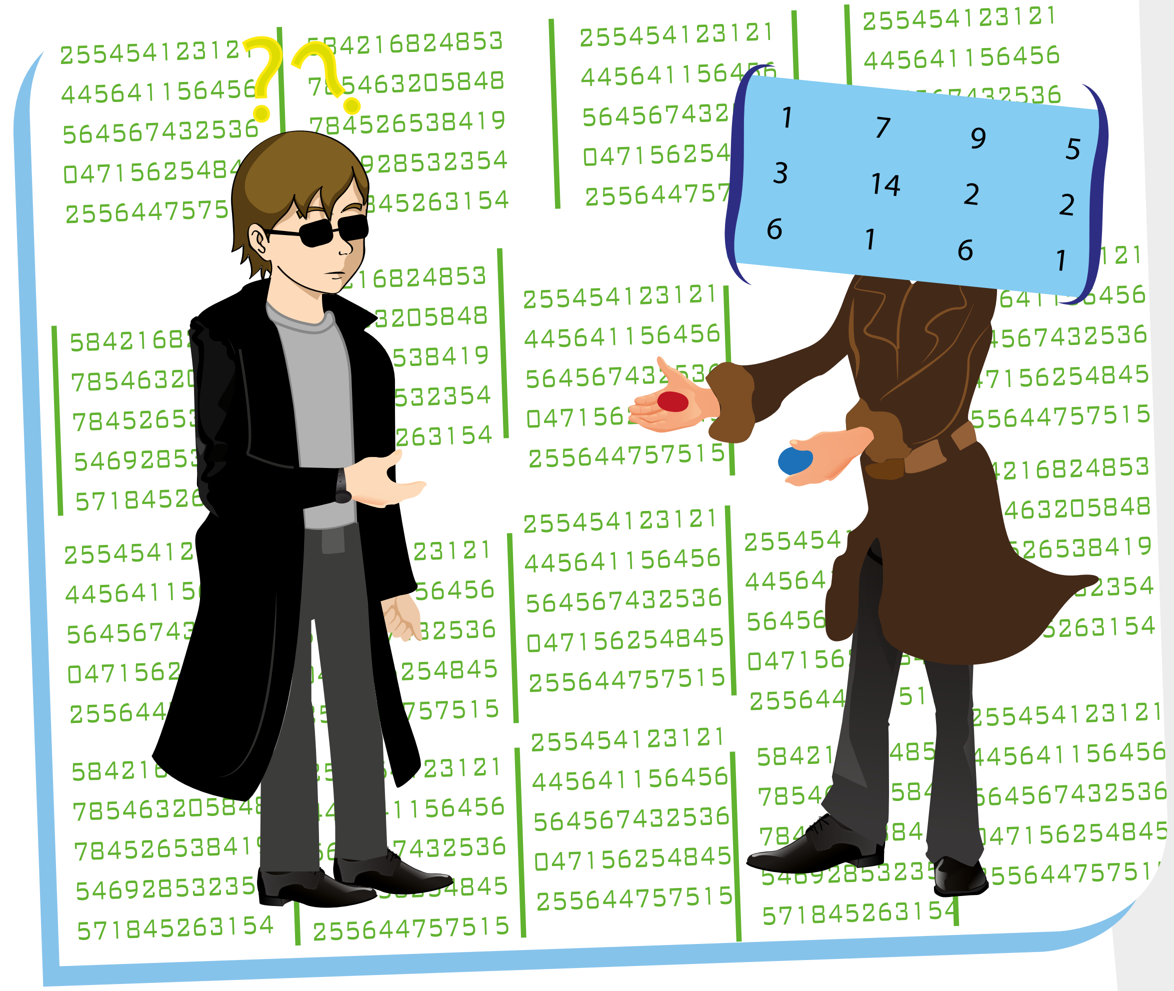
Glosario

- **Determinante:** Es un tipo de matriz que tiene el mismo número de filas y columnas con el que siempre es posible determinar un valor numérico.
- **Libra:** Es una unidad de masa que equivale a 500 gramos.
- **Método de Cramer:** Es un método para solucionar sistemas de ecuaciones 2 x 2 o 3 x 3.
- **Método de Sarrus:** Es un método para calcular el valor de un determinante 3 x 3.
- **Plano cartesiano 3D:** Es un sistema cartesiano tridimensional que consta de tres planos perpendiculares entre sí, los cuales se interceptan en los ejes coordenados que se denominan x, y y z.
- **Punto en 3D:** Es un punto que se representa en un sistema cartesiano tridimensional, cada una de sus coordenadas corresponde a un punto de cada eje y a una esquina de un prisma.

