar cada una de las formas geométricas. Me dirijo al CRA para conseguir los siguientes materiales: Reglas, compás y escuadra; que me ayudarán a desarrollar las actividades que se muestran a continuación:

a. Si la longitud del lado de un cuadrado es 4 m, ¿cúal será la medida de la superficie?	b. Si la longitud del lado del cuadrado es de 7 m, ¿cúal será la medida de la superficie?	c. Si el lado del cuadrado mide (a) metros, ¿cuál será la medida de la superficie?
		

2. Aplico el Teorema de Tales para calcular la distancia x del segmento $\overline{QS}$ dado en las siguientes figuras. Recuerdo emplear la regla y la escuadra para construirlas:





TRABAJO EN PAREJAS

3. Comparo con un compañero la respuesta del ejercicio 2. Entre los dos llegamos a definir el resultado que consideramos correcto.

4. Calculamos la longitud del segmento $\overline{AB}$ si:

   a. $\overline{CD} = 3\ cm$ y la razón entre ellos es $r = 0.5$.

   b. $\overline{CD} = 8\ cm$ y la razón entre ellos es $r = \frac{1}{5}$.

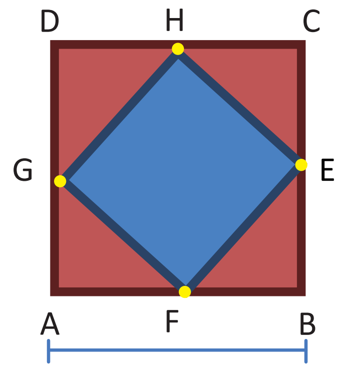
5. Invitamos al profesor para que evalúe las actividades que desarrollamos.

BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

Nos reunimos en equipos de tres y asignamos los roles que consideremos necesarios para el buen desarrollo de las siguientes actividades:

1. Observamos y consignamos en el cuaderno los cuadrados ABCD y EFGH de la figura que aparece aquí:



Sabiendo que el área del cuadrado es l^2, podemos decir que el área del cuadrado ABCD es 4 cm^2.

En cuanto al cuadrado EFGH, sabemos que el área es igual a 2 cm^2.

Para determinar la longitud del lado de ese cuadrado, tendríamos que sacar la raíz del área:

$$l = \sqrt{Área\ del\ cuadrado}$$

Entonces decimos que el lado FG = $\sqrt{2\ cm^2}$ = $\sqrt{2}$ cm

Si la raíz cuadrada de 2, la aproximáramos con la calculadora a números decimales tendríamos 1,414213562373095.

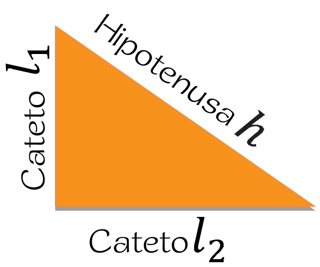
Esta aproximación corresponde a un decimal no periódico e infinito y pertenece a los números **irracionales.**

Por lo tanto el número $\sqrt{2}$ es un número **irracional.**

Una de las características de los números irracionales es que su representación decimal es infinita y no periódica.

La justificación del porque se da la existencia de los números irracionales surge del hecho de que se comenzaron a encontrar cantidades que no se podían expresar de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, entonces estos se empezaron a llamar irracionales, es decir, no se pueden representar como un cociente. Un gran aporte a esta construcción fue el teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras establece que para todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (el lado opuesto del ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos (los lados del ángulo del recto).



En términos matemáticos se escribe así:

$$h^2 = (l_1)^2 + (l_2)^2$$

Para el caso que tenemos, ambos catetos miden 1 cm. Realizamos los reemplazos en la fórmula:

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$

$$h^2 = 1 + 1$$

$$h^2 = 2$$

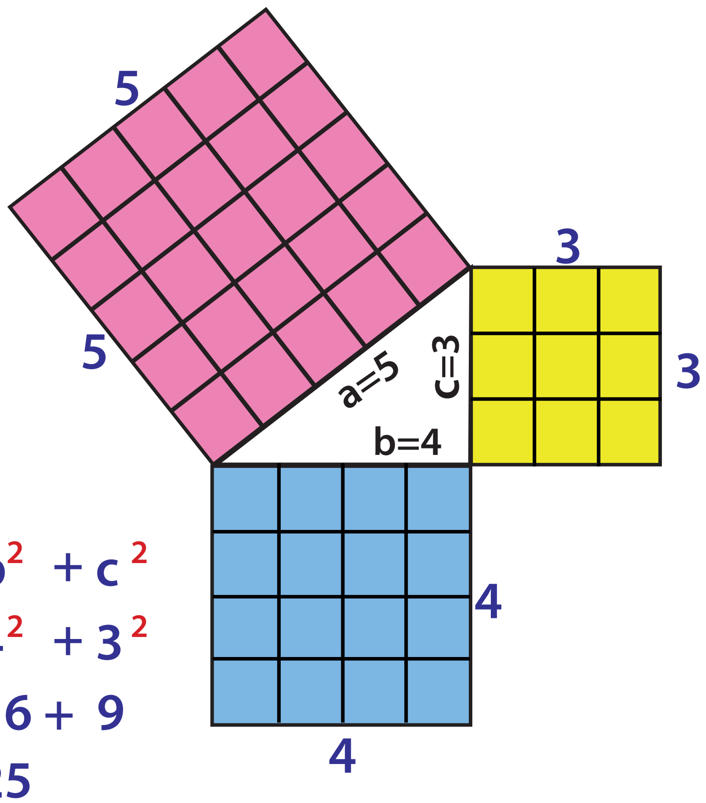
Ahora sacamos la raíz a ambos lados:

$$\sqrt[2]{h^2} = \sqrt{2}$$

$$h = \sqrt[2]{2}$$

Así mismo, el Teorema lo podemos representar geométricamente, de esta manera:

Donde 3 y 4 son catetos y 5 es la hipotenusa.



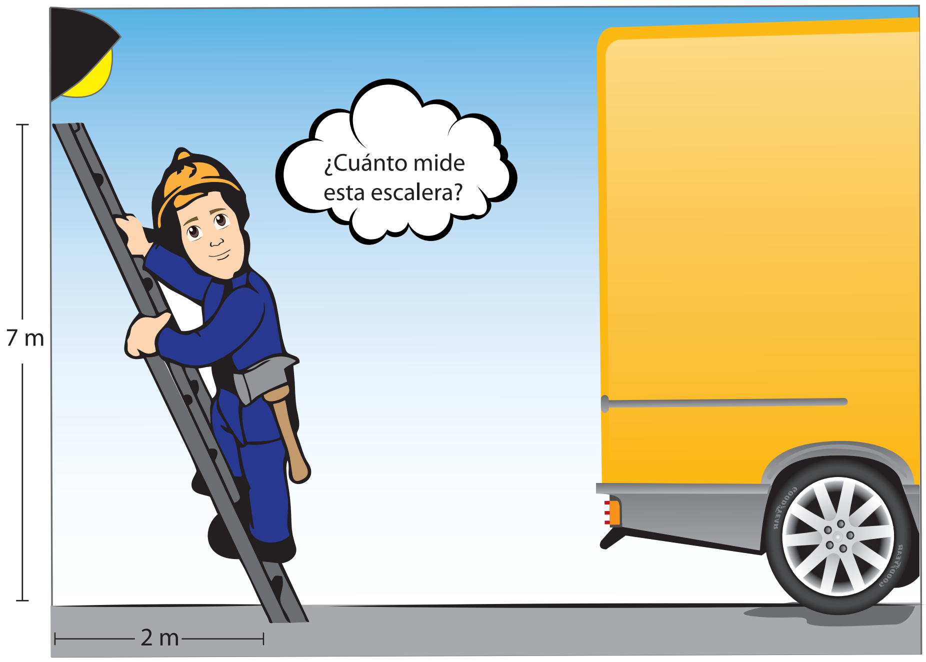
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$25 = 16 + 9$$

