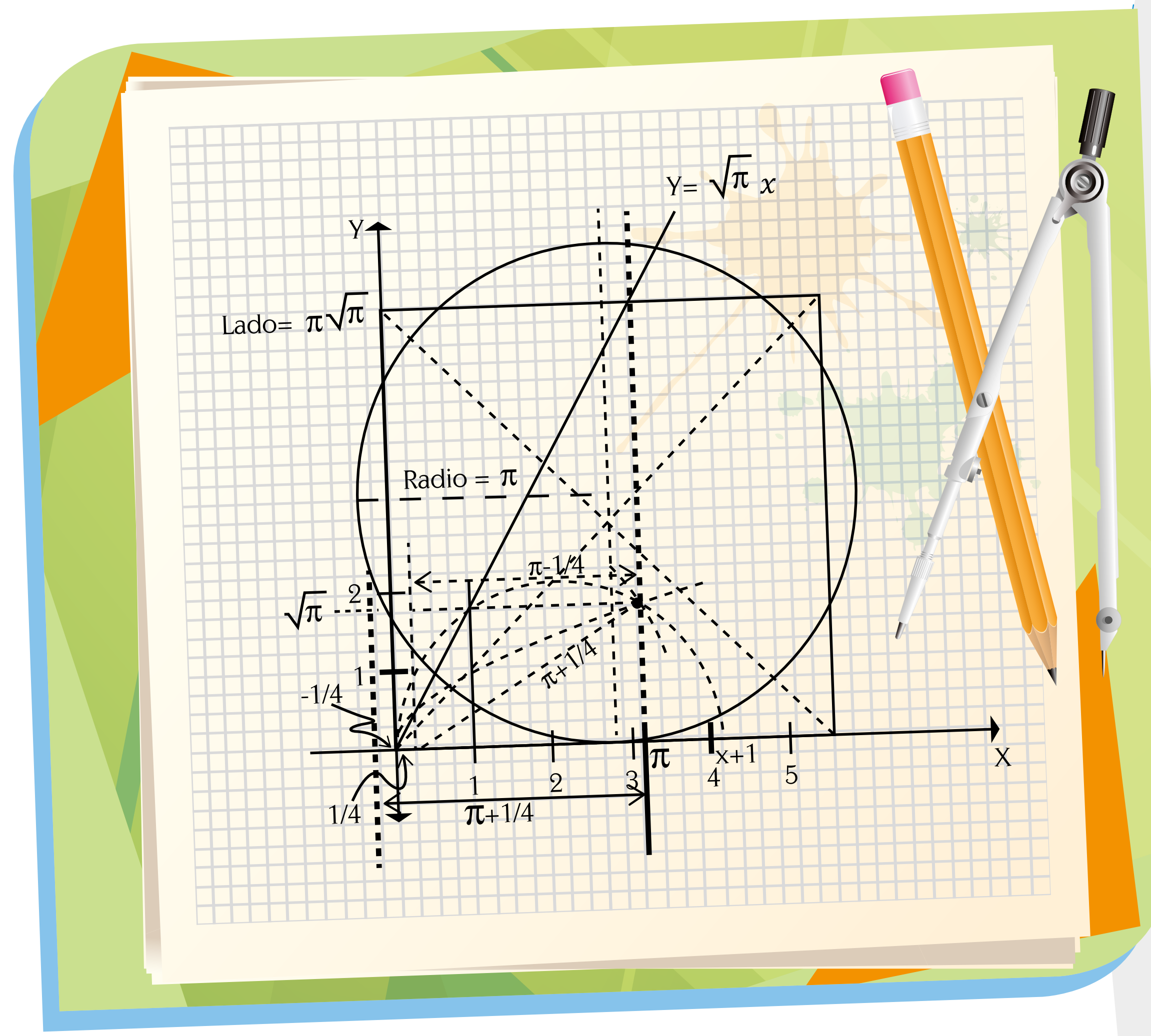
- **Valor absoluto:** Es considerado el módulo de un número real que es el número sin signo. Es una distancia entre el número real y el cero. Se representa con dos barras verticales, así: $|a| = a$

Guía 5

Recordemos las relaciones de algunas figuras geométricas



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Diferencia las distintas relaciones que se pueden establecer entre circunferencia, rectas y círculos.

Procedimental

- Formula y resuelve situaciones problema en el contexto de las relaciones entre circunferencia, círculos y rectas.

Actitudinal

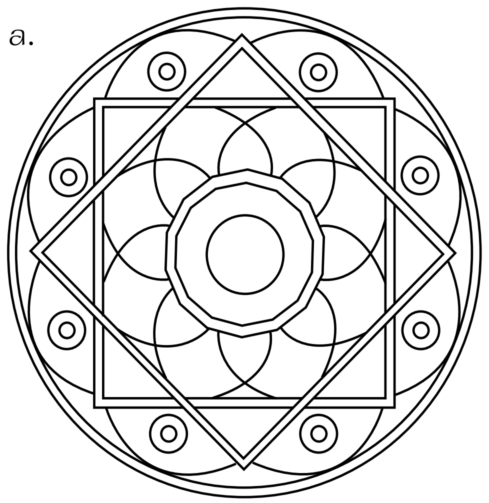
- Hace un uso adecuado de los instrumentos de medida.

A Vivencia

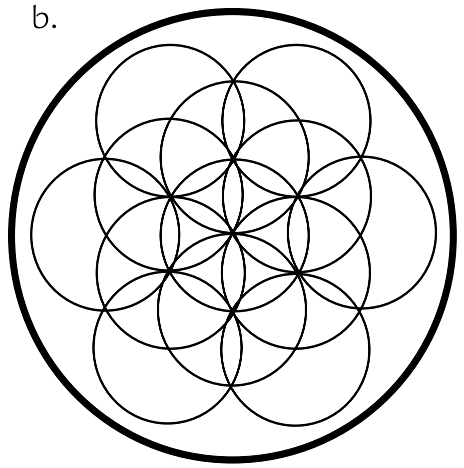
TRABAJO INDIVIDUAL

1. Dibujo las siguientes mándalas y las coloreo aplicando criterios de simetría y teniendo en cuenta el manejo de instrumentos como reglas, compás y escuadra, los cuales puedo encontrar en el CRA:

a.