Guía 3

Utilicemos las matrices para solucionar sistemas de ecuaciones



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Identifica las reglas de transformación de una matriz para solucionar un sistema de ecuaciones.

Procedimental

- Utiliza las matrices para resolver sistemas de ecuaciones.

Actitudinal

- Demuestra disposición para analizar y resolver situaciones problema.

A Vivencia

TRABAJO EN PAREJAS

1. Con un compañero recordamos lo desarrollado en la guía anterior de esta unidad. Elaboramos un mapa conceptual relacionado con los procedimientos para solucionar sistemas de ecuaciones 3 X 3.

2. Resolvemos los siguientes problemas en el cuaderno y explicamos el método que utilizamos para encontrar las respuestas:

   a. La diferencia de dos números es 3 y la tercera parte de su suma es 9. ¿Cuáles son esos números?

   b. 5 libras de café y 7 libras de azúcar cuestan $51.7 dólares y 4 libras de café y 6 libras de azúcar cuestan $43.4 dólares.

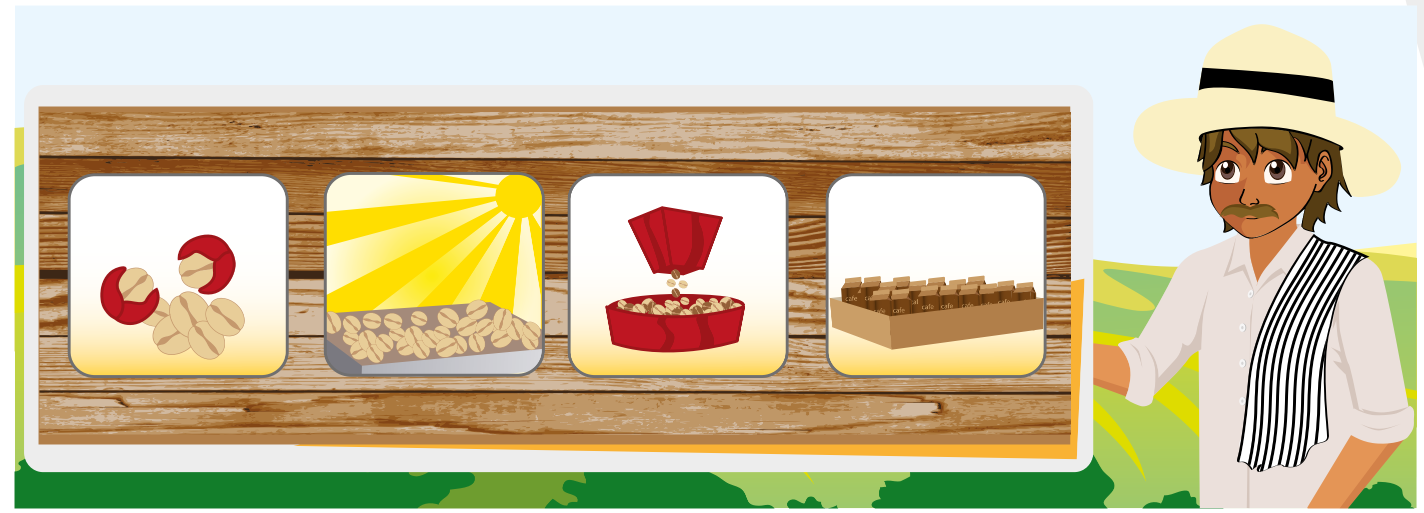
   ✓ ¿Cuáles son los precios de una libra de café y una libra de azúcar, si en ambos casos se manejan los mismos precios?

   ✓ ¿Cuál es el precio de una libra de café y una libra de azúcar según el precio del peso colombiano hoy?

   c. La suma de tres números da 30. Si se suma el primer y segundo número da 19; y si se suma el primer y tercer número da 20. ¿Cuáles son los tres números?

   d. Carlos organizó una asociación de productores de café; en la primera finca se produce una tonelada, en la segunda dos toneladas y en la tercera cuatro toneladas. Cada producción requiere de tres procesos: Un proceso de despulpe, fermentación y secado, un segundo proceso de tostión y molienda; y un tercer proceso de empaque. Cada uno ellos requiere un tiempo de 380, 330 y 200 horas-persona por semana, respectivamente. Determinamos cuántas toneladas de café deben producirse por finca cada semana para que la asociación opere a toda su capacidad.

