# Guía 4

Modelando situaciones de variación con funciones polinómicas


## Indicadores de desempeño

**Conceptual**

- Identifica las diferentes formas de representar las funciones polinómicas.

**Procedimental**

- Formula y resuelve problemas relacionados con funciones polinómicas.

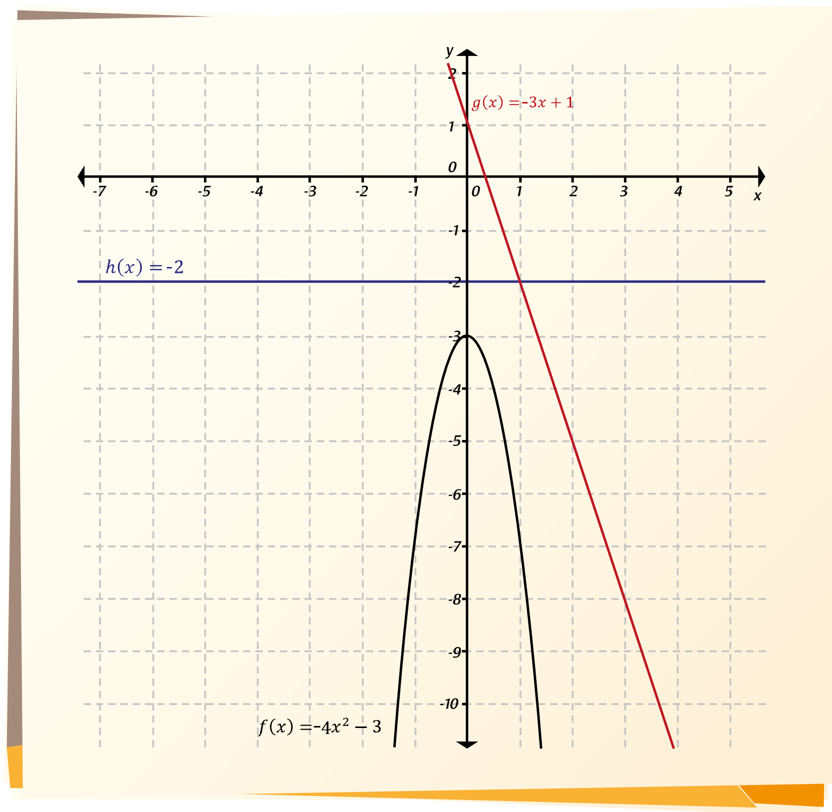
**Actitudinal**

- Utiliza la información obtenida de las funciones polinómicas para tomar decisiones respecto a su entorno y comunidad.

# A Vivencia

## TRABAJO INDIVIDUAL

1. Con base en los temas anteriores o lo que conozco, determino qué función se cumple en cada uno de los siguientes enunciados. Justifico mi respuesta:




a. Las funciones de grado cero son rectas horizontales.

b. Las funciones de grado uno son rectas oblicuas.

c. Las funciones de grado dos son parábolas cuyo eje es paralelo al de las ordenadas.

## TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparo las respuestas del ejercicio anterior con un compañero. Entre los dos llegamos a concluir cuál es la característica de ese tipo de funciones.





3. Realizamos las siguientes operaciones y simplificamos:

   a. $a(a+1)(a-1) - a^3 - a(2a+1)$

   b. $(1-b)^2(b-1)^3 \div (1-b)^4$

4. Completamos las siguientes expresiones para que sean trinomios cuadrados perfectos y los factorizamos:

   a. $x^2 - 4x + \boxed{\phantom{0}}$

   b. $a^2 - 8a + \boxed{\phantom{0}}$

   c. $9 + 2a + \boxed{\phantom{0}}$

5. Factorizamos las siguientes expresiones:

   a. $x^2 + 2x$

   b. $x^2 - 2x + ax - 2a$

   c. $25x^2 + 10x + 1$

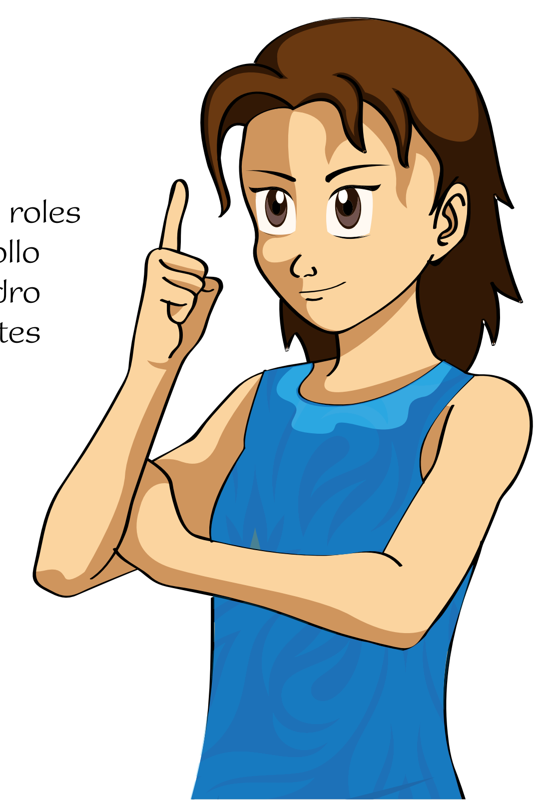
   d. $x^2 - 6x + 9$

6. Invitamos al docente a evaluar las actividades desarrolladas y le solicitamos que nos aclare las dudas, si es necesario.

