



Aprendamos algo más  
sobre contar

## Indicadores de desempeño

### Conceptual

- Reconoce las relaciones entre conjuntos y técnicas de conteo.

### Procedimental

- Resuelve diferentes situaciones de conjuntos y técnicas de conteo.

### Actitudinal

- Respeta las decisiones de grupo para llevar a cabo un procedimiento matemático.

# A Vivencia

## TRABAJO INDIVIDUAL

1. Respondo en mi cuaderno las siguientes preguntas a partir de la información que se presenta. Justifico cada respuesta:

En un análisis de la crisis ambiental del país se llegaron a estudiar 22 municipios de Colombia, en el cual se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- 12 municipios tienen problemas de contaminación del agua.
- 11 municipios tienen problemas de contaminación del aire.
- 11 municipios tienen problemas de erosión.
- 6 municipios tienen problemas de contaminación del agua y erosión.
- 5 municipios tienen problemas de contaminación del agua y el aire.
- 3 municipios tienen los tres tipos de problemas ambientales.

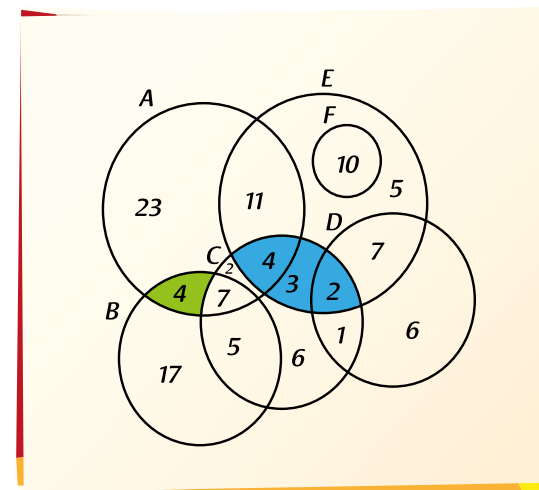
a. ¿Cuántos municipios sólo tienen problemas de contaminación del agua?

b. ¿Cuántos municipios no tienen problemas de contaminación del aire?

2. Edilson realizó una encuesta sobre las formas de solucionar conflictos y obtuvo las siguientes respuestas:

1. Reconocer sus sentimientos ante el conflicto (conjunto A).
2. Escuchar al otro (conjunto B).
3. Crear opciones de solución (conjunto C).
4. Comprometerse a cumplir el acuerdo (conjunto D).
5. Evitar agresiones verbales o físicas (conjunto E).
6. Acomodarse a la solución (conjunto F).

La población que estableció algunas de las formas de solución se presenta en el siguiente diagrama de Venn:



- Escribo tres enunciados distintos sobre la información presentada en el diagrama.
- Escribo el enunciado que corresponde al relleno azul. Justifico mi respuesta.
- Escribo el enunciado que corresponde al relleno verde. Justifico mi respuesta.
- ¿De cuántas maneras distintas puedo solucionar un conflicto según la información del diagrama? Anoto la respuesta y la justifico.

## TRABAJO EN EQUIPO

3. Comparamos las respuestas y analizamos los datos obtenidos.
4. Invitamos al profesor a revisar las actividades y le pedimos que nos aclare las dudas presentadas.
5. Organizamos una puesta en común de las posiciones de los grupos de trabajo que dé respuesta a la pregunta: ¿Cómo utilizamos los diagramas de Venn para organizar información?



## Fundamentación Científica y Ejercitación

## TRABAJO EN EQUIPO

1. Teniendo en cuenta la distribución de roles en el interior del equipo, le solicitamos respetuosamente al compañero indicado realizar la siguien-

te lectura, tomamos nota de los aspectos más importantes y elaboramos un mapa conceptual:

Es importante conocer sobre los conjuntos y algunas de sus propiedades porque nos ayuda a comprender algunas técnicas de conteo y algunas aplicaciones; además, existen muchas ideas matemáticas que se expresan con el lenguaje de conjuntos.