	Tiempo (hora-persona) por finca		
Proceso	Finca A 1 tonelada	Finca B 2 toneladas	Finca C 4 toneladas
Despulpe, fermentación y secado.	0.6	1	1.5
Tostión y molienda.	0.7	0.9	1.2
Empaque	0.3	0.3	0.5



3. Compartimos las respuestas a nuestro profesor para su correcta verificación y buscamos la aclaración de nuestras dudas.

TRABAJO INDIVIDUAL

4. Recuerdo los métodos tratados en las guías anteriores y resuelvo los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x - 2y + 3z = -1 \\ 7x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -x - 2y + z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = -2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 0.2x + 0.3y - z = 1.2 \\ -1.4x - 1.2y + 3.2z = -2.4 \\ 0.7x - 0.2y - 2.1z = 3.2 \end{cases}$

TRABAJO EN EQUIPO

5. Confronto de manera respetuosa las respuestas al ejercicio anterior con uno de mis compañeros y comprobamos los resultados con la calculadora.

6. Le presentamos los ejercicios realizados al profesor y aclaramos dudas, si es necesario.

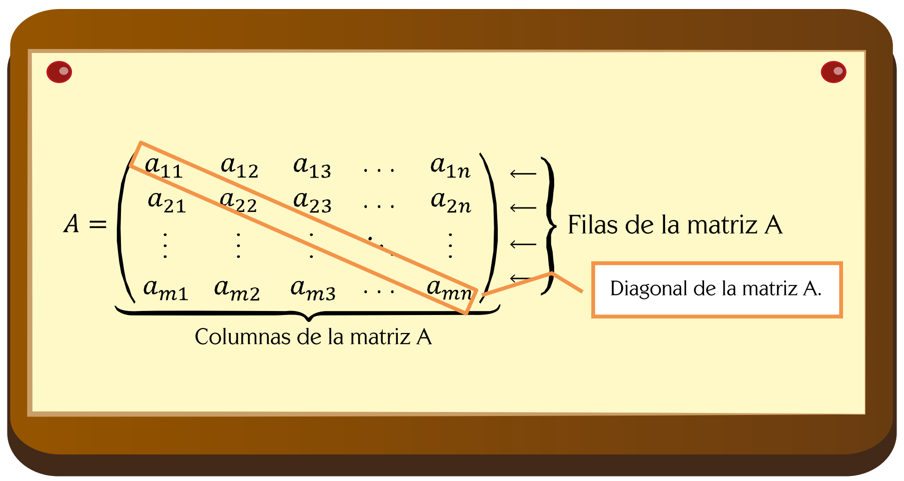
BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Conformamos un grupo de tres integrantes y asignamos los roles teniendo en cuenta las acciones: Un moderador de la actividad, una persona que se responsabilice de conseguir el material que se requiera y un lector. Realizamos la siguiente lectura y consignamos en el cuaderno lo que vayamos comprendiendo:

Matrices y determinantes

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos. Una **matriz** es una tabla rectangular de números reales dispuestos en las filas y columnas:



La matriz se simboliza así A= (a_{ij}). Cada elemento de la matriz lleva dos subíndices para ubicarlo, el primero indica la fila y el segundo indica la columna.

Ejemplo 1:
La matriz B tiene 2 filas y 3 columnas y se simboliza así B= (b_{ij}).

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ \sqrt{3} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Está ubicado en la fila 1 columna 3. Se indica b_{13}

Los elementos de la matriz se identifican de la siguiente manera:

$b_{11} = -3$	$b_{12} = 2$	$b_{13} = -1$
$b_{21} = \sqrt{3}$	$b_{22} = \frac{3}{2}$	$b_{23} = 1$

2. Determinamos en cada una de las matrices el número de filas y columnas:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Identificamos cada uno de los elementos que se solicitan de las matrices:

c_{11}	d_{12}	e_{12}
c_{21}	d_{21}	e_{22}
c_{22}	d_{32}	e_{31}

4. Solicitamos la presencia de nuestro profesor para que nos revise las expresiones y verifique si son correctas.

5. Continuamos con la lectura y consignamos en el cuaderno las ideas importantes:

Clases de matrices

a) Existen varias formas de clasificar las matrices como la coincidencia del número de filas y columnas.