# BC Fundamentación Científica y Ejercitación

## TRABAJO EN EQUIPO

1. Nos reunimos en grupos de cuatro, asignamos los roles que consideremos necesarios para el buen desarrollo de las siguientes actividades y elaboramos un cuadro sinóptico o un resumen de las ideas más importantes de la lectura y lo anotamos en nuestro cuaderno:



## *Funciones polinómicas*

http://www.saferain.com/404/219-fuentes-con-chorros-cristalinos.html

Las funciones polinómicas y su representación gráfica tienen gran importancia en la matemática, puesto que son modelos que describen relaciones numéricas entre dos variables que intervienen en diversos problemas y/o fenómenos que provienen del mundo real.

Las funciones polinómicas son aquellas cuya expresión es un polinomio. Una función polinómica de grado "$n$" es de la forma

$$f(x) = p(x), \qquad siendo\ \ p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$con\ n\ \in \mathbb{N}, con\ a_i \in \mathbb{R}\ y\ a_n \neq 0$$

El **dominio** de estas funciones son todos los números reales: $Dominio\ f = \mathbb{R}$. En cambio, el **rango** de la función se refiere a los valores que obtiene la variable independiente, que en algunos casos se altera, aunque siempre es un subconjunto de los números reales.
El número $a_n$ , es el coeficiente de la variable con el exponente mayor y es el coeficiente principal o líder. El término $a_0$ es el constante.

## *Propiedades de la función polinómica*

- ✓ La gráfica de $y = f(x)$ intercepta al eje **y** en el punto (0, c).
- ✓ La gráfica de $y = f(x)$ intercepta al eje **x** cuando en los puntos de las coordenadas se obtiene la ordenada cero $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$,… $(x_n, 0)$.
- ✓ La función polinómica es continua.
- ✓ El dominio de la función polinómica siempre son los números reales.
- ✓ La función polinómica presenta intervalos donde esta es creciente o decreciente.
- ✓ Algunas funciones tienen un valor mínimo o valor máximo.
- ✓ Algunas funciones tienen concavidad.

## *Raíces de una función polinómica*

Para determinar los ceros de una función polinómica, es decir, las intersecciones con el eje de las **x**, se considera la ecuación $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ y se busca para qué valores de $x$ se cumple esta condición.

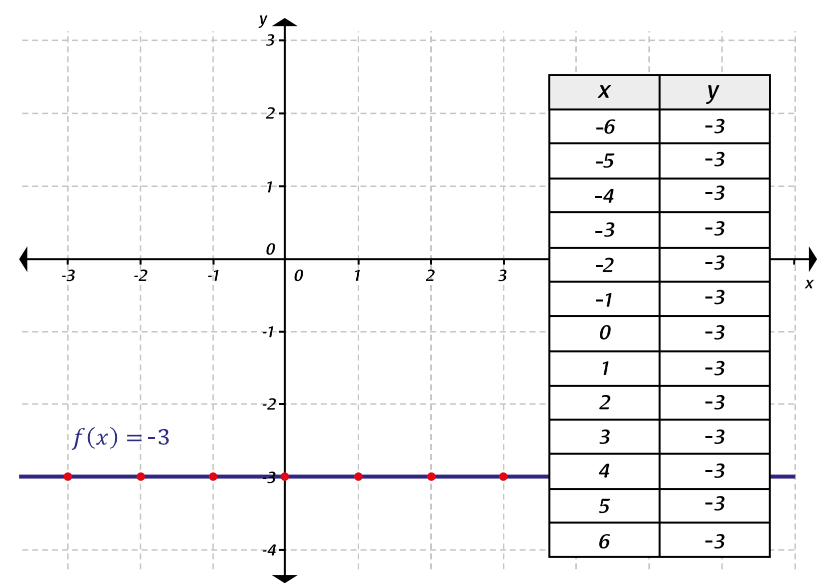
Entre las funciones polinómicas se encuentran:





- **Función constante**

| FUNCIÓN CONSTANTE | |
|---|---|
| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
| $y = k$<br><br>$\forall\ k \in \mathbb{R}$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br><br>**Su gráfica es una recta.** | • Su gráfica es una recta horizontal paralela al eje de las abscisas (eje $x$).<br>• Si $k > 0$, entonces la recta está por encima del eje $x$.<br>• Si $k < 0$, entonces la recta está por debajo del eje $x$. |
| **Representación gráfica y tabla de valores** | |