### Elementos de un conjunto

Un ejemplo de conjuntos son los estudiantes de la escuela Manuela Beltrán, cada uno de ellos son miembros o elementos de la escuela donde están matriculados. En este caso, la escuela Manuela Beltrán es el conjunto y cada estudiante matriculado es un **elemento del conjunto**. Un estudiante que no esté inscrito no pertenece al conjunto y si no hay estudiantes matriculados en la escuela entonces este será un **conjunto vacío**.

Se considera como **conjunto** aquel que tiene una propiedad o es una colección que puede tener cero, uno o varios elementos. A los conjuntos se les denota con letras mayúsculas. Existen dos formas de expresar un conjunto: **Por comprensión**; se da una característica del conjunto, y **por extensión**; se da la lista de elementos.

#### Ejemplo 1:

- $A = \{x/x \text{ es una vocal}\}$  Conjunto dado por comprensión.
- $A = \{a, e, i, o, u\}$  Conjunto dado por extensión.

La relación entre un elemento y un conjunto se denomina **pertenencia**. Se representa con el símbolo  $\in$ .

#### Ejemplo 2:

- 2 no pertenece a A, se simboliza  $2 \notin A$ .
- e pertenece a A, se simboliza  $e \in A$ .

Existe una relación entre conjuntos que se llama **contenencia** y se considera cuando todos los elementos de un conjunto se encuentran en el otro. Esta se denota con el símbolo  $\subset$ .

#### Ejemplo 3:

Consideramos los conjuntos  $A = \{1,3,4,5,6\}$ ,  $B = \{1,3,6\}$  y  $C = \{5,7\}$ .

Entonces, de las relaciones entre conjuntos se puede decir que es verdadero:

- $B \subset A$  se lee "B es subconjunto de A".
- $C \not\subset A$  se lee "C no es subconjunto de A".

## Conjuntos especiales

Existen conjuntos especiales que se diferencian por sus características:

**Conjunto vacío:** Es el conjunto que no tiene elementos y se denota  $\emptyset$ .

**Conjunto unitario:** Es el conjunto que tiene un elemento.

**Conjunto finito:** Es el conjunto en el que se puede determinar con precisión la cantidad de elementos que tiene.

**Conjunto infinito:** Es el conjunto en el que no es posible determinar la cantidad de elementos que tiene.

**Conjunto universal:** Los elementos de todos los conjuntos usualmente pertenecen a un gran conjunto fijo llamado conjunto universal, el cual se simboliza con  $U$ .

2. Escribimos los elementos de los conjuntos, si es posible:

- $A = \{x/x \text{ es un número entero que satisface } x^2 - 1 = 0\}$ .
- $B = \{x/x \text{ son las vocales de la palabra murciélago}\}$ .
- $C = \{x/x \text{ es un número impar}\}$ .
- $D = \{x/x \text{ es uno de los profesores de mi escuela}\}$ .

3. Escribimos por comprensión los conjuntos dados:

- $E = \{-1,0,1\}$ .
- $F = \{1,3,7,9,11,13,15,17,19\}$ .
- $G = \{ \}$ .

4. Completamos cada frase con el símbolo apropiado para que sea verdadera ( $\notin$ ,  $\subset$ ,  $\in$ ,  $\supset$ ):

- 2 \_\_\_\_\_  $\{x/x \text{ es un número par}\}$ .
- 2 \_\_\_\_\_  $\{1,2,3,4,5,6\}$ .
- 2 \_\_\_\_\_  $\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ .
- $\{r\}$  \_\_\_\_\_  $\{r, \{r\}\}$ .
- $\{\{a\}, \{e, i\}\}$  \_\_\_\_\_  $\{\{a\}, \{e, i\}, \{o, u\}\}$ .