Matriz cuadrada: Son aquellas que tienen el mismo número de filas y columnas. **Ejemplo:** $F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 21 \\ 0 & -1 & -10 \\ -20 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ La matriz F es cuadrada porque tiene 3 filas y 3 columnas.	**Matriz no cuadrada:** Son aquellas que no tienen el mismo número de filas y columnas. **Ejemplo:** $G=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ La matriz G no es cuadrada porque tiene 3 filas y 1 columna.

b) Existen otras matrices que se clasifican por algunas cualidades que cumplen los elementos:

- **Matriz nula:** Es la que todos sus elementos son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular superior:** Es una matriz que por encima de su diagonal tiene elementos diferentes a cero y por debajo de ella todos los elementos son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior:** Es una matriz que por debajo de su diagonal tiene elementos diferentes a cero y por encima de ella todos los elementos son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** Todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal son ceros.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidad o unidad:** La diagonal son solo unos. Los otros elementos de la matriz son ceros

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Clasificamos las siguientes matrices y justificamos nuestras respuestas:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Continuamos con la lectura y anotamos en el cuaderno los aspectos más importantes:

Los **determinantes** son **matrices cuadradas**. Se representan como $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ o |A| y se leen en ambos casos "determinante A", además, el determinante es un número que se obtiene de la sustracción del valor de los productos de los elementos de la matriz.

- Si es una matriz 2 x 2 se define el determinante de la matriz A como el número:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{22}$$

- Si es una matriz 3 x 3 se define el determinante de la matriz A como el número:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})] - \\ -[(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})]$$

En la unidad 1 guía 2 utilizamos esta forma de determinar el valor del determinante cuando utilizamos el método de Cramer, pero la dificultad se presenta cuando los determinantes son matrices de 4 x 4, 5 x 5, 6 x 6, entre otros. Es por eso que se construyó otro método que requiere encontrar **el menor y el cofactor de un elemento** del determinante, el cual se aplica a partir de matrices de 3 x 3.

El menor de un elemento es un determinante de segundo orden, o de menor valor, que se obtiene al suprimir la fila y la columna que contiene el elemento solicitado.

Ejemplos:

Si se tiene el determinante

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- El menor de a_{11} es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- El menor de a_{23} es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

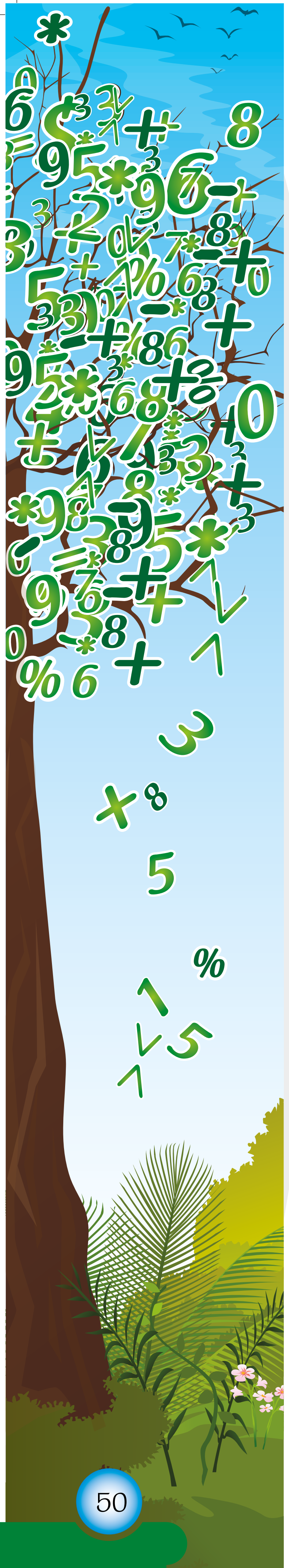
8. Calculamos el menor elemento que se solicita del siguiente determinante:

$$Det(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & -2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

a. El menor de g_{23}
b. El menor de g_{33}
c. El menor de g_{41}
d. El menor de g_{44}
e. El menor de g_{32}

9. Continuamos con la lectura y seguimos consignando en el cuaderno las ideas fundamentales:

De cada uno de los elementos de un determinante es posible calcular el **cofactor**



de un elemento, que es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el valor del menor elemento que está ubicado en la fila i y la columna j. Simbólicamente:

$$cofactor\ de\ a_{ij} = \left[(-1)^{i+j}\right]\cdot\left[menor\ de\ a_{ij}\right]$$

Ejemplos:
Si se tiene el determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