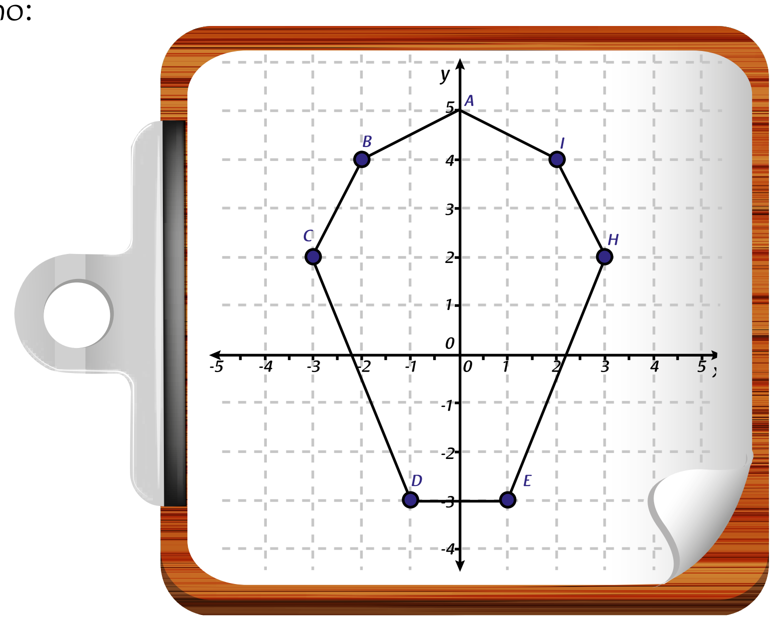
b.



2. Explico el procedimiento que empleo para elaborar las mándalas.

3. Determino la figura geométrica que se define según los vértices (3,1), (3, 6) y (-2, 1); además, calculo el perímetro y el área.

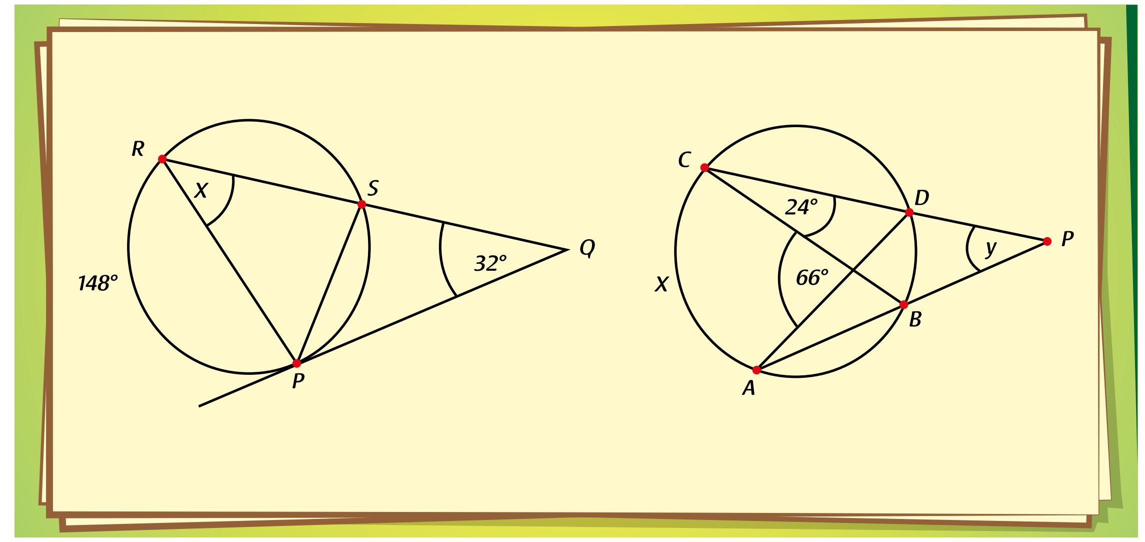
4. Determino los vértices de la figura que está representada en el plano cartesiano:



TRABAJO EN PAREJAS

5. Comparo la respuesta del ejercicio 2 con un compañero. Entre los dos llegamos a definir el resultado que consideramos correcto.

6. Calculamos el valor de x de cada figura:



7. Invitamos al docente para que evalúe las actividades desarrolladas.

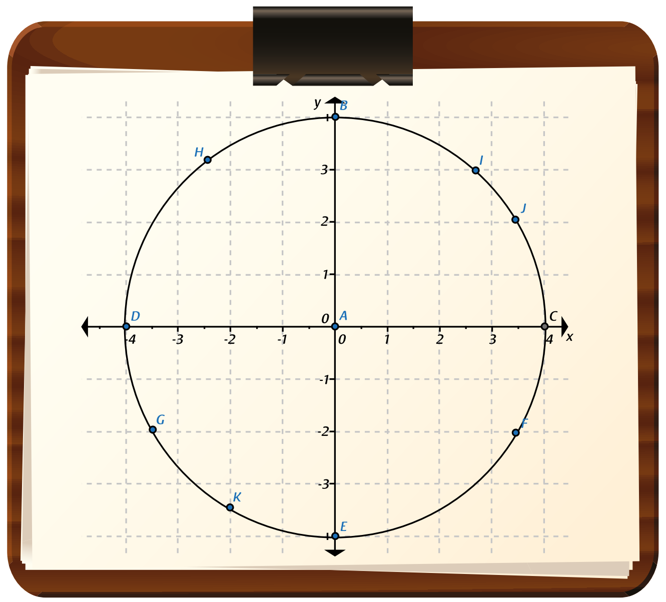
BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

Nos reunimos en equipos de tres y asignamos los roles que consideremos necesarios para el buen desarrollo de las siguientes actividades:

1. En el cuaderno realizamos un mapa conceptual sobre las relaciones que aquí se presentan:

La **circunferencia** es la curva o lugar geométrico que se define a la misma distancia de un punto dado, lo que queda dentro de esta curva es lo que se denomina **círculo**. Esta circunferencia la podemos ubicar en un plano cartesiano como se muestra a continuación:



Respondemos de acuerdo a la gráfica:

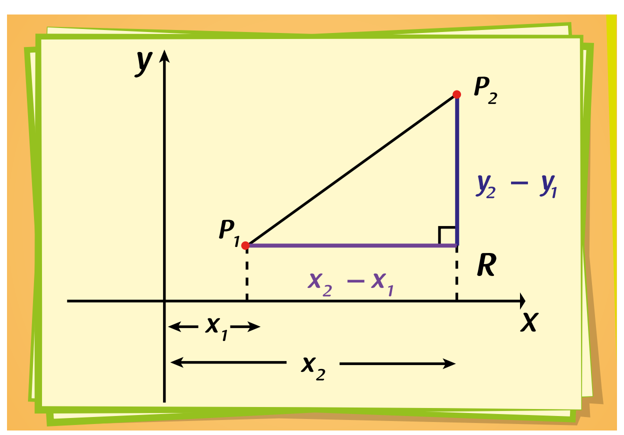
a. Determinamos las coordenadas del centro de la circunferencia.
b. ¿Cuál es la distancia que existe entre el centro de la circunferencia y cualquier punto de ella? ¿Esa distancia es la misma o cambia? Justificamos las respuestas.
c. Determinamos las coordenadas de 10 puntos marcados en la gráfica de la circunferencia.