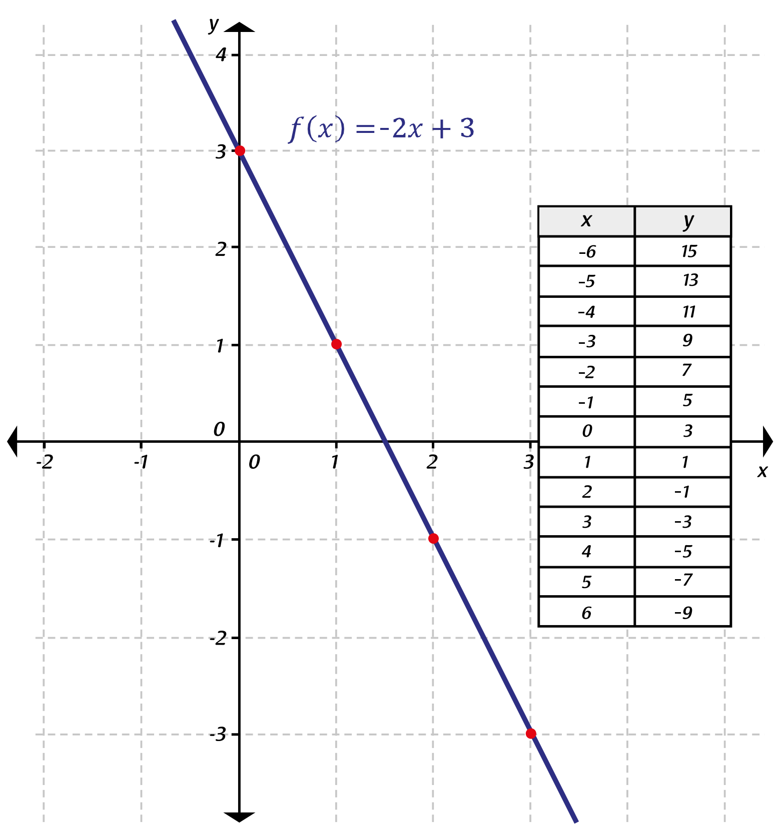



| x | y |
|---|---|
| -6 | -3 |
| -5 | -3 |
| -4 | -3 |
| -3 | -3 |
| -2 | -3 |
| -1 | -3 |
| 0 | -3 |
| 1 | -3 |
| 2 | -3 |
| 3 | -3 |
| 4 | -3 |
| 5 | -3 |
| 6 | -3 |

- **Funciones polinómicas de primer grado**

| **FUNCIÓN AFÍN** | |
|---|---|
| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
| $y = mx + b$<br>$Ax + By + C = 0$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br>$Rango\ f = \mathbb{R}$<br>**Su gráfica es una recta.** | • Su gráfica es una recta oblicua.<br>• La gráfica se define por dos puntos.<br>• La pendiente de la recta es "$m$".<br>• La constante "$b$" es el punto de corte con el eje Y, por tanto pasa por el punto Q (0, $b$).<br>• Cuando \|$m$\| es mayor, está más cerca del eje de las ordenadas (eje $y$), y si es menor, está más cerca del eje de las abscisas (eje $x$). |

**Representación gráfica y tabla de valores**



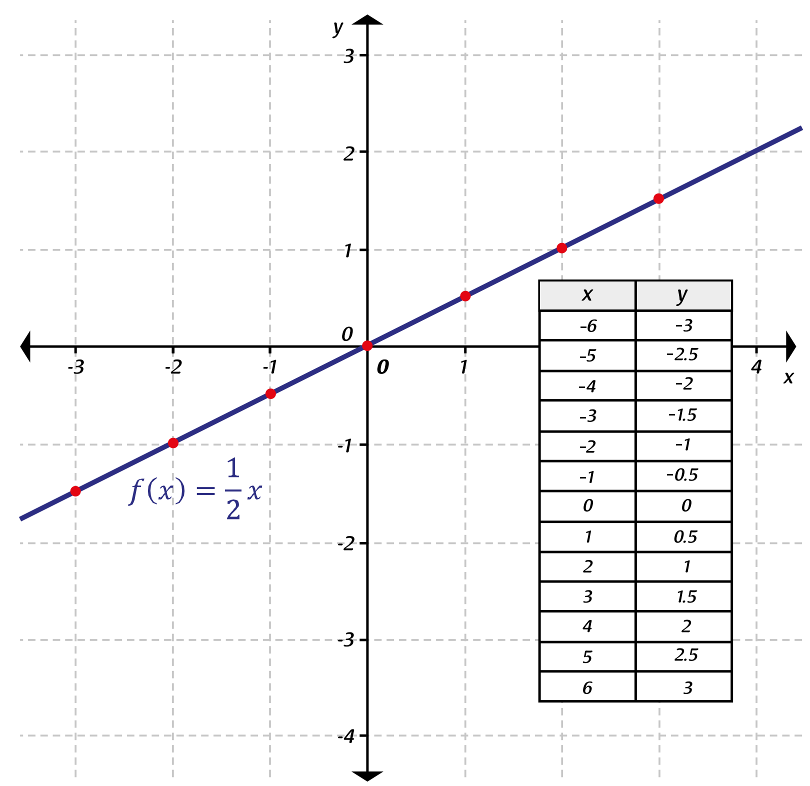

| x | y |
|---|---|
| -6 | 15 |
| -5 | 13 |
| -4 | 11 |
| -3 | 9 |
| -2 | 7 |
| -1 | 5 |
| 0 | 3 |
| 1 | 1 |
| 2 | -1 |
| 3 | -3 |
| 4 | -5 |
| 5 | -7 |
| 6 | -9 |





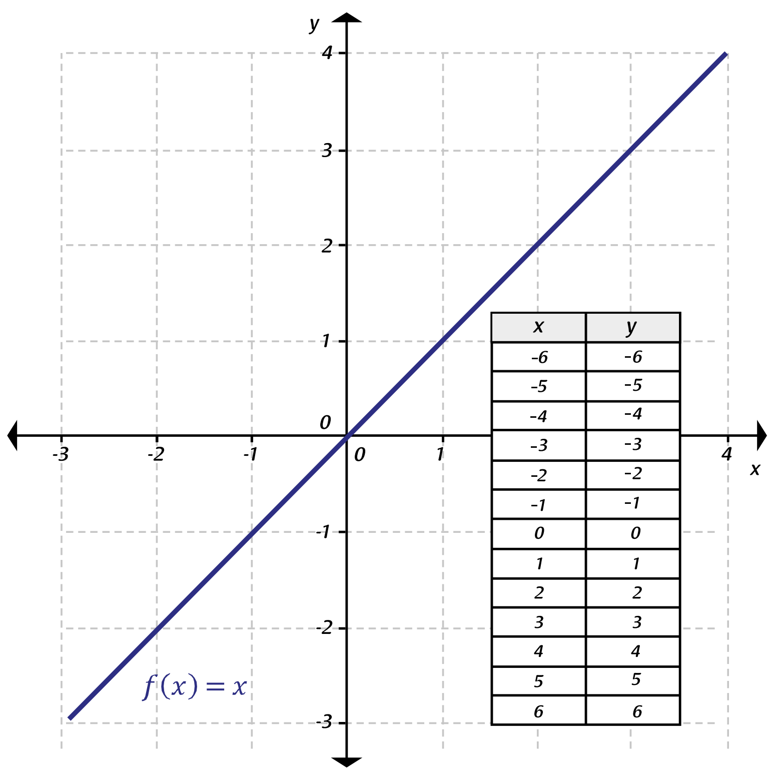
| **FUNCIÓN LINEAL** | |
|---|---|
| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
| Si $b = 0$ ,entonces $y = mx$<br>$\forall\ m \in \mathbb{R}\ ; m \neq 0$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br>$Rango\ f = \mathbb{R}$<br>**Su gráfica es una recta.** | • También se denomina de proporcionalidad directa.<br>• Siempre pasa por el origen de las coordenadas (0,0). |