- Hallamos el cofactor de a_{12}:

$$\boxed{a_{12} = 3} \qquad \begin{vmatrix} \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{-4} \\ 1 & \cancel{-1} & 1 \\ -2 & \cancel{-3} & 2 \end{vmatrix}$$

El cofactor de $a_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\cdot[(1)(2)-(1)(-2)]$

$= (-1)\cdot[2+2] = (-1)\cdot(4) = -4$

- Hallamos el cofactor de a_{22}:

$$\begin{vmatrix} -2 & \cancel{3} & -4 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ -2 & \cancel{-3} & 2 \end{vmatrix} \qquad \boxed{a_{22} = -1}$$

El cofactor de $a_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4\cdot[(-2)(2)-(-2)(-4)]$

$= (+1)\cdot[-4-8] = (+1)[-12] = -12$

10. Teniendo en cuenta la información anterior, determinamos el valor de los cofactores que se solicitan del siguiente determinante:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a. El cofactor de a_{11}
b. El cofactor de a_{21}
c. El cofactor de a_{22}
d. El cofactor de a_{23}
e. El cofactor de a_{32}
f. El cofactor de a_{13}

11. Continuamos con la lectura para saber más acerca del método de la suma de factores, el cual nos permite hallar el valor del determinante. No olvidemos consignar los aspectos más importantes:

Método de la suma de cofactores

Este método consiste en hallar el valor de los productos de cada elemento de una fila por su correspondiente cofactor y sumar los resultados de esos productos

para hallar el valor del determinante. También se puede aplicar el método a los elementos de una misma columna:

Ejemplo 1:
Es posible calcular el valor de un determinante de 3x3 de seis maneras distintas con el método de la suma de cofactores, estudiemos el siguiente ejemplo:

$$Det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Para las filas	Para las columnas
Para la primera fila $= a_{11}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{11}} + a_{12}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{12}} + a_{13}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{13}}$	Para la primera columna $= a_{11}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{11}} + a_{21}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{21}} + a_{31}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{31}}$
Para la segunda fila $= a_{21}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{21}} + a_{22}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{22}} + a_{23}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{23}}$	Para la segunda columna $= a_{12}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{12}} + a_{22}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{22}} + a_{32}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{32}}$
Para la tercera fila $= a_{31}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{31}} + a_{32}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{32}} + a_{33}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{33}}$	Para la tercera columna $= a_{13}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{13}} + a_{23}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{23}} + a_{33}\cdot\binom{\text{cofactor}}{\text{de } a_{33}}$

Ejemplo 2:
Hallamos el valor del determinante Z con el método de suma de cofactores:

$$Det(Z) = |Z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Utilizamos la fila 1 del determinante Z para calcular su valor:

$$|z| = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + -3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|z| = 1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|z| = 1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|z| = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$|z| = 1[(-1)(1)-(-2)(2)] + 0 + (-3)[2(-2)-(3)(-1)]$

$|z| = 1\cdot[(-1)-(-4)] + 0 + (-3)[2\cdot(-2)-(3)(-1)]$

$|z| = 1[-1+4] + 0 + (-3)[-4+3]$

$|z| = 1(3) + 0 + (-3)(-1)$

$|z| = 3 + 0 + 3$

$|z| = 6$

a. Hallamos el valor del determinante Z utilizando la columna 2.
b. Hallamos el valor del determinante Z utilizando la fila 3.
c. ¿En todos los casos nos dio el mismo valor del determinante?

12. Ejercitamos lo aprendido para hallar el valor del determinante aplicando el método de la suma de cofactores:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

13. Repasamos el método de Cramer de la guía anterior y utilizamos el método de la suma de cofactores para resolver el sistema de ecuaciones 4x4:

$$\begin{cases} w + x + y + z = 2 \\ w - x - y + 2z = 3 \\ 4w + 2x - y + z = -4 \\ -w + 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

14. Invitamos al profesor para que valore lo que hemos aprendido y si tenemos dudas las aclaramos con él.

15. Seguimos con la lectura sobre cómo emplear una matriz para resolver sistemas de ecuaciones y consignamos en el cuaderno lo más relevante para nuestra comprensión:

Método de matrices

Recordemos que una matriz es un arreglo rectangular de números reales ubicados dentro de corchetes. Para utilizar las matrices se requiere escribir la **matriz aumentada** que es escribir dos matrices, una con los coeficientes de las variables y otra con los términos independientes o constantes de cada ecuación del sistema.