5. Solicitamos a nuestro profesor que valore nuestro trabajo y que nos aclare las dudas presentadas.

6. Continuamos con nuestra lectura sobre las operaciones entre conjuntos:

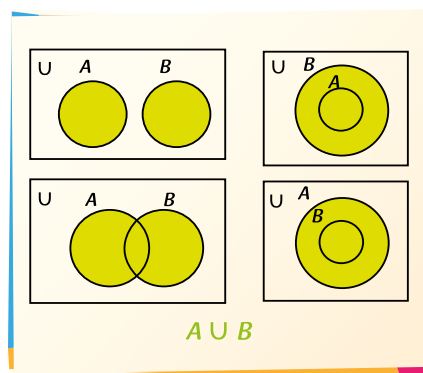
## Operaciones entre conjuntos

Si consideramos los conjuntos A y B, se pueden definir las siguientes operaciones:

- La **unión de A y B** se define como el conjunto que consta de aquellos elementos que están en A o en B, o en ambos. Esto se denota así:

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$$

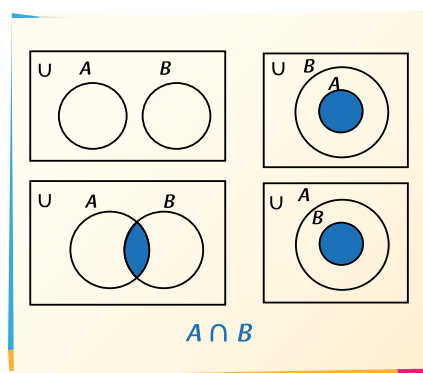
También se puede simbolizar en diagramas de Venn, en los cuales se debe hacer el sombreado correspondiente:



- La **intersección de A y B** se define como el conjunto formado por los elementos comunes a los dos conjuntos. Esto se denota así:

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$$

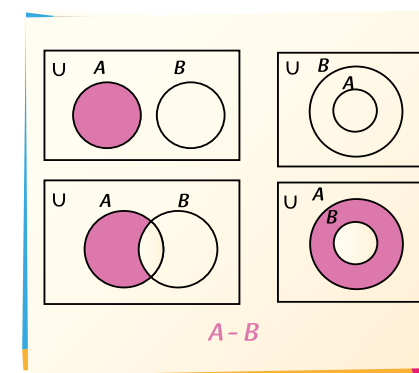
También se puede simbolizar en diagramas de Venn, en los cuales se debe hacer el sombreado correspondiente:



- La **diferencia entre conjuntos A y B** se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B. Esto se denota así:

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

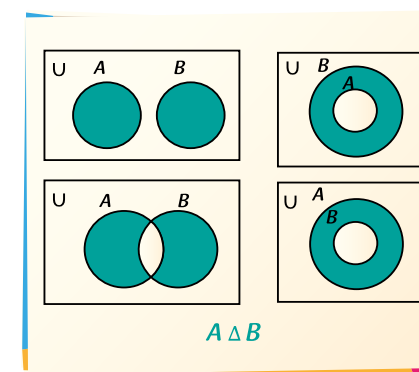
También se puede simbolizar en diagramas de Venn, en los cuales se debe hacer el sombreado correspondiente:



- La **diferencia simétrica de dos conjuntos A y B** se define como el conjunto formado por los elementos que no son comunes a los dos conjuntos. Esto se denota así:

$$A \Delta B = \{x/x \in (A \cup B) - x \notin (A \cap B)\}$$

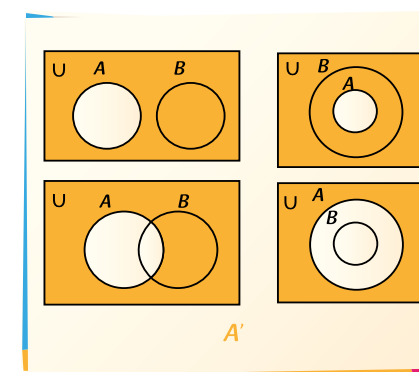
También se puede simbolizar en diagramas de Venn, en los cuales se debe hacer el sombreado correspondiente:



- El **complemento de un conjunto A** se define como el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no son elementos de A. Esto se denota así:

$$A' = \{x/x \notin A \text{ y } x \in U\}$$

También se puede simbolizar en diagramas de Venn, en los cuales se debe hacer el sombreado correspondiente:



**Ejemplo 4:**

Sea  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{2,4,6\}$ ,  $C = \{1,3,5,7\}$  y  $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ . Hallamos los conjuntos de  $A \cup B$ ,  $A \cap C$ ,  $C - A$ ,  $A \Delta B$ ,  $C'$ .