**Representación gráfica y tabla de valores**




| x | y |
|---|---|
| -6 | -3 |
| -5 | -2.5 |
| -4 | -2 |
| -3 | -1.5 |
| -2 | -1 |
| -1 | -0.5 |
| 0 | 0 |
| 1 | 0.5 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1.5 |
| 4 | 2 |
| 5 | 2.5 |
| 6 | 3 |

| FUNCIÓN IDENTIDAD | |
|---|---|
| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
| Si $m = 1$ y $b = 0$ entonces $y = x$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br>$Rango\ f = \mathbb{R}$<br>**Su gráfica es una recta.** | • Su pendiente es $m = 1$.<br>• Es la bisectriz del 1° y 3° cuadrante, por tanto forma un ángulo de 45° con el eje $x$. |
| **Representación gráfica y tabla de valores** | |




| x | y |
|---|---|
| -6 | -6 |
| -5 | -5 |
| -4 | -4 |
| -3 | -3 |
| -2 | -2 |
| -1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |

2. Determinamos las gráficas de las siguientes funciones y las clasificamos según corresponda:

a. $y = -5x + 4$

b. $y = \frac{2}{3}x$

c. $y = x$

d. $y = -6x$

e. $y = \frac{3}{4}x - 5$

f. $y = -x$

g. $y = -3x + 7$

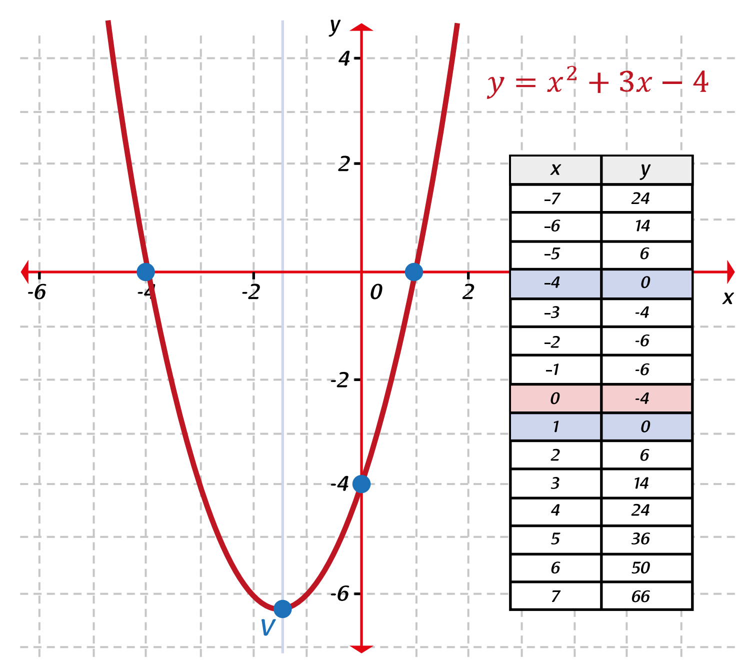
h. $y = 8x + 10$





- **Funciones polinómicas de segundo grado**

| FUNCIÓN CUADRÁTICA | |
|---|---|
| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
| $y = ax^2 + bx + c$<br>$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}\ ; a \neq 0$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br>**Su gráfica es una curva llamada parábola.** | • Vértice en el punto $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$<br>• Eje de simetría en $x = -\frac{b}{2a}$<br>• Puntos de corte con el eje $x$: Se obtienen resolviendo la ecuación de 2° grado asociada: $ax^2 + bx + c = 0$<br>• Puntos de corte con el eje $y$: Calculamos $f(0)$, siendo Q (0, c).<br>• Si $a > 0$, las ramas parabólicas están hacia arriba (el vértice es un **mínimo**).<br>• Si $a < 0$, las ramas parabólicas están hacia abajo (el vértice es un **máximo**).<br>• Cuanto mayor sea $\lvert a \rvert$, más próximas están las ramas al eje de las ordenadas (eje $y$) y viceversa. |
| **Representación gráfica y tabla de valores** | |




| x | y |
|---|---|
| -7 | 24 |
| -6 | 14 |
| -5 | 6 |
| -4 | 0 |
| -3 | -4 |
| -2 | -6 |
| -1 | -6 |
| 0 | -4 |
| 1 | 0 |
| 2 | 6 |
| 3 | 14 |
| 4 | 24 |
| 5 | 36 |
| 6 | 50 |
| 7 | 66 |