Ejemplo:
El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Las dos matrices que se forman son:

Matriz con coeficientes de las variables. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz con coeficientes con los términos independientes. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

La matriz aumentada que le corresponde al sistema es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Resolver un sistema de ecuaciones utilizando la matriz aumentada es realizar transformaciones a los números dentro de ella hasta encontrar la matriz triangular superior correspondiente, cuyos valores inferiores a la diagonal son ceros. Para ello realizamos los siguientes pasos para transformar las filas de la matriz aumentada que son similares al método de eliminación, estudiado en las anteriores guías:

Paso 1: Todos los números de una fila pueden multiplicarse (o dividirse) por cualquier número real distinto de cero.

Paso 2: Es posible sumar entre las filas.

Paso 3: Dos filas de una matriz pueden intercambiarse.

Si continuamos con nuestro ejemplo $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$ debemos realizar los siguientes pasos para transformar las filas a la matriz triangular: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right]$:

Si observamos la primera fila ya tiene $a_{11} = 1$. Entonces necesitamos transformar la fila dos para que quede $a_{21} = 0$; para ello, necesitamos multiplicar la primera fila (f1) por -2 y el resultado lo sumamos a los números de la segunda fila (f2), esta idea la escribimos: -2f1+f2 y la respuesta la colocamos en la f2.

Operaciones para la matriz	Operaciones con el método de eliminación
Los números de la primera fila multiplicados por -2 son: $1 \cdot (-2)$ $2 \cdot (-2)$ $3 \cdot (-2)$ es -2 -4 -6 y sumamos esos productos a la segunda fila $2 - 2$ $-1 - 4$ $2 - 6$ es 0 -5 -4	$x + 2y = 3$ $(Ec1)$ $2x - y = 2$ $(Ec2)$ multiplicamos por -2 a $Ec(1)$ $-2x - 4y = -6$ $(Ec3)$ sumamos $(Ec3)$ con $(Ec2)$ $-2x - 4y = -6$ $2x - y = 2$ $\quad / \; -5y = -4$ (Ec_4)

Luego, la nueva matriz que queda con estas operaciones es:

$$\xrightarrow{-2f1+f2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \end{array}\right]$$

Operaciones para la matriz	Operaciones con el método de eliminación
Ahora, necesitamos que a_{22}= 1, para ello, multiplicamos por $\frac{-1}{5}$ la fila 2: $0\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)$ $\quad -5\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)$ $\quad -4\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)$ es $0 \quad 1 \quad \frac{4}{5}$	Multiplicamos $(Ec4)$ por $\left(\frac{-1}{5}\right)$ da $-\cancel{5}y\left(\frac{-1}{\cancel{5}}\right)=-4\left(\frac{-1}{5}\right)$ $1\cdot y=\frac{4}{5}$ $y=\frac{4}{5}\quad Ec(5)$

Entonces la matriz triangular es:

$$\xrightarrow{\frac{-1}{5}f2}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & \frac{4}{5}\end{array}\right]$$

Con esta información establecemos un nuevo sistema equivalente al que teníamos:

$$\begin{cases}x+2y=3 & Ec(1)\\ y=\frac{4}{5} & Ec(5)\end{cases}$$

Ahora, usamos el método de sustitución y reemplazamos el valor de $Ec(5)$ en la ecuación $Ec(1)$ y obtenemos el valor de x:

$$x+2\left(\frac{4}{5}\right)=3$$

$$x+\frac{8}{5}=3$$

$$x=3-\frac{8}{5}$$

$$x=\frac{15-8}{5}$$

$$x=\frac{7}{5}$$

Entonces la solución del sistema de ecuaciones es:

$$x=\frac{7}{5} \quad ; \quad y=\frac{4}{5}$$

TRABAJO EN EQUIPO

16. Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de matrices:

a. $\begin{cases}3p+8q=4\\15p+10q=20\end{cases}$ b. $\begin{cases}x-y=3\\2x+3y=1\end{cases}$ c. $\begin{cases}x-y=4\\2x-3y=1\end{cases}$

d. $\begin{cases}x+y+z=12\\2x-y+z=7\\x+2y-z=6\end{cases}$ e. $\begin{cases}2d+3e+f=1\\6d-2e-f=14\\3d+e-f=1\end{cases}$ f. $\begin{cases}3a+b+c=1\\a+2b-c=1\\a+b+2c=-17\end{cases}$