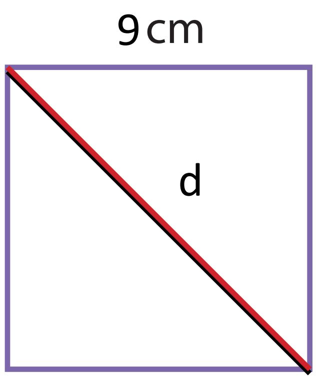
$$25 = 25$$

2. Utilicemos y pongamos en práctica el Teorema de Pitágoras para resolver las siguientes situaciones:

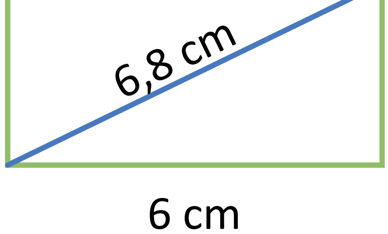


a. ¿Cómo podemos conocer la longitud de esta escalera, que corresponde a la hipotenusa, si ya conocemos la longitud de sus catetos?

b. Calculamos la diagonal de un cuadrado de 9 cm de lado:



c. Calculamos la altura de un rectángulo, cuya diagonal mide 6,8 cm y la base 6 cm:

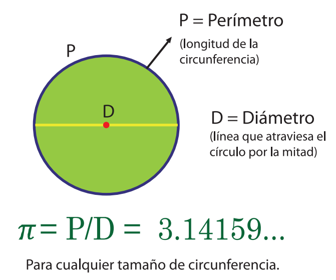


3. Continuamos con la construcción de otros irracionales:

El cálculo de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es lo que genera el número, que se lee “**Pi**”. Aquí la representación simbólica:

$$\pi = \frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{dos\ veces\ radio} = \frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{diamétro} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot r}$$

El número **Pi** también es un número irracional, ya que no se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$, y a nivel de decimal es infinito y no periódico.



El valor aproximado de Pi es 3,1415926535 aunque la presentación que más se utiliza es 3,1416.

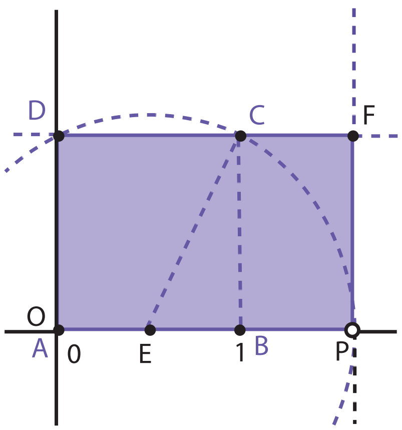
Otro irracional conocido es el denominado **número de oro:**

El número de oro, Φ (FI), también conocido como la **proporción áurea**, es uno de los números irracionales que aparecen relacionados con elementos de la naturaleza y el arte.

Se considera que su descubrimiento se dio en la Grecia clásica (siglo V a. C.), a partir del estudio de las proporciones y de la media geométrica de un segmento. Ya era perfectamente conocido y utilizado en los diseños arquitectónicos, por ejemplo el Partenón y los escultóricos pero, recién en el siglo XX, fue cuando el número de oro recibió su símbolo Φ (FI). Su valor numérico aproximado es de 1,6180339887.
Actualmente, todas las tarjetas de crédito o débito tienen que cumplir con la proporción áurea.

Un rectángulo áureo es aquel que se puede dividir en un cuadrado y otro rectángulo menor, pero semejante al inicial.

A continuación se muestra cuál debe ser la proporción entre los lados de un rectángulo para que este sea áureo:



Partimos inicialmente de un cuadrado ABCD, donde su lado mide 1 unidad (el cuadrado puede tener cualquier medida y el resultado numérico de Φ sería el mismo). En el cuadrado ABCD se halla el punto medio E del lado AB, luego, con centro en este punto E y con un radio igual a la distancia EC, se se traza un arco de circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj hasta que corte a la prolongación de la línea horizontal AB, obteniendo así el punto P y se completa la construcción hasta obtener el rectángulo APFD.

Al tomar los lados de este rectángulo y hallar la proporción entre ellos se obtiene una relación áurea; es decir, si se divide el lado mayor entre el lado menor se obtiene el valor de Φ, que corresponde a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dando como resultado aproximado el siguiente decimal: 1,61803398.