3. Determinamos las gráficas de las siguientes funciones:

a. $y = 2x^2 - 8x + 2$

b. $y = -x^2 + 4x + 3$

c. $y = 1{,}5x^2$

d. $y = \frac{1}{2}x^2$

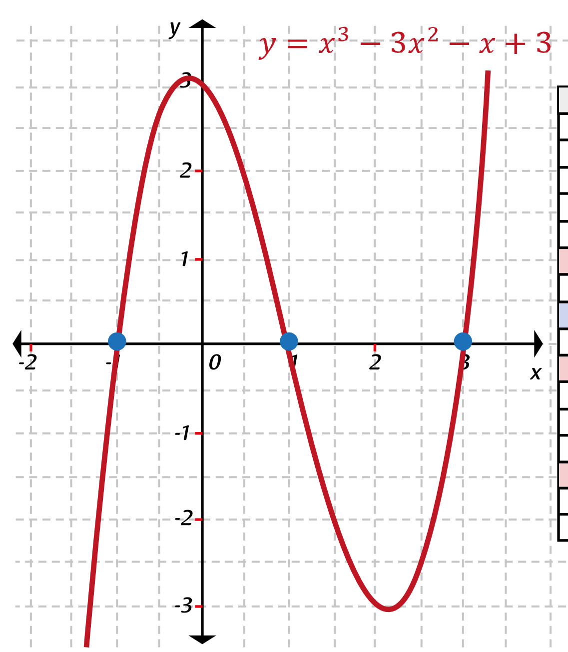
e. $y = x^2 + 3$

f. $y = (x-2)^2 + 3$

- **Funciones polinómicas de tercer grado**

| FUNCIÓN CÚBICA | |
|---|---|
| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
| $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$<br>$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\,;\, a \neq 0$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br>**Su gráfica es una curva.** | • Los puntos de corte con el eje $x$: Se obtienen resolviendo la ecuación de 3º grado asociada:<br>$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$<br>• El punto de corte con el eje $y$: Se obtiene calculando $f(0)$, siendo Q (0, d). |

**Representación gráfica y tabla de valores**




| x | y |
|---|---|
| -3.5 | -73.125 |
| -3 | - 48 |
| -2.5 | -28.875 |
| -2 | - 15 |
| -1.5 | - 5.625 |
| -1 | 0 |
| -0.5 | 2.625 |
| 0 | 3 |
| 0.5 | 1.875 |
| 1 | 0 |
| 1.5 | -1.875 |
| 2 | -3 |
| 2.5 | -2.625 |
| 3 | 0 |
| 3.5 | 5.625 |
| 4 | 15 |

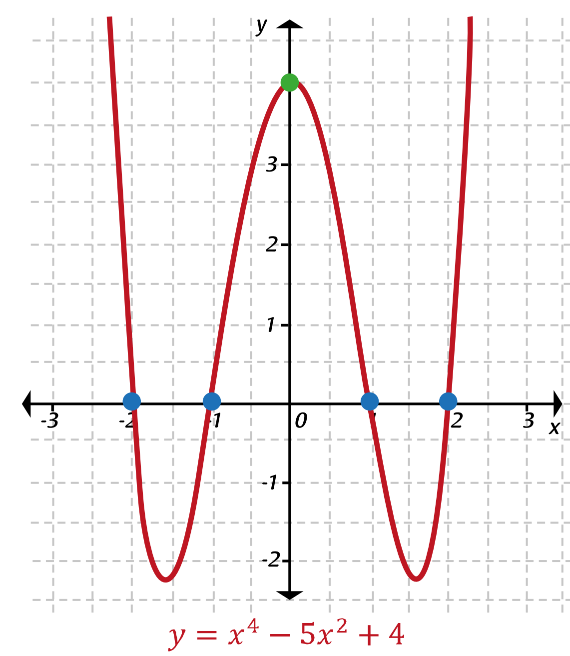




- **Funciones polinómicas de cuarto grado**

| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
|---|---|
| $y = a_4x^4 + \cdots + a_1x + a_0$<br>$\forall\, a \in \mathbb{R}\,;\, a_4 \neq 0$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br>**Su gráfica es una curva.** | • Los puntos de corte con el eje $x$: Se obtienen resolviendo la ecuación de 4º grado asociada:<br>$a_4x^4 + \cdots + a_1x + a_0 = 0$<br>• El punto de corte con el eje $y$: Se obtiene calculando $f(0)$, siendo $Q(0, a_0)$ . |

**Representación gráfica y tabla de valores**

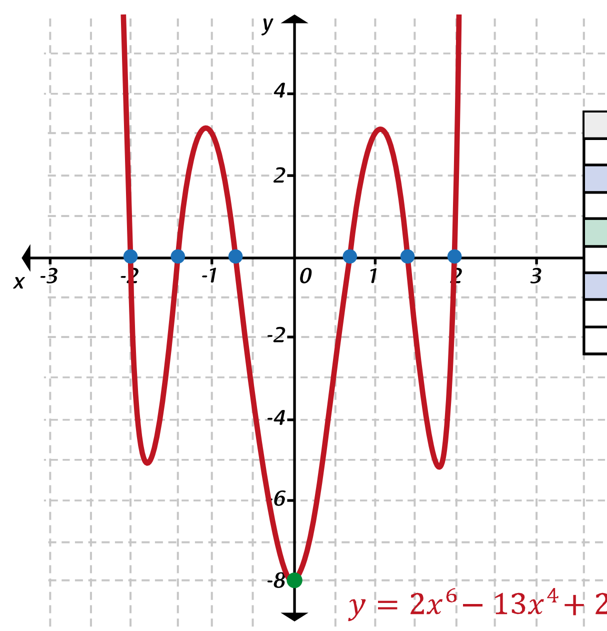



| x | y |
|---|---|
| -3.5 | -92.8125 |
| -3 | 40 |
| -2.5 | 11.8125 |
| -2 | 0 |
| -1.5 | - 2.1875 |
| -1 | 0 |
| -0.5 | 2.8125 |
| 0 | 4 |
| 0.5 | 2.8125 |
| 1 | 0 |
| 1.5 | -2.1875 |
| 2 | 0 |
| 2.5 | 11.8125 |
| 3 | 40 |
| 3.5 | 92.8125 |
| 4 | 180 |