**Solución:**

$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

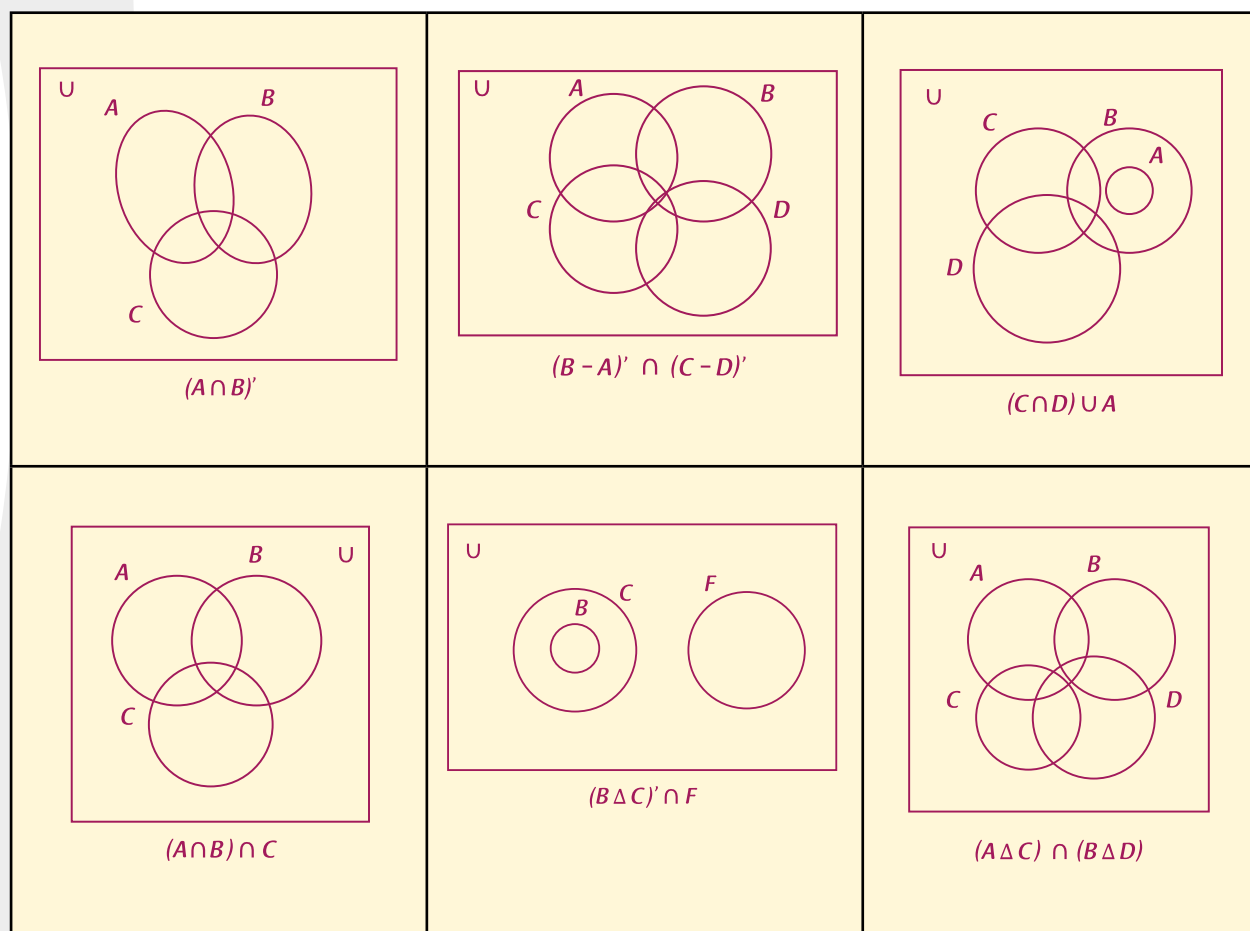
$A \cap C = \{1,3\}$

$C - A = \{5,7\}$

$A \Delta B = \{1,3,4,6\}$

$C' = \{2,4,6,8,9\}$

7. Sombreamos las operaciones indicadas en cada caso en los siguientes diagramas de Venn:



8. Se tienen los conjuntos  $U = \{q,w,e,r,t,a,s,d,f,z,x,c,v\}$ ,  $A = \{q,a,z,w,s\}$ ,  $B = \{w,s,a,x,d,e\}$ ,  $C = \{a,e\}$  y  $D = \{r,f,v,u,x\}$ , entonces:

- |                        |                           |                                    |
|------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| a. $A \cup C$          | e. $D - A$                | i. $(A \cap A)'$                   |
| b. $B \cup D$          | f. $(A \cap B) - (C - D)$ | j. $(B' \cup D') \cap (B \cup D)'$ |
| c. $A \cap C$          | g. $(A \cup B)'$          | k. $D' \Delta C$                   |
| d. $A \cup (B \cap D)$ | h. $(B - A)' \Delta C$    | l. $(B \cup D) \Delta (A - B)'$    |

9. Solicitamos a nuestro profesor que valore nuestro trabajo y nos aclare las dudas al respecto.

10. Continuamos con la lectura sobre las técnicas de conteo:

**Técnicas de conteo**

La relación entre los conjuntos y las técnicas de conteo nos sirve para determinar la cantidad de elementos del conjunto o el número de maneras en que un proceso puede ocurrir, etc. Para ello, consideramos la solución de estas situaciones a partir de la unión de elementos entre conjuntos. En el conteo es necesario determinar dos casos:

**Caso 1:** Cuando los conjuntos son disyuntos.

**Caso 2:** Cuando los conjuntos no son disyuntos.

A continuación se explican estos dos casos para determinar los principios del conteo:

**Principio de conteo I: Con conjuntos disyuntos**

Si se tienen los conjuntos A y B que son disyuntos, la cantidad de elementos de la unión A con B es la de cada uno de los conjuntos A y B. Simbólicamente:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

**Ejemplo 5:**

Sea  $A = \{1,2,3,4\}$  y  $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ . Los dos conjuntos son disyuntos, entonces la cantidad de elementos de la unión es equivalente a la suma de cada uno de los elementos de cada conjunto:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 4 + 6 = 10, \text{ porque } A \cup B = \{1,2,3,4, a, b, c, d, e, f\}$$

**Principio de conteo II: Con conjuntos no disyuntos**

Si se tienen los conjuntos A y B que no son disyuntos, la cantidad de elementos de la unión A con B es la de cada uno de los conjuntos A y B menos los elementos de la intersección. Simbólicamente:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

**Ejemplo 6:**

Sea  $A = \{1,2,3,4\}$  y  $B = \{2,3,4,5,6\}$ . Los dos conjuntos NO son disyuntos, entonces la cantidad de elementos de la unión es igual a:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 5 - 3 = 6, \text{ porque } A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

11. Determinamos en cada uno de los casos la cantidad de elementos que corresponden a la unión de los conjuntos y justificamos nuestras respuestas:

- a.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $B = \{a, b, c\}$ .....  $A \cup B = ?$   
 b.  $F = \{a, g, u, i, l, a\}$  y  $G = \{e, l, f, a, n, t\}$ .....  $F \cup G = ?$   
 c.  $M = \{m, a, n, o\}$  y  $P = \{p, i, e, s\}$  .....  $M \cup P = ?$   
 d.  $R = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  y  $T = \{0, -2, 2, 4, -4, 6, -6\}$ .....  $R \cup T = ?$