2. Resolvemos la siguiente situación:

Realizamos un punto A y alrededor de él marcamos con color rojo todos los puntos que están a 4 centímetros y con color azul marcamos todos los puntos que son menores a 4 cm. ¿Cuál es la figura que se forma con el color rojo y cuál es la que se puede formar con el color azul?

Al realizar las comparaciones entre las dos situaciones, encontramos que la distancia entre esos puntos al centro es la misma. Sin embargo, en la primera situación se da la curva como figura geométrica y en la segunda situación como lugar geométrico.
Cuando la ubicamos en el plano cartesiano es posible generar una expresión algebraica desde la definición de distancia entre puntos.

Si en el plano cartesiano ubicamos dos puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2), podemos definir el segmento $\overline{P_1P_2}$:



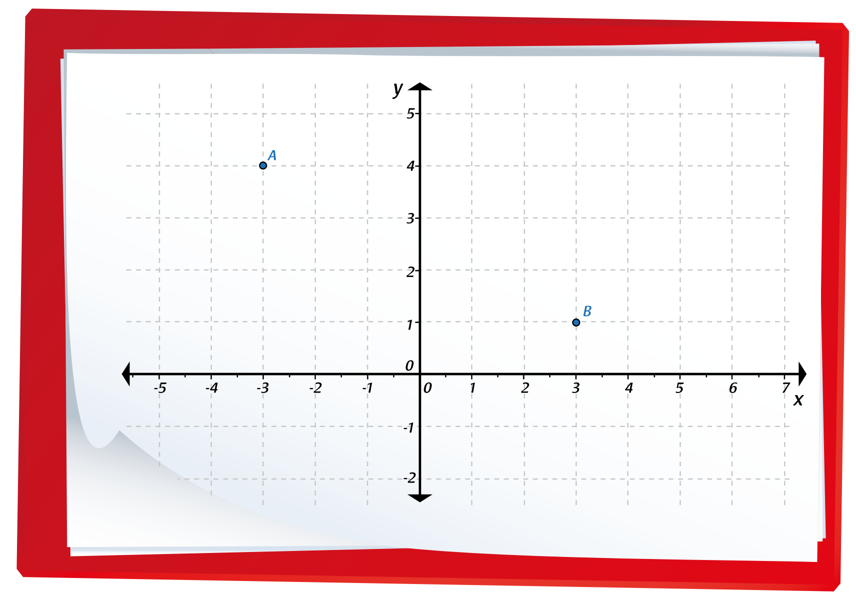
Como se forma un triángulo rectángulo, la distancia se deduce a partir del teorema de Pitágoras, por ello la distancia del segmento $\overline{P_1P_2}$ es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Se simboliza la distancia entre dos puntos A y B, así: $d(A, B)$.

Ejemplo:
Dados los puntos A y B en el plano cartesiano, ¿cuál es su distancia?:



Reconocemos que las coordenadas del punto A son (-3, 4) y del punto B son (3,1). Primero, determinamos que $x_1 = -3$; $y_1 = 4$; $x_2 = 3$; $y_2 = 1$, y aplicamos la fórmula para la distancia, así:

$$d(A,B) = d = \sqrt{(3-(-3))^2 + (1-4)^2}$$

$$\sqrt{(3+3)^2 + (1-4)^2}$$

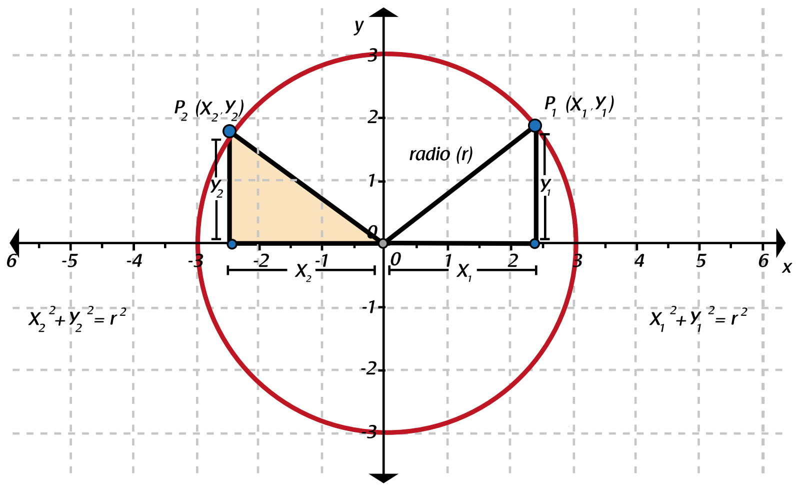
$$\sqrt{6^2 + (-3)^2}$$

$$\sqrt{36+9}$$

$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Entonces tenemos que la distancia entre A y B es $3\sqrt{5}$.

Como todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del centro se puede establecer un triángulo rectángulo; por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras en cada uno de ellos, como se muestra en la figura:

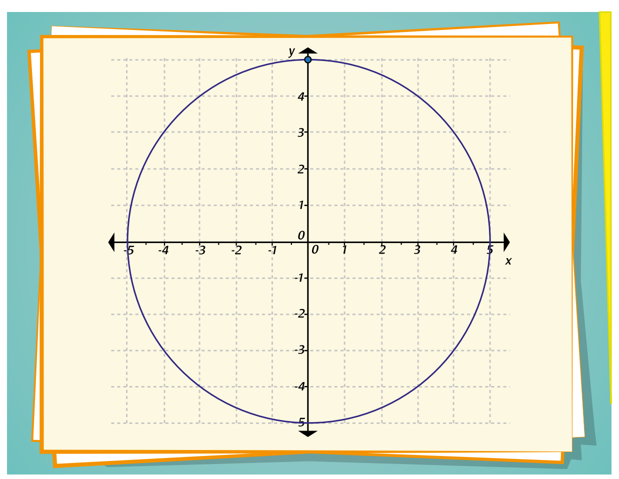


Entonces, la expresión para representar una circunferencia que tiene como centro (0,0) y un radio cualquiera se expresa así:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Donde r es el valor del radio, x, y las coordenadas de cualquier punto.