- **Funciones polinómicas de grado “$n$”**

| Expresión algebraica y clase de gráfica | Características |
|---|---|
| $y = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$<br>$\forall\, a \in \mathbb{R}\,;\, a_n \neq 0$<br>$Dominio\ f = \mathbb{R}$<br>**Su gráfica es una curva.**<br>*Se cumple que la gráfica se dobla una vez menos que el grado de la función.* | • Los puntos de corte con el eje $x$: Se obtienen resolviendo la ecuación asociada:<br>$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$<br>• El punto de corte con el eje $y$: Es $Q(0, a_0)$, es decir, para $x = 0$ calculamos el valor de $y$. |

**Representación gráfica y tabla de valores**




| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -3 | 595 |
| -2 | 0 |
| -1 | 3 |
| 0 | -8 |
| 1 | 3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 595 |
| 4 | 5208 |

4. *Asociamos con una línea la función que se cumple con el enunciado de la derecha según corresponda:*

a. $p(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$     g. Función polinómica de grado 5

b. $p(x) = -3$     h. Función polinómica de grado 3

c. $p(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$     i. Función polinómica de grado 2

d. $p(x) = \sqrt{7}$     j. Función polinómica de grado 8

e. $p(x) = -4x^5 + x^2 + x + 5$     k. Función polinómica de grado 0

f. $p(x) = -x^3(x+2)^4(x-2)$     l. Función polinómica sin grado





## *Formulación y solución de problemas relacionados con funciones polinómicas*

Mediante las funciones polinómicas, por ejemplo, las de segundo grado, se pueden estudiar algunas situaciones presentes en el mundo físico y la vida real. Observemos los pasos para resolver el siguiente problema:

El dueño de una joyería compró cierto número de joyas por $360 000. Si hubiera comprado 6 joyas menos por el mismo dinero, cada joya habría costado $10 000 más. ¿Cuántas joyas compró y cuál fue el precio de cada una?

**Paso 1: Identificación y relación de variables**

Si designamos $\boldsymbol{x}$ al número de joyas que compró el joyero y $\boldsymbol{z}$ al precio de cada joya, se pueden indicar los datos del problema en la siguiente tabla:

| Caso | Número de joyas que se compran | Precio que se paga por cada joya | Costo total de las joyas |
|---|---|---|---|
| 1 | $x$ | $z$ | $x \cdot z = 360000$ |
| 2 | $x - 6$ | $z + 10000$ | $(x-6)\cdot(z+10000) = 360000$ |

**Paso 2: Planteamiento de ecuaciones**

A partir del costo total de las joyas, se establecen las siguientes ecuaciones:

$$x \cdot z = 360000 \qquad (1)$$

$$z = \frac{360000}{x} \qquad (2)$$

$$(x-6)\cdot(z+10000) = 360000 \qquad (3)$$

**Paso: 3 Solución de las ecuaciones**

Se reemplaza el valor de $z$ de acuerdo con (2) en la ecuación (3):

$$(x-6)\cdot\left(\frac{360000}{x}+10000\right)=360000$$

Se determina el común denominador

$$(x-6)\cdot\left(\frac{360000\ +\ 10000x}{x}\right)=360000$$

Se simplifica la ecuación

$$(x-6)\cdot\left(\frac{360000\ +\ 10000x}{x}\right)=\frac{360000x}{x}$$

Se factoriza

$$10000(x-6)\cdot\left(\frac{36\ +\ x}{x}\right)=\frac{10000(36)x}{x}$$

Se simplifica la ecuación

$$(x-6)\cdot\left(\frac{36\ +\ x}{x}\right)=\frac{(36)x}{x}$$

Como los denominadores son iguales también lo son los numeradores

$$(x-6)(36+x)=36(x)$$

Se resuelven los productos

$$36x+x^2-216-6x=36x$$

Se ordena e iguala a cero

$$x^2-6x-216=0$$

Se aplica la fórmula para ecuaciones cuadráticas

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36+864}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{900}}{2}=\frac{6\pm 30}{2}$$

$$x_1=\frac{6+30}{2}=\frac{36}{2}=18$$

$$x_2=\frac{6-30}{2}=\frac{-24}{2}=-12$$

Entonces, se concluye que la solución $x_2=-12$ no tiene sentido para el problema. Ahora, se reemplaza el valor de $x$ en la ecuación (2):

$$z=\frac{360000}{18}=20\ 000$$





Por lo tanto, si se compran 17.5 joyas cada una vale aproximadamente \$20 000, pero si se compran 11.5 joyas cada una vale \$30 000.

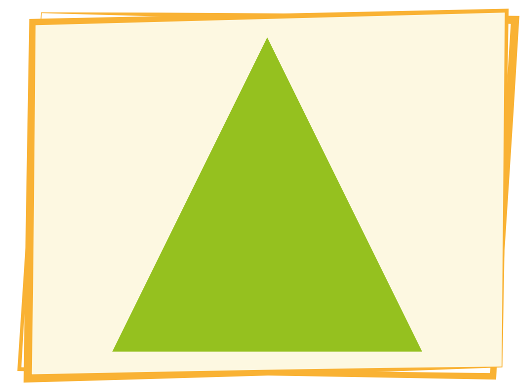
5. Resolvemos las siguientes situaciones:

   a. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio tiene 18 años menos que la mayor. Determinamos las edades respectivas.

   b. Cierta compañía ofrece un celular rebajado según puntos conseguidos, tal como lo indica la tabla. ¿Esta tabla corresponde a una función polinómica de primer grado? En caso afirmativo, ¿cuál es la ecuación?

| Puntos $(x)$ | 3 000 | 5 000 | 6 000 |
|---|---|---|---|
| Precio $(y)$ | 220 | 200 | 190 |

   c. La altura de un triángulo es 5 menos que su base y su área es de $207cm^2$.Determinamos la base y la altura.