Hay tres números irracionales cuyas aplicaciones, tanto en matemáticas como en otras disciplinas, son tan numerosas e importantes que podríamos denominarlos como los irracionales famosos. Son los llamados número Pi (π), número e y número de oro (Φ). Dos de ellos, π y Φ, ya eran conocidos por los griegos varios siglos antes de Cristo; el número e es ampliamente utilizado desde el siglo XVIII.

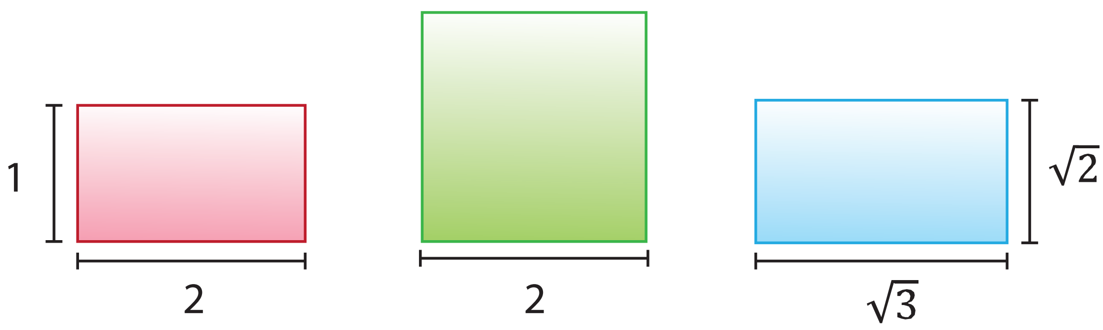
En conclusión: Los números irracionales son aquellos que se expresan con raíces no exactas o relaciones con los logaritmos, las potencias o los números especiales, como los mencionados anteriormente.

4. Resolvemos las siguientes actividades:

a. Determinamos cuáles de los siguientes números son irracionales, haciendo uso de la calculadora:

- ✓ $\sqrt{125}$
- ✓ $\sqrt[3]{12}$
- ✓ $3\sqrt{2}$
- ✓ $\sqrt[3]{729}$
- ✓ $-\sqrt{10}$

b. Determinamos el número irracional que representa la longitud de la diagonal en cada rectángulo:



c. Si un cuadrado tiene un área de 25 cm^2 , ¿cuál será la medida de su diagonal? Y si tiene un área de 52 m^2, ¿cuánto medirá el lado?

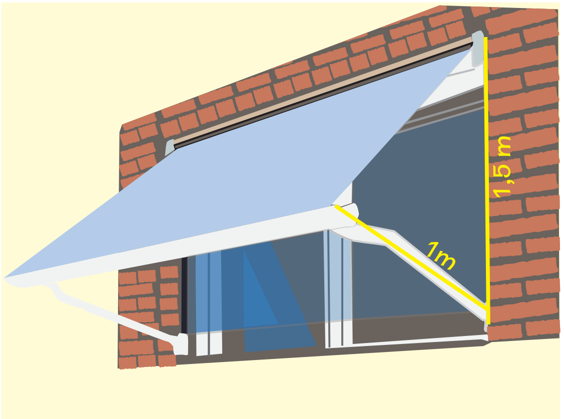
5. Convocamos al profesor para que nos aclare cada una de las inquietudes y para que nos revise las actividades desarrolladas hasta el momento.

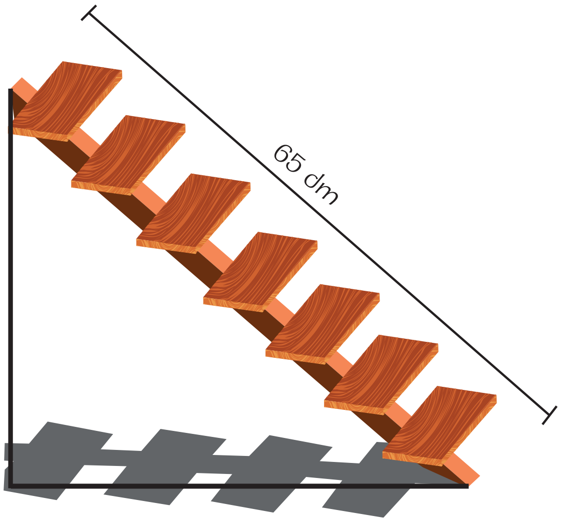
D Aplicación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo en mi cuaderno las siguientes situaciones, las cuales me permiten reconocer la utilidad de los números irracionales:

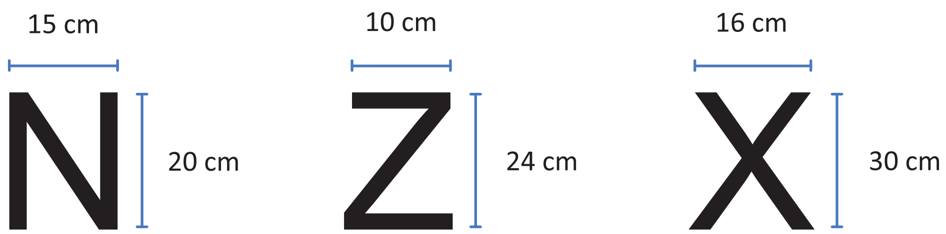
a. En un ventanal se quiere c olocar un toldo. Si tiene de largo y de ancho las medidas que aparecen en la imagen, ¿cuál sería el ancho de la tela?



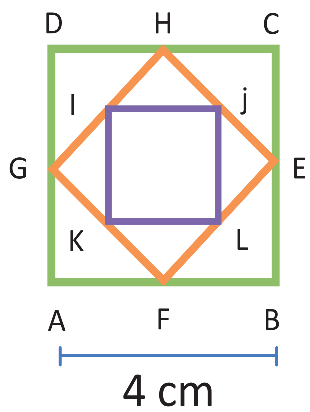


b. ¿A qué distancia de la pared se puede colocar una escalera de longitud de 65 dm, para que en la parte superior se apoye a una altura de 52 dm?

c. Calculo los centímetros de cuerda que se necesitan para formar las siguientes letras:



d. Determinamos el área de los cuadrados IJKL y EFGH, sabiendo que la longitud del lado del cuadrado ABCD es de 4 cm:



TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparamos los resultados que obtuvimos de manera individual en las situaciones anteriores. Llegamos a un consenso para determinar si alguno de los dos tuvo errores y explicamos las razones para que esto ocurriera.

3. Para comprobar lo aprendido acerca de los dos irracionales famosos, resolvemos las siguientes situaciones:

   a. El número de oro no sólo lo encontramos en la naturaleza o en las construcciones antiguas, diariamente manejamos objetos en los cuales se ha tenido en cuenta la proporción áurea para su elaboración. Uno de ellos es la tarjeta de crédito; inclusive el carnet del colegio tiene la proporción de un rectángulo áureo. Tomamos las medidas del carnet del colegio y comprobamos si es un rectángulo áureo.

   b. Tomamos algunas medidas de los siguientes objetos circulares: Un plato, una tapa de alguna botella y una moneda.

✓ Tomamos la medida de la longitud de la circunferencia de cada uno de los objetos.

✓ Calculamos el diámetro de cada uno de estos objetos circulares.

✓ Luego dividimos la longitud de la circunferencia y su diámetro.

c. De acuerdo a esto, respondemos a las siguientes preguntas:

✓ ¿La cantidad que obtenemos a que número corresponde?

✓ ¿Es racional o irracional?

4. En plenaria realizamos y compartimos nuestras observaciones sobre cada una de las situaciones anteriores. Consignamos en los cuadernos las conclusiones generadas durante la actividad y la plenaria.