Ejemplo:
Si se tiene una circunferencia con centro (0,0) y radio 5, ¿cuál es su ecuación y su dibujo?
Su ecuación sería $x^2 + y^2 = 5^2$ que es lo mismo que $x^2 + y^2 = 25$ y su dibujo correspondiente es:

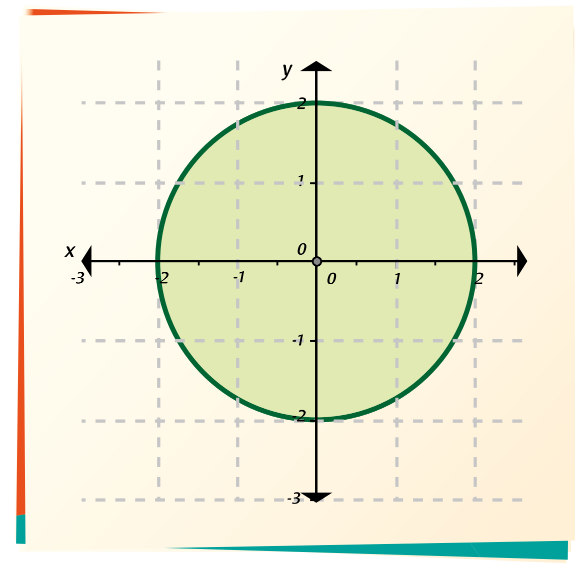


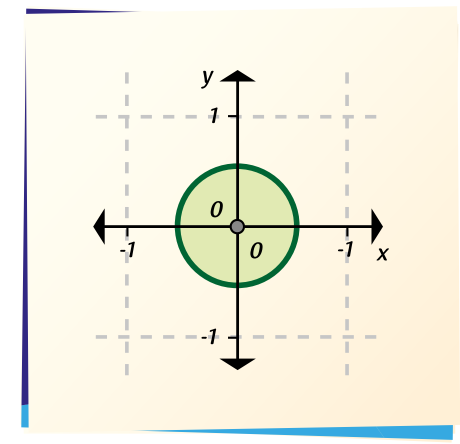
3. Representamos las siguientes parejas de puntos que determinan un segmento, cada una de ellas en un plano cartesiano, y calculamos su distancia:

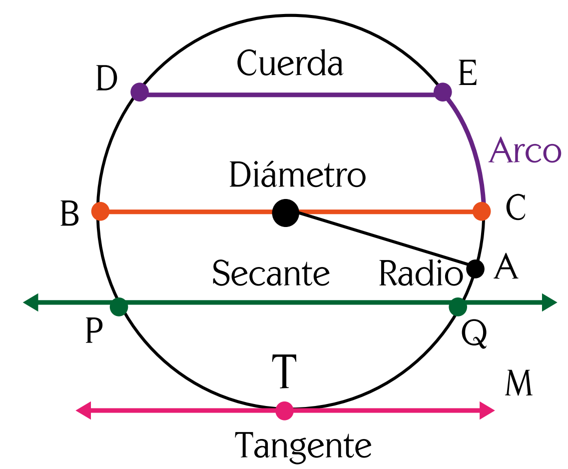
a. P_1 (-2,3) y P_2 (5,7).   b. P_3 (-1,2) y P_4 (2,1).

c. P_5 (1,1) y P_6 (4,4).   d. P_7 (0,5) y P_8 (0,-3).

4. Determinamos las ecuaciones de las siguientes circunferencias representadas en el plano cartesiano:







Los elementos de la circunferencia que hemos estudiado son:

Cuerda: Es el segmento trazado entre dos puntos cualquiera de la circunferencia.

Radio: Es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro.

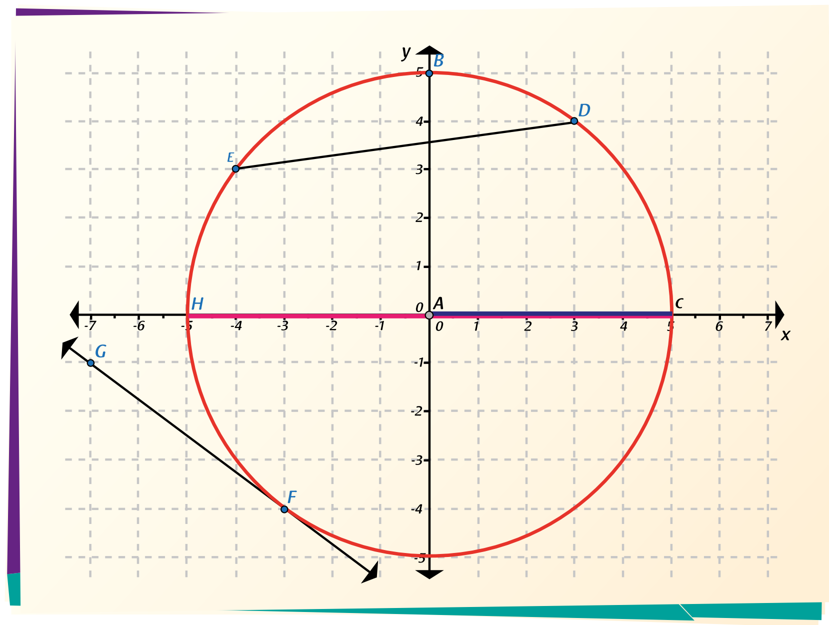
Diámetro: Es la cuerda que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro, es decir, es la cuerda de mayor longitud que podemos trazar. El diámetro mide el doble del radio.

Arco: Es la parte de una circunferencia comprendida entre dos puntos de ella. Los arcos en una circunferencia se leen en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Tangente a una circunferencia: Es la recta que tiene sólo un punto en común con la circunferencia, es decir, que la intersecta en un punto.

Secante a una circunferencia: Es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Ejemplo:
Determinamos las medidas del diámetro $\overline{HC}$, radio $\overline{AC}$, cuerda $\overline{ED}$ y la ecuación de la recta tangente $\overleftrightarrow{GF}$:



- Para hallar la longitud del radio $\overline{AC}$, tenemos en cuenta que las coordenadas de A son (0,0) y de C son (5,0). Calculamos la distancia:

$$d(A,C) = \sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{0^2 + 5^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{0^2 + 5^2}$$

$$d(A,C) = \sqrt{25}$$

$$d(A,C) = 5$$

Entonces, el radio mide 5 unidades.

- Para hallar el diámetro $\overline{HC}$, reconocemos que es el doble del radio, por tanto, el diámetro mide 10 unidades.