12. Invitamos a nuestro profesor a valorar nuestro trabajo.

## D Aplicación

### TRABAJO EN PAREJAS

1. Resolvemos en nuestros cuadernos las siguientes situaciones:

- a. Una encuesta a las personas del municipio de Pensilvania indicó que había 2 500 personas con problemas visuales y 1 500 personas con problemas auditivos. Si 1 010 tienen problemas auditivos y visuales, ¿cuántas personas fueron encuestadas?
- b. En una fábrica de automóviles, en un día se ensamblan 352 automóviles con transmisión automática, 261 con dirección hidráulica y 98 con ambas opciones. ¿Cuántos automoviles se fabricaron si todos ellos tenían por lo menos una opción?
- c. Una encuesta entre 100 estudiantes sobre la asignatura que más les gusta estudiar arrojó los siguientes resultados:

- 32 matemáticas.
- 20 física.
- 45 biología.
- 11 educación física.
- 15 matemáticas y biología.
- 7 matemáticas y educación física.
- 10 física y biología.
- 6 educación física y biología.
- 12 no les gusta ninguna de las cuatro asignaturas.

✓ Encontramos el número de estudiantes que sólo estudian cada una de las asignaturas.

✓ Encontramos el número de estudiantes que estudian educación física.

2. Organizamos una encuesta para determinar las formas de manejar las basuras en el colegio:

- a. Aplicamos la encuesta entre 20 a 30 estudiantes.  
 b. Determinamos las diversas combinaciones de las formas que proponen los estudiantes.  
 c. Realizamos un diagrama que represente las formas y la cantidad de personas que la apoyan.

3. Elaboramos una cartelera con los resultados de la encuesta y con la propuesta para socializarla, junto con los demás compañeros. Seleccionamos un plan de acción y personas responsables de este para manejar la basura de manera eficiente de acuerdo a los resultados encontrados.

4. Cuando todo el grupo presente sus propuestas, realizamos un debate en torno a la mejor propuesta y sacamos una conclusión al respecto, la cual consignaremos en el cuaderno.

## E Complementación

### TRABAJO INDIVIDUAL

1. Realizo la siguiente lectura, anoto los aspectos más importantes en mi cuaderno y elaboro un mapa conceptual que me ayude a analizar las conexiones entre los conceptos:

Los diagramas de Venn son útiles para representar información de encuestas cuando el investigador decide realizar las conexiones entre una y otra variable. Analicemos el siguiente ejemplo:

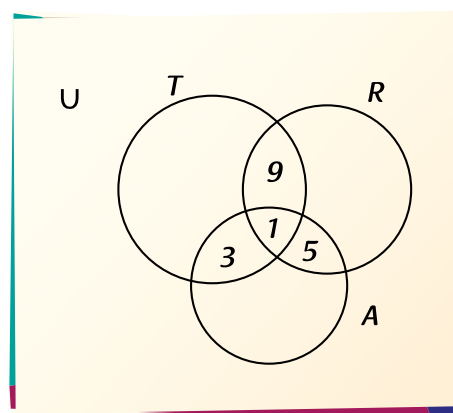
#### Ejemplo 1:

En una entrevista a 85 consumidores que tienen los productos que se nombran pero en una versión anterior; a pesar de que se les indicó que cada vez que compran generan más basura, contestaron que desean comprar para el año entrante alguno de los siguientes productos que se consideran contaminantes principales. Estos son: 19 indicaron que comprarían un auto nuevo, 30 comprarían un refrigerador,