E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

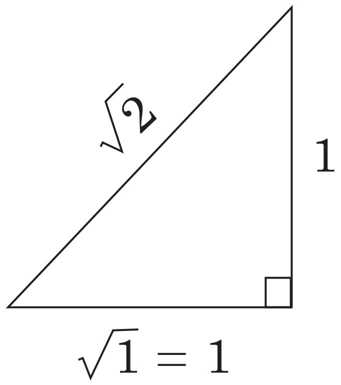
1. En grupos de tres personas realizamos la lectura sobre "La espiral de Teodoro". Escribimos en nuestros cuadernos los aspectos más importantes sobre lo leído y dibujamos la espiral en una hoja blanca a partir de los datos que se presentan en el texto:

LA ESPIRAL DE TEODORO

Una forma de construir los números irracionales que surgen al aplicar la raíz cuadrada de un número entero positivo ($(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots)$) es mediante la **espiral de Teodoro o espiral pitagórica**. Esta se forma por triángulos rectángulos de la siguiente manera:

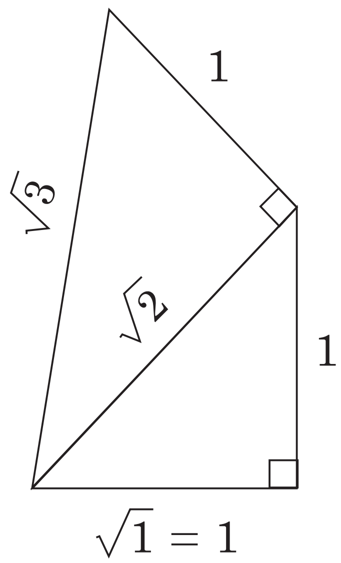
a. En primer lugar se dibuja el triángulo rectángulo de base 1 cm y de altura 1 cm, que por el Teorema de Pitágoras el triángulo tiene una hipotenusa de $\sqrt{2}$ cm, tal como se observa en la gráfica:

$$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



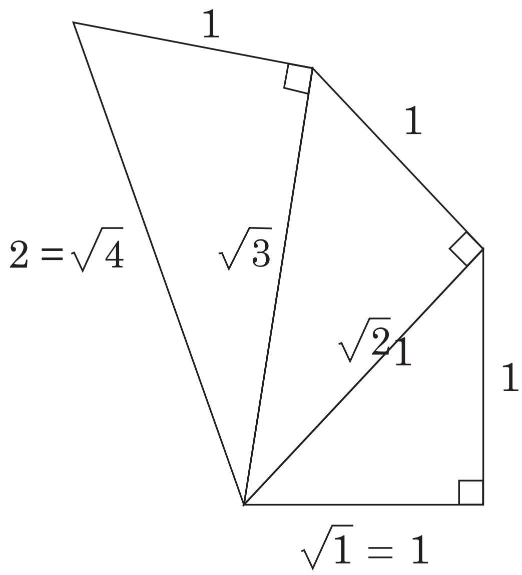
b. Sobre la hipotenusa calculada se dibuja un triángulo rectángulo de base $\sqrt{2}$ cm y altura 1 cm, y de nuevo por el Teorema de Pitágoras, la nueva hipotenusa es de $\sqrt{3}$ cm:

$$h = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$



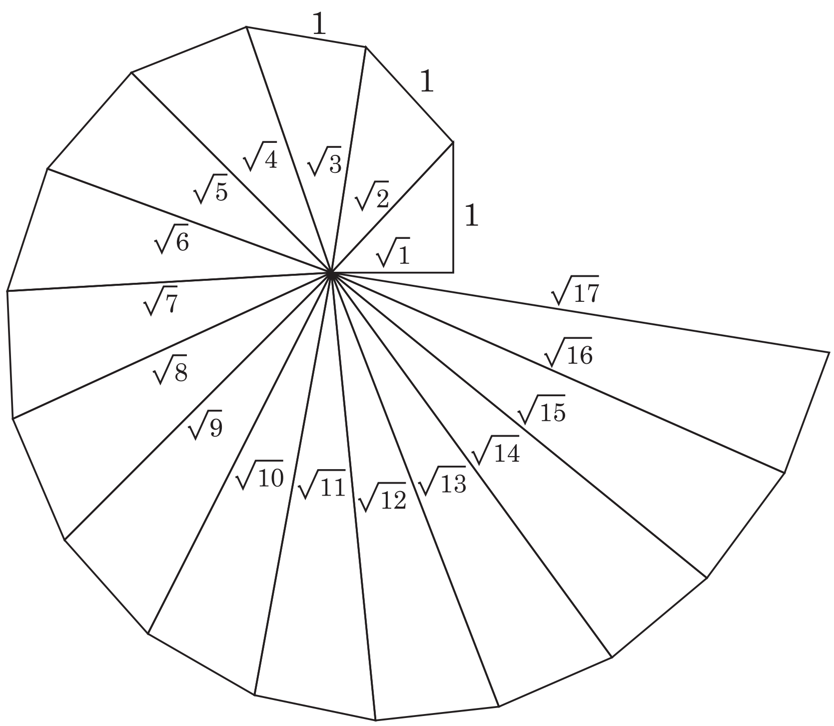
c. Nuevamente sobre el último triángulo se construye otro triángulo rectángulo de base $\sqrt{3}$ cm y de altura 1 cm. Para este nuevo triángulo, su hipotenusa mide $\sqrt{4}$ cm, es decir 2 cm:

$$h = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$



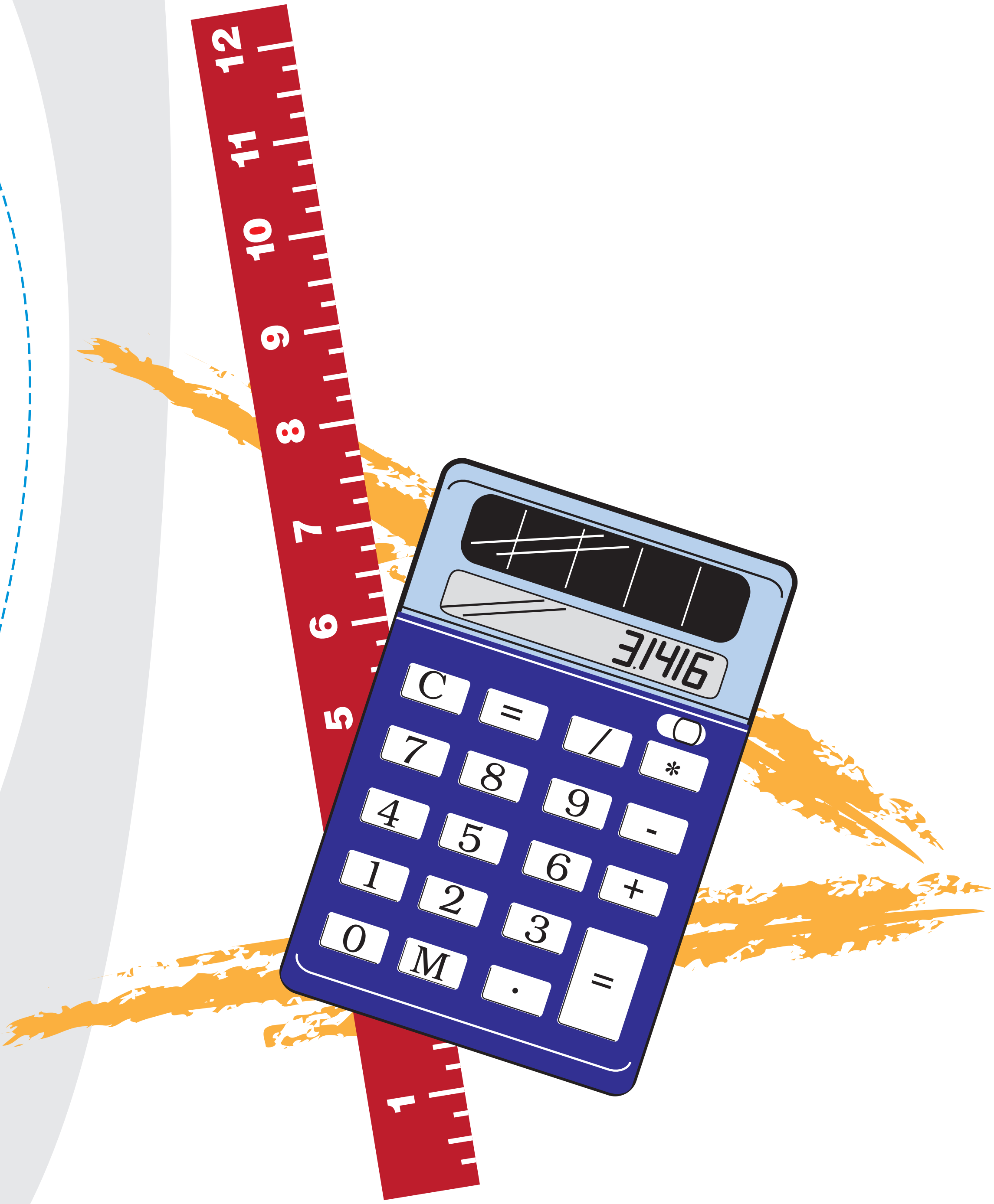
d. Construyendo otro triángulo con las mismas características de los anteriores (triángulo rectángulo de base 2 cm y altura 1 cm), tendremos uno cuya hipotenusa es $\sqrt{5}$ cm. Aplicando este procedimiento más veces se podrán construir las distancias $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ y en adelante.