- Para hallar la distancia de la cuerda $\overline{ED}$, tenemos en cuenta que las coordenadas de E son (-4,3) y de D son (3,4). Calculamos la distancia:

$$d(E,D) = \sqrt{(4-3)^2 + (3-(\text{-}4))^2}$$

$$d(E,D) = \sqrt{1^2 + 7^2}$$

$$d(E,D) = \sqrt{1+49}$$

$$d(E,D) = \sqrt{50}$$

$$d(E,D) = 5\sqrt{2}$$

Entonces, la cuerda $\overline{ED}$ mide $5\sqrt{2}$ unidades.
En la ecuación de la recta tangente $\overleftrightarrow{GF}$ es necesario determinar su pendiente a través de los puntos G (-7,-1) y F (-3,-4).
Recordemos que la pendiente se calcula como la razón entre las diferencias de las coordenadas de y, sobre las coordenadas de x:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{(\text{-}4) - (\text{-}1)}{(\text{-}3) - (\text{-}7)} = \frac{\text{-}4 + 1}{\text{-}3 + 7} = \frac{\text{-}3}{4}$$

Determinamos la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{-3}{4}$ y el punto F (-7,-1):

$$\frac{\text{-}3}{4} = \frac{y - (\text{-}1)}{x - (\text{-}7)}$$

$$\text{-}3\big(x - (\text{-}7)\big) = 4(y - (\text{-}1))$$

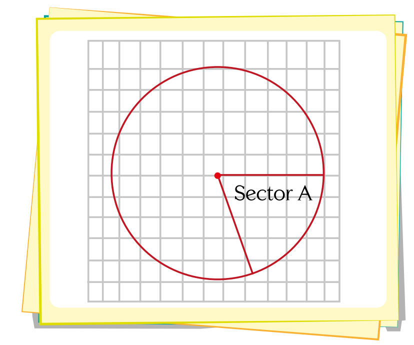
$$\text{-}3(x + 7) = 4(y + 1)$$

$$\text{-}3x - 21 = 4y + 4$$

$$\text{-}3x - 4y = 25$$

Entonces, la ecuación de la recta es $-3x - 4y - 25 = 0$

- Recordemos que el **área de un círculo** es: $\pi \cdot r^2$
- Para determinar el área de la corona circular: del área del circulo mayor restamos el área del circulo menor.



$$360° \rightarrow \pi\, r^2$$
$$n \rightarrow \text{Área sector}$$

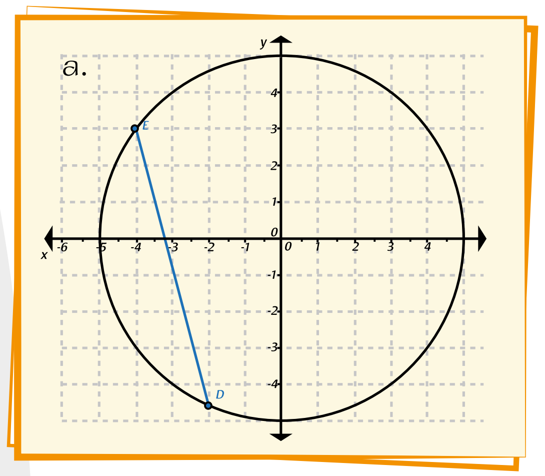
Por tanto $A_{sector} = \dfrac{n\pi r^2}{360°}$

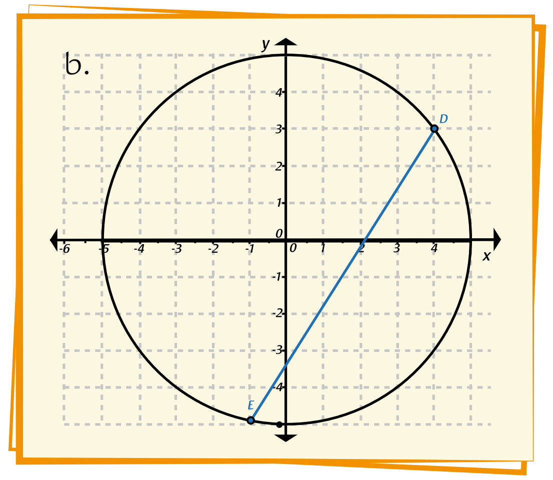
Para determinar el área de la corona circular: Del área de la circunferencia mayor restamos el área de la circunferencia menor.

$$A_{corona} = \pi \cdot (\mathrm{R}^2 - r^2)$$

Donde R y r son los radios mayor y menor de la corona.

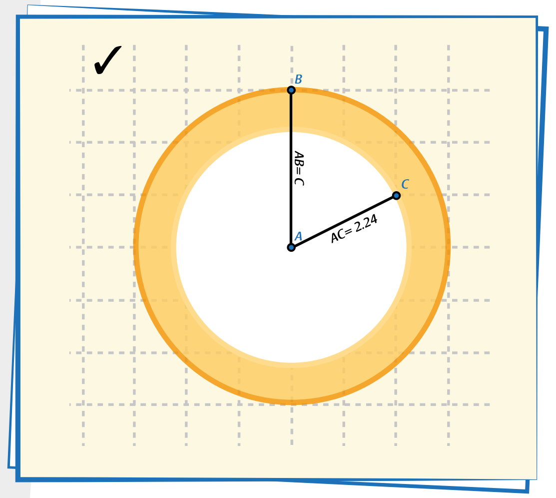
5. Determinamos las distancias del radio y la cuerda que se señalan en cada circunferencia:

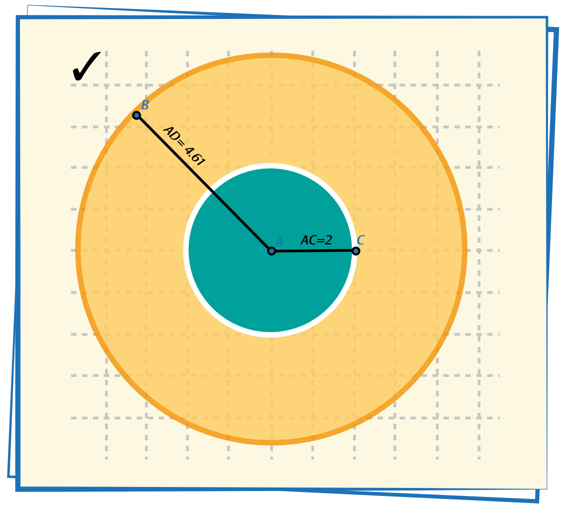




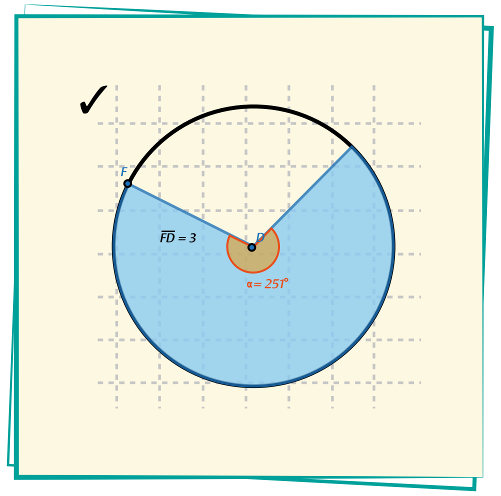
6. Calculamos el área señalada en cada una de las figuras:

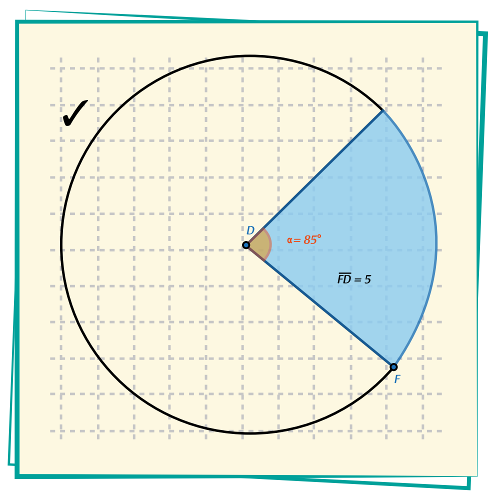
a. Hallamos el valor de la corona:





b. Hallamos el valor del sector circular:





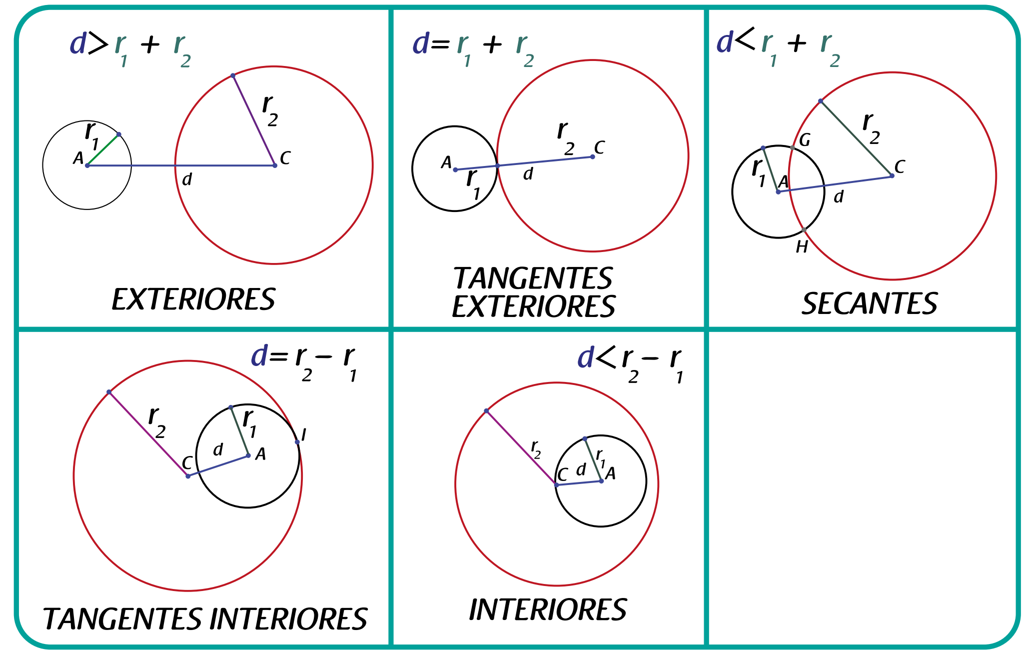
Entre dos circunferencias se pueden producir las siguientes **posiciones relativas:**

Exteriores: Todos los puntos de una de las circunferencias son exteriores a la otra.

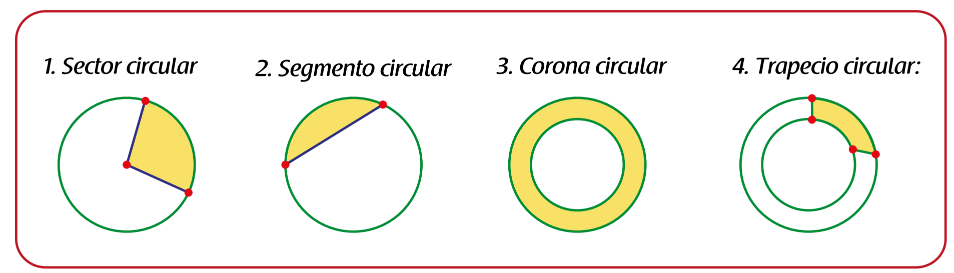
Interiores: Todos los puntos de una de las circunferencias son interiores a la otra.

Tangentes: Tienen un punto en común. Se establecen tangentes exteriores o tangentes internas.

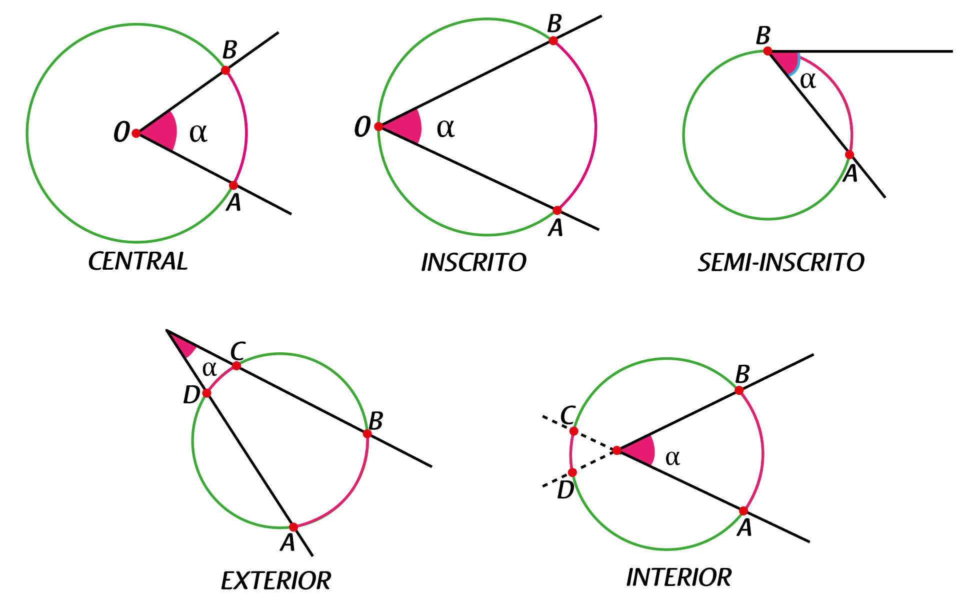
Secantes: Tienen dos puntos en común y cada circunferencia divide a la otra en dos arcos.



También se establecen las siguientes regiones circulares:



Igualmente, en las circunferencias establecemos los siguientes ángulos:



7. De acuerdo a la imagen determinamos las características de cada una de las regiones circulares.

8. Determinamos las características que se pueden establecer en una circunferencia según los tipos de ángulos.

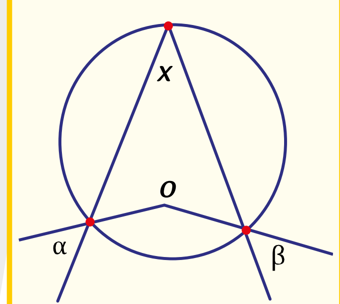
9. Buscamos en los libros de texto que se encuentran en el CRA información relacionada con los ángulos de la circunferencia y las relaciones entre circunferencias para compararla con la de los dos ejercicios anteriores.