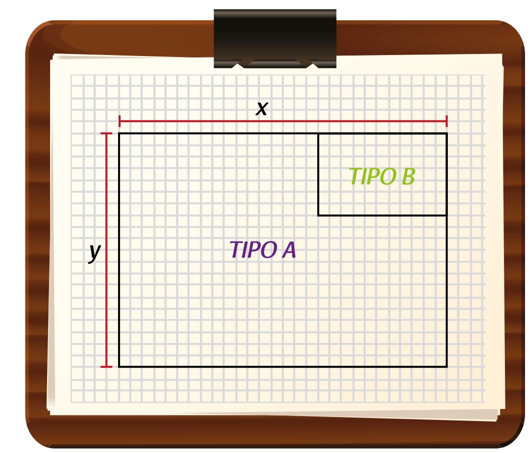
17. Comparamos los ejercicios desarrollados en la actividad anterior y construimos acuerdos sobre la respuesta correcta.

18. Compartimos con el profesor los ejercicios anteriores y le solicitamos evaluar la actividad.

D Aplicación

TRABAJO EN FAMILIA

En compañía de las personas con las que vivo, resuelvo los siguientes problemas. Escribo la actividad en mi cuaderno y la socializo en una de las actividades de conjunto.



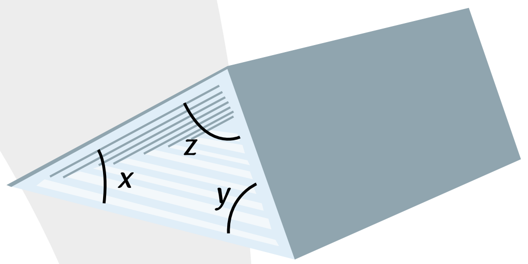
1. Se tienen que sembrar dos tipos de semillas A y B. El perímetro del sembrado total es 400 m y el área de la semilla más pequeña se reduce a la novena parte. ¿Cuál es el área de cada sembrado? ¿Cuáles son las medidas de largo y ancho de cada uno de los terrenos?

2. Si se gastan 30 minutos en el riego del cultivo de la semilla A y 25 minutos en el cultivo de la semilla B y Carlos hace coincidir el riego de las dos semillas a las 8:00 am, ¿a qué horas vuelve a coincidir? ¿Cuántas veces y a qué horas del día coinciden si se deja activado permanentemente?

3. Un terreno rectangular mide 20 hectáreas por 30 hectáreas; desde el centro del lado más largo se define un ángulo llano y se divide en tres ángulos más pequeños para dividir el terreno. El más grande de los tres ángulos es el doble del mediano. El tercer ángulo es 20° mayor que el ángulo mediano. Determino el valor de cada uno de los ángulos.

TRABAJO EN PAREJAS

4. Resuelvo las siguientes situaciones problema aplicando lo aprendido y consigno en el cuaderno:



a. Esta es la sección transversal del triangular en un tejado. El ángulo más grande es 75° mayor que el ángulo más pequeño y 10° mayor que el tercer ángulo. Determinamos la medida de cada ángulo.

b. El 75% del arroz que exporta Colombia es controlado por los departamentos de Tolima, Cesar y Arauca. Cesar es el más grande y controla 12% más que Tolima; Arauca, el segundo en tamaño, controla 3% menos que el doble del porcentaje que controla Tolima. Determinamos la torta circular que representa el porcentaje de exportación de arroz en Colombia.

5. Realizamos un análisis de la forma en la que resolvimos los problemas y lo escribimos en el cuaderno.

6. Compartimos los ejercicios ante el docente para su correcta verificación.

E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Nos reunimos en equipos de tres, asignamos roles y le solicitamos a un compañero que realice la siguiente lectura y consignamos en el cuaderno lo que vayamos comprendiendo, para el buen desarrollo de las siguientes actividades:

Los conceptos de matriz y lo relacionado con sus operaciones y transformaciones fueron desarrollados en el siglo XIX por los matemáticos ingleses J.J. Sylvester, Arthur Cayley y el irlandés William Hamilton. Ellos contribuyeron a solucionar situaciones problema de las ciencias naturales, de las ciencias sociales y de las ciencias económicas.

El método de matrices es posible al seguir realizando transformaciones a las filas de la matriz aumentada hasta obtener una **matriz unitaria**.