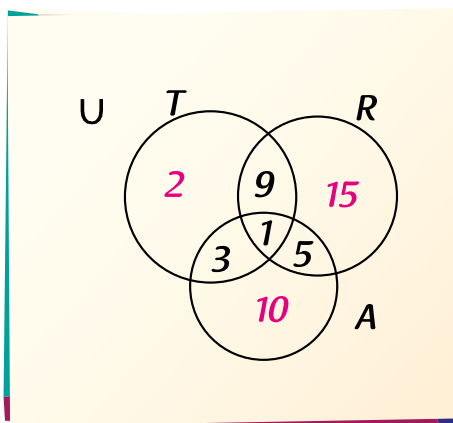
15 comprarían un televisor. De estos, 6 comprarían un auto y un refrigerador, 4 comprarían un auto y un televisor y 10 comprarían un televisor y un refrigerador. Una persona indicó que compraría las tres cosas. ¿Cuántas personas no van a comprar ningún artículo?

Para resolver estas situaciones es necesario empezar por determinar los tres conjuntos: T, que representa las personas que comprarían los televisores; A, que representa las personas que comprarían un auto; y R, que representa las personas que comprarían los refrigeradores.

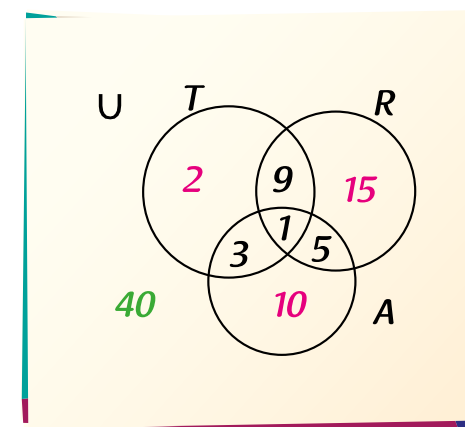
Comenzamos con la representación de las intersecciones de los tres conjuntos y la que hay entre ellos:



Luego, ubicamos los demás datos que cumplan la condición de la cantidad de cada uno de los conjuntos:



Finalmente, contamos y determinamos los que nos hacen faltan para colocar en el conjunto universal:



De los encuestados, 40 personas no van a comprar ningún artículo.

2. Resuelvo las siguientes situaciones utilizando diagramas de Venn:

- En una encuesta a 10 281 personas, la cual se le aplicó sólo a aquellas que eran mujeres casadas y mestizas, se obtuvieron los siguientes resultados: 3490 mujeres, 4722 casadas, 5822 mestizas, 1745 mujeres casadas, 859 mujeres mestizas y 239 mujeres mestizas y casadas. ¿Los datos son válidos?
- La sangre se clasifica de acuerdo con su tipo en Rh positivo y Rh negativo. Si la sangre contiene un antígeno A, es de tipo A, si contiene un antígeno B, es de tipo B, y si contiene ambos antígenos A y B, es de tipo A y B. Si no tiene ningún antígeno es O. ¿Cuántas son las posibles diferencias?
- En una encuesta a 75 personas de una empresa se les preguntó por el noticiero que más ven y se obtuvo como resultado: 23 ven Noticias RCN, 18 ven Noticias Caracol, 14 ven Noticias City Tv y El Tiempo, 10 ven Noticias Caracol y Noticias Cable Centro, 9 ven Noticias Caracol y Noticias City Tv y 6 ven los cinco noticieros:
  - ✓ ¿Cuántas personas no ven noticieros?
  - ✓ ¿Cuántas personas ven sólo Noticias Caracol?
  - ✓ ¿Cuántas personas no ven Noticias City Tv?

### TRABAJO EN PAREJAS

- Comparamos nuestras respuestas. En caso de diferencias realizamos un consenso para llegar a un acuerdo.
- Invitamos al profesor a revisar las actividades y le pedimos que nos aclare las dudas presentadas.