10. Continuamos con la lectura sobre la forma en la que se calcula el valor de los ángulos en una circunferencia:

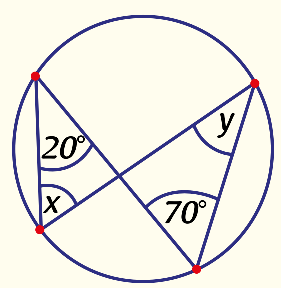
- La medida del **ángulo central** es equivalente a la medida del arco que lo subtiende.
- La medida del **ángulo inscrito y semi-inscrito** es la mitad de la amplitud del ángulo central correspondiente.
- La medida del **ángulo interno** es la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.
- La medida del **ángulo externo** es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.

11. Determinamos los valores que se solicitan en cada uno de los casos:

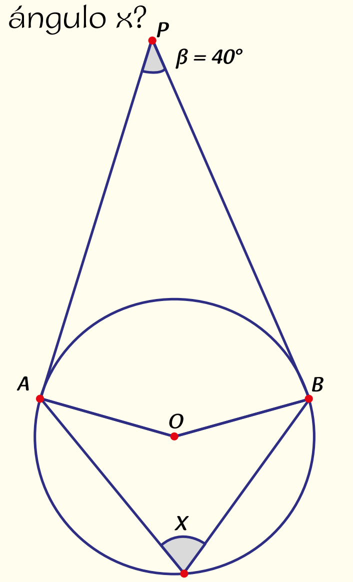
a. El ángulo $\alpha = 20$ y $\beta = 32$. ¿Cuánto mide el ángulo x?



b. ¿Cuánto miden los ángulos marcados con las letras?



c. Los lados $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son tangentes a la circunferencia. ¿Cuánto mide el ángulo x?



12. Elaboramos un cuadro que muestre las diferencias que existen entre rectas, círculos y circunferencias al igual que uno que exponga las relaciones que se pueden establecer entre ellos.

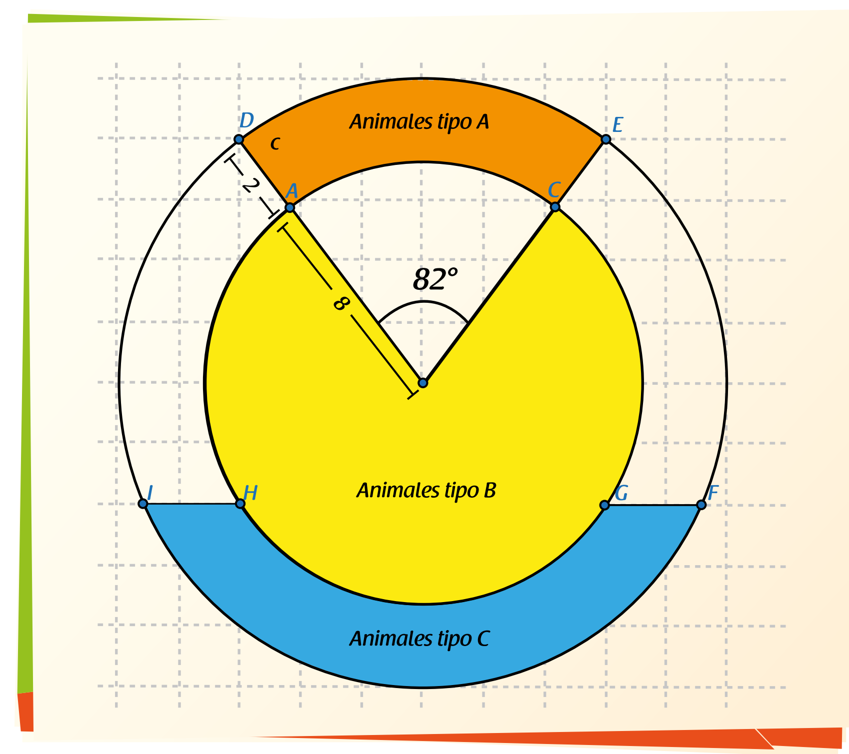
13. Convocamos al profesor para que nos aclare cada una de nuestras inquietudes y nos revise las actividades desarrolladas hasta el momento.

D Aplicación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo en mi cuaderno las siguientes situaciones que me permiten reconocer la utilidad de los números irracionales:

a. Un granjero quiere realizar un corral circular con las siguientes divisiones. ¿Cuánto mide el área de cada superficie para los animales tipo A, B y C?:

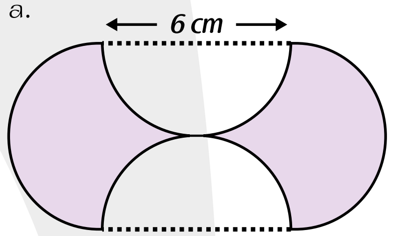


b. Hay que poner lona alrededor de una pista de un circo que tiene forma circular, si su radio mide 7 m, ¿cuántos metros de lona se necesitan?

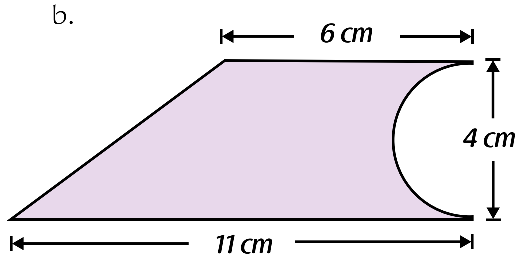
c. Están reparando una alcantarilla de forma circular y la deben proteger con una malla cuadrada en su interior; si su radio mide 50 cm, ¿cuánto mide la malla?

2. Calculo el valor del área sombreada:

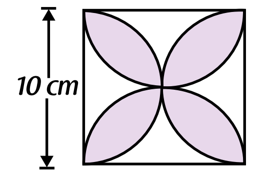
a.



b.



c.



TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparamos los resultados obtenidos de manera individual en las situaciones anteriores. Llegamos a un consenso para determinar si alguno de los dos tuvo errores y explicamos las razones para que esto ocurriera.

3. En plenaria realizamos y compartimos nuestras observaciones sobre cada una de las situaciones anteriores. Consignamos en nuestros cuadernos las conclusiones generadas durante la actividad y la plenaria.