La siguiente figura muestra la construcción hasta el número $\sqrt{17}$:



2. Con la ayuda de una regla estimamos las medidas de cada hipotenusa dibujada y determinamos su valor con la calculadora, teniendo en cuenta tres cifras decimales.

3. Presentamos el cuaderno al profesor para su valoración y sustentamos nuestras respuestas.



Evaluación por competencias

1. Determino si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y argumento mi respuesta a través de un ejemplo:

A. Algunos números racionales son enteros. ( )

B. Todos los números irracionales tienen expresión decimal periódica. ( )

C. Todos los números racionales tienen expresión decimal periódica infinita. ( )

D. Algunos números irracionales se pueden construir geométricamente. ( )

E. Los números irracionales representan inconmensurabilidad. ( )

1

2. Un campesino quiere cercar su potrero que tiene forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 64 m y 54 m. ¿Qué cantidad de cerca necesita para poder cubrir todo el potrero?:

A. 201,737685 m

B. 201,8 m

C. 201 m

D. 203,74 m

2

3. De acuerdo con la situación anterior , explico la siguiente afirmación:

"Al revisar la cantidad de cerca que se necesita, el campesino se da cuenta que no puede determinar la cantidad exacta que necesita".

4. Si el radio del ojo humano es de 0,6 cm. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia del ojo?:

A. 3,9 cm

B. 3, 65 cm

C. 3,88 cm

D. 3,76 cm

4

5. Ana quiere de regalo de cumpleaños un TV. Su esposo Miguel lo encargó y le llegará en 8 días. El vendedor, algo inexperto, le dijo a Miguel que la pantalla del TV que compraría tenía de largo 419.1 mm y de alto 330.2 mm. ¿Cómo podría saber Miguel el área de su nuevo televisor?

Glosario

- **Catetos:** Los dos lados menores de un triángulo que forman un ángulo recto.

- **Conmensurable:** En matemáticas, es la característica de dos números $\propto$ y b que no sean cero y que la razón entre los dos sea un número racional.

- **Escuela Pitagórica:** Fue una organización griega de astrónomos, músicos, matemáticos y filósofos, que creían que todas las cosas son, en esencia, números. El grupo mantuvo en secreto el descubrimiento de los números irracionales y la leyenda cuenta que un miembro fue ahogado por no mantener el secreto.

- **Hipotenusa:** Línea que se extiende por encima del ángulo recto formando con los catetos un triángulo rectángulo.

- **Inconmensurabilidad:** En matemáticas, no es la imposibilidad de comparación, sino la ausencia de un factor común que pueda ser expresado. Se analiza el ejemplo de la diagonal de un cuadrado con relación a su lado. La razón de la diagonal d de un cuadrado y su lado l es inconmensurable, que es lo mismo que decir irracional.

- **Irracional:** Es un número que no se puede escribir en forma de razón.

- **Partenón:** Era considerado «la residencia de Atenea Partenos». Es uno de los principales templos dóricos que aún se conservan, construido entre los años 447 y 432 a. C.

- **Proporción áurea:** Se trata de un irracional (decimal infinito y no periódico) descubierto en la antigüedad, no como "unidad", sino como relación o proporción entre dos segmentos de una recta.