## D Aplicación

### TRABAJO INDIVIDUAL

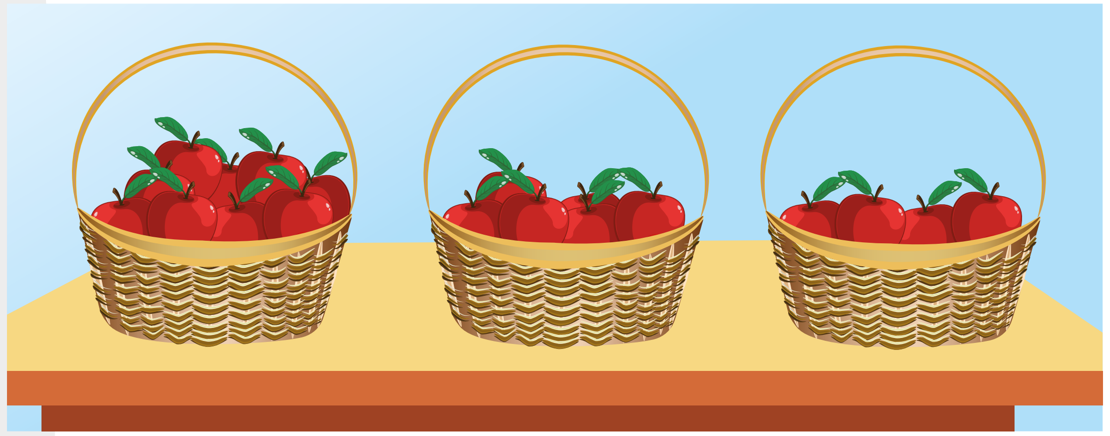
1. Resuelvo en mi cuaderno las siguientes situaciones empleando alguno de los métodos tratados:

   a. Un atleta ha recorrido las distancias que se muestran en la tabla en los tiempos que se indican:

| TIEMPO (min) | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| RECORRIDO (km) | 0.8 | 1.6 | 2.4 | 3.2 |

Elaboro una gráfica para representar la información de la tabla y determino a qué tipo de función polinómica corresponde.

b. Tres canastos contienen 575 manzanas. El primero tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada canasto?



## TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparamos los resultados obtenidos de manera individual en las situaciones anteriores. Llegamos a un consenso para determinar si alguno de los dos tuvo errores y explicamos las razones para que esto ocurriera.

3. En plenaria realizamos y compartimos nuestras observaciones sobre cada una de las situaciones anteriores.

4. Compartimos con nuestros compañeros y profesor las actividades realizadas, y consignamos en nuestros cuadernos las conclusiones generadas durante la actividad y la plenaria.

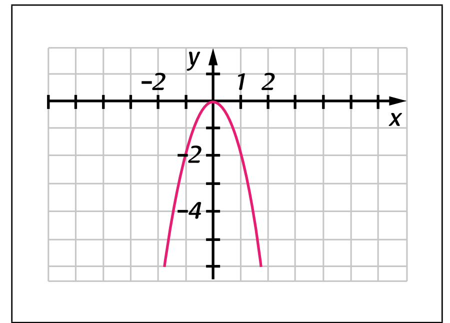
# E Complementación

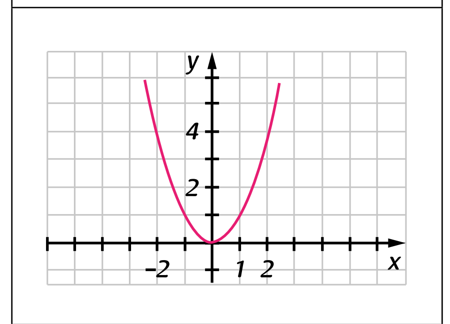
## TRABAJO EN PAREJAS

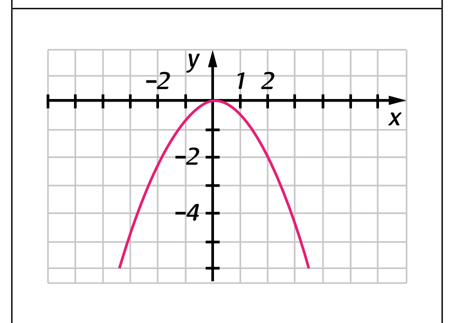
1. Relaciono cada columna según corresponda:

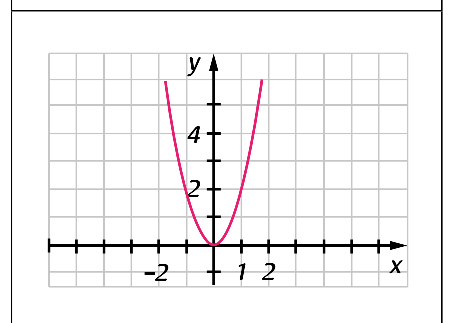


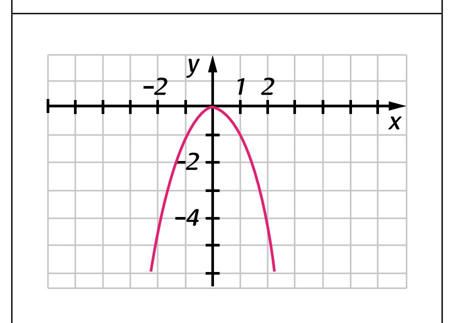


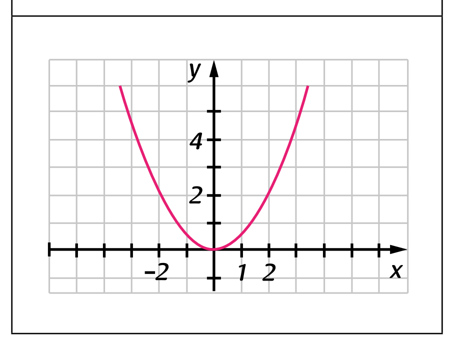



| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -4 | -1 | 0 | -1 | -4 |

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1/2 | 0 | 1/2 | 2 |

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -8 | -2 | 0 | -2 | -8 |

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -2 | -1/2 | 0 | -1/2 | -2 |

$y = -x^2$

$y = -\frac{1}{2}x^2$

$y = -2x^2$

$y = x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$

$y = 2x^2$

2. Invitamos al docente a aclarar dudas y revisar nuestro trabajo para su valoración.





## Evaluación por competencias

1. Determino en qué paso se cometió el error:

PASO 1 $x^2 + 7x + 10 = 2$
PASO 2 $(x + 5)(x + 2) = 1 \cdot 2$
PASO 3 $x + 5 = 1$ o $x + 2 = 2$
PASO 4 $x = -4$ o $x = 0$

A. PASO 1.
B. PASO 2.
C. PASO 3.
D. PASO 4.

1

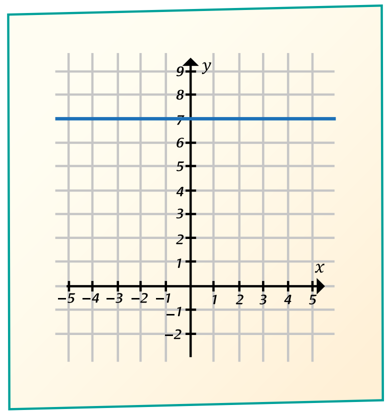
2. La función polinómica $f(x) = (x + 3)(x + 2)$ es de grado:

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

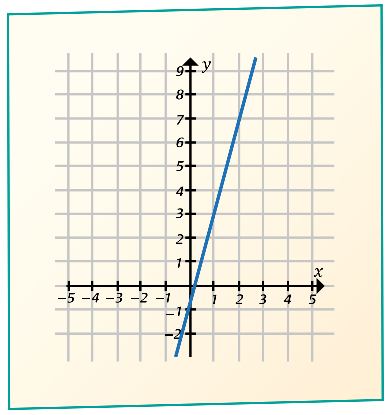
2

3. La gráfica que representa una función de grado 2 es:

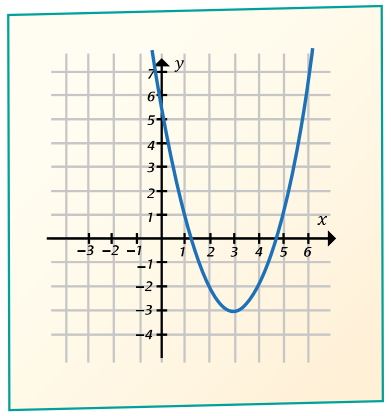
A.



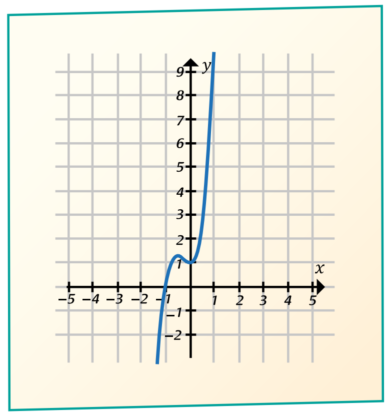
C.



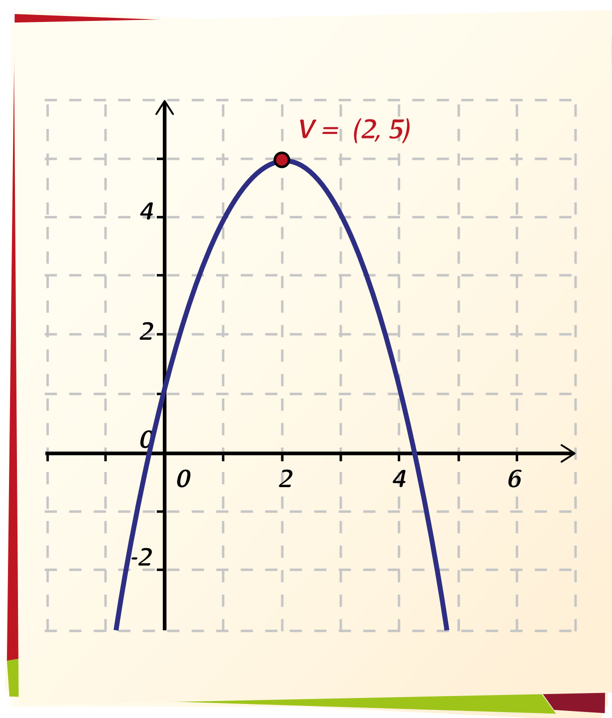
B.



D.



4. La función que le corresponde a la gráfica es:








A. $y = -(x+2)^2 - 5$

B. $y = (x+2)^2 + 5$

C. $y = (x-2)^2 - 5$

D. $y = -(x-2)^2 + 5$

4

5. Se desea construir un cercado de forma rectangular utilizando 1000 metros de alambre, el cual debe tener la máxima área posible. Las dimensiones del cercado son:

A. Largo: 100 m y ancho: 10 m.

B. Largo: 250 m y ancho: 250 m.

C. Largo: 500 m y ancho: 500 m.

D. Largo: 400 m y ancho: 100 m.

5