E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

1. *Anotamos cinco objetos de nuestra vida diaria que involucren circunferencias.*

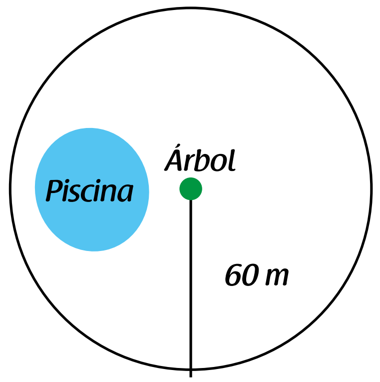
2. *Analizamos las siguientes imágenes y explicamos cuáles son las relaciones que se pueden establecer con las rectas, ángulos y circunferencias:*

3. Presentamos el cuaderno al profesor para su valoración y luego sustentamos nuestras respuestas.

Evaluación por competencias

INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 1 Y 2

Se quiere construir una piscina redonda en una finca circular de 60 m de radio, conservando un árbol que hay en el centro.



1. El diámetro máximo de la piscina es:

A. 30 m
B. 60 m
C. 900 m
D. 3 600 m

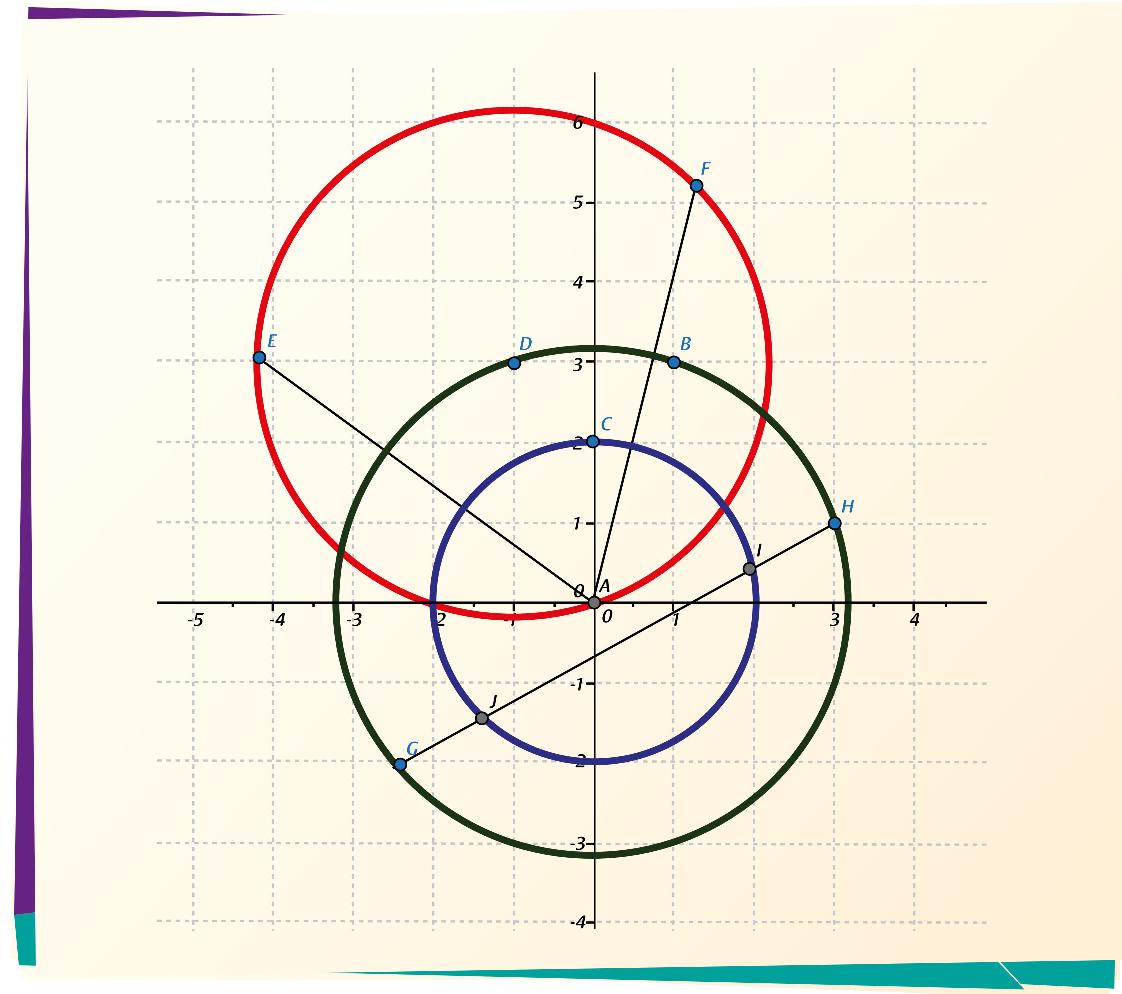
1

2. La superficie de la finca (en metros cuadrados) que quedará después de la construcción de la piscina es:

A. $60\pi^2$
B. $30\pi^2$
C. $(60^2 - 30^2)\pi$
D. $(60 - 30)^2\pi$

2

INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 3, 4 Y 5



3. La circunferencia roja con respecto a la azul son:

A. Concéntricas.
B. Tangentes.
C. Secantes.
D. Internas.

3

4. La cuerda $\overline{GH}$ es mayor que la cuerda $\overline{JI}$ en:

A. 2 unidades.
B. 4 unidades.
C. 6 unidades.
D. 10 unidades.

4

5. Si el ángulo EAF mide 70°; ¿cuál es la medida del ángulo central que le corresponde a la circunferencia de radio $\sqrt{10}$, y centro (-1, 3)?:

A. 17.5°
B. 35°
C. 52.5°
D. 140°

5

Glosario

- **Ángulo central**: Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.
- **Ángulo circunscrito**: Es el ángulo formado cuando su vértice está en la circunferencia, siendo los dos lados tangente a ella.
- **Ángulo exterior:** Es el ángulo formado cuando su vértice no está en la circunferencia ni en el contorno delimitado por ella.
- **Ángulo inscrito:** Es el que tiene su vértice en la circunferencia, cuyos lados la cortan.
- **Ángulo interior:** Es el que tiene su vértice en el contorno delimitado por la circunferencia pero no en su centro.
- **Ángulo semi-inscrito:** Es el ángulo formado cuando su vértice está en la circunferencia, siendo un lado secante y el otro tangente a ella.
- **Arco:** Es una parte o subconjunto de la circunferencia, limitada por dos puntos de ella.
- **Centro de una circunferencia:** Es el punto fijo en el plano sobre el que gira un punto que genera la circunferencia.
- **Cuerda**: Es un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro:** Es el segmento de recta entre dos puntos de la circunferencia que pasa por el centro.
- **Radio:** Es el segmento de recta que existe del centro a cualquier punto de la circunferencia.
- **Recta normal:** Es la recta que es perpendicular a la tangente de una circunferencia.
- **Secante**: Es la recta que cruza a una circunferencia en dos puntos.
- **Tangente de una circunferencia:** Es la recta que sólo toca a un punto de la circunferencia.