## Evaluación por competencias

### INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 1 Y 2

Un estudio de 52 familias del área rural de la ciudad de Medellín indicó que había un total de 142 niños menores de 18 años. De estos, 91 eran varones, 32 eran menores de 11 años, 43 tenían antecedentes penales y 29 varones eran menores de 11 años. Si 25 niñas de menos de 11 años y 20 varones menores de 11 tenían antecedentes penales:

1. Elaboro un diagrama de Venn que represente la información.
2. ¿Cuántos niños tienen antecedentes penales?

### INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 3 Y 4

Si una prueba de selección múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales sólo 1 es correcta:

3. ¿De cuántas formas diferentes puede un estudiante escoger una respuesta para cada pregunta?:

- A. 5.
- B. 120.
- C. 625.
- D. 1024.

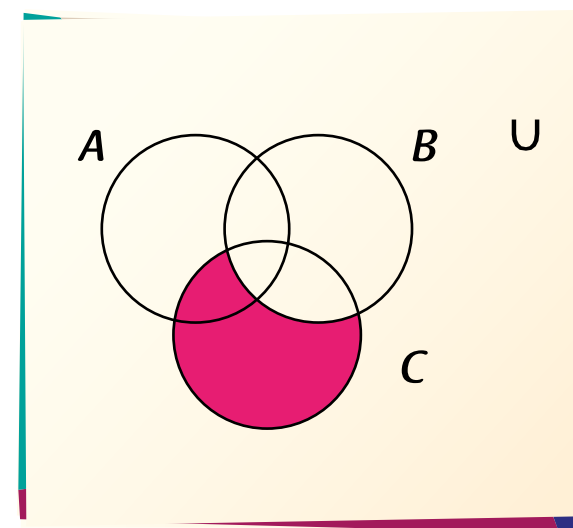
3

4. ¿De cuántas formas distintas puede un estudiante escoger siempre la respuesta equivocada de cada pregunta?:

- A. 5.
- B. 15.
- C. 243.
- D. 625.

4

5. La operación que representa lo sombreado del diagrama de Venn es:



- A.  $C - B$
- B.  $A \cap C$
- C.  $A \cup B$
- D.  $A \Delta C$

5



## Glosario

- **Complementos:** Son los elementos que le hacen falta a un conjunto para que sea el conjunto universal.
- **Conjuntos:** En matemáticas; idea que representa elementos que cumplen alguna condición.
- **Descripción por comprensión:** Se utiliza para representar la cantidad de elementos infinitos de un conjunto que cumple las mismas características. Cada elemento se representa con  $x$  y la propiedad con  $p(x)$ .
- **Descripción por extensión:** Se enumeran todos los elementos de un conjunto.
- **Diagrama de Venn:** Es una representación de las relaciones y cantidades que tienen los conjuntos.
- **Diferencia:** Es una operación entre conjuntos que consiste en determinar los elementos que son exclusivos del minuendo.
- **Diferencia simétrica:** Es una operación entre conjuntos que consiste en determinar los elementos que son de cada uno de los grupos sin incluir los elementos comunes.
- **Intersección:** Es una operación entre conjuntos que consiste en determinar los elementos que tienen en común.
- **Pertenencia:** Es la relación que se establece entre el elemento y el conjunto.
- **Subconjunto:** Es la relación que se establece entre conjuntos; se cumple que todos los elementos de un conjunto están en el otro.
- **Unión:** Es una operación entre conjuntos que consiste en la reunión de los elementos.

## Bibliografía

Ángel, A. (2008). Álgebra intermedia. Séptima edición. México: Pearson Educación.

Batanero, C. y Godino, J.D (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-0-3 [75 páginas; 1,5 MB] Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino>

Camargo, L. y otros. (1999). *ALFA 9. Serie de matemáticas para educación básica secundaria y media*. Editorial NORMA.

Rico, L.; Segovia, I. y Gómez, P (2000). *Introducción a la función cuadrática*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Campus de Cartuja. Granada.

Swokowski, E. y Cole, J (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Doceava edición. México: Pearson Educación.

Triola M.F (2009) *Estadística*. Décima Edición. México: Pearson Educación.