Ejemplo 1:
Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de matriz aumentada hasta convertirla en matriz unitaria:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

La matriz aumentada es: $\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 12 \end{array}\right]$

Paso 1: Multiplicamos la fila 1 por $\frac{1}{7}$ para que sea $a_{11} = 1$:

$7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) \quad 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) \quad 8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$ es $1 \quad \frac{2}{7} \quad \frac{8}{7}$

Obteniendo la matriz: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ 3 & -2 & 12 \end{array}\right]$

Paso 2: Necesitamos transformar la fila dos de tal forma que a_{21} sea cero. Para ello, necesitamos multiplicar la primera fila (f1) por -3:

$(-3) \cdot 1 \quad (-3) \cdot \frac{2}{7} \quad (-3) \cdot \frac{8}{7}$ es $-3 \quad \frac{-6}{7} \quad \frac{-24}{7}$ y el resultado lo sumamos a los números de la segunda fila (f2):

$3 - 3 \quad -2 - \frac{6}{7} \quad 12 - \frac{24}{7}$ es $0 \quad \frac{-20}{7} \quad \frac{60}{7}$.

La nueva matriz es: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{-20}{7} & \frac{60}{7} \end{array}\right]$

Paso 3: Ahora necesitamos que $a_{22} = 1$. Se multiplica la fila 2 por $\frac{-7}{20}$ obteniéndose:

$\left(\frac{-7}{20}\right) \cdot 0 \quad \left(\frac{-7}{20}\right) \cdot \frac{-20}{7} \quad \left(\frac{-7}{20}\right) \cdot \frac{60}{7}$ es $0 \quad 1 \quad -3$, obteniéndose la matriz triangular:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Paso 4: Ahora necesitamos $a_{12} = 0$, para ello, multiplicamos la fila 2 por $-\frac{2}{7}$:

$0 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \quad 1 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \quad -3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$ se tiene $0 \quad -\frac{2}{7} \quad \frac{6}{7}$

Y los resultados los sumamos a la fila 1

$1+\ 0\quad \frac{2}{7}-\frac{2}{7}\qquad \frac{8}{7}+\frac{6}{7}$ se tiene 1   0   2, entonces

se tiene la matriz unitaria $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$

Luego, el sistema de ecuaciones equivalente que queda es:

$$\begin{cases} x = 2 & Ec(1) \\ y = -3 & Ec\ (2) \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es:
x= 2 ; y= -3

Resumen de los pasos para transformar la matriz a una matriz unitaria:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{7}f1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ 3 & -2 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{-3f1+f2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{-20}{7} & \frac{60}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{7}{20}f2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{7}f2+f1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Para resolver un sistema de ecuaciones 3x3 como:

$$\begin{array}{ll} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_{14} & Ec(1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_{24} & Ec(2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_{34} & Ec(3) \end{array}$$

Podemos transformar la matriz aumentada a matriz triangular:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{34} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & s & t & x \\ 0 & 1 & v & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$$

O podemos transformar la matriz aumentada a una matriz unitaria:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{34} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

Ejemplo 2:
Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones hasta llegar a la matriz unitaria:

$$\begin{array}{l} 3x - 2y + 4z = 6 \\ 2x + 3y - 5z = -8 \\ 5x - 4y + 3z = 7 \end{array}$$

Paso 1. Escribimos la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \\ 5 & -4 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

Paso 2: Transformamos la columna 1 a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, así:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \\ 5 & -4 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}f1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \\ 5 & -4 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{-2f1+f2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{33}{3} & -12 \\ 5 & -4 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{-5f1+f3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{23}{3} & -12 \\ 0 & -2 & -11 & -3 \end{array}\right]$$

Paso 3: Transformamos la columna 2 a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, así:

$$\xrightarrow{\frac{3}{13}f2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{23}{3} & -\frac{36}{13} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-11}{3} & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{2}{13}f2+f1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{3} & -\frac{36}{13} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-11}{3} & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{2}{3}f2+f3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{13} & -\frac{36}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \end{array}\right]$$

Paso 4: Transformamos la columna 3 a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, así:

$$\xrightarrow{-\frac{13}{63}f3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{13} & -\frac{36}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{23}{13}f3+f2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{3}f3+f1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.

2. Realizamos los ejercicios 1 y 2 con los métodos de eliminación y sustitución para completar las explicaciones.

3. Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de matrices hasta llegar a la matriz unitaria.

a. $\begin{cases} 1p - 2q = 3 \\ 4p + 6q = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 3 \\ x - \ \ y + 2z = 4 \\ 2x - 2y - 5z = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} d + 2e + 3f = 4 \\ -5d + 2e - 2f = 6 \\ 3d + 4e + 5f = 10 \end{cases}$

4. Invitamos al docente para que nos aclare las dudas y nos revise lo desarrollado en la actividad.

Evaluación por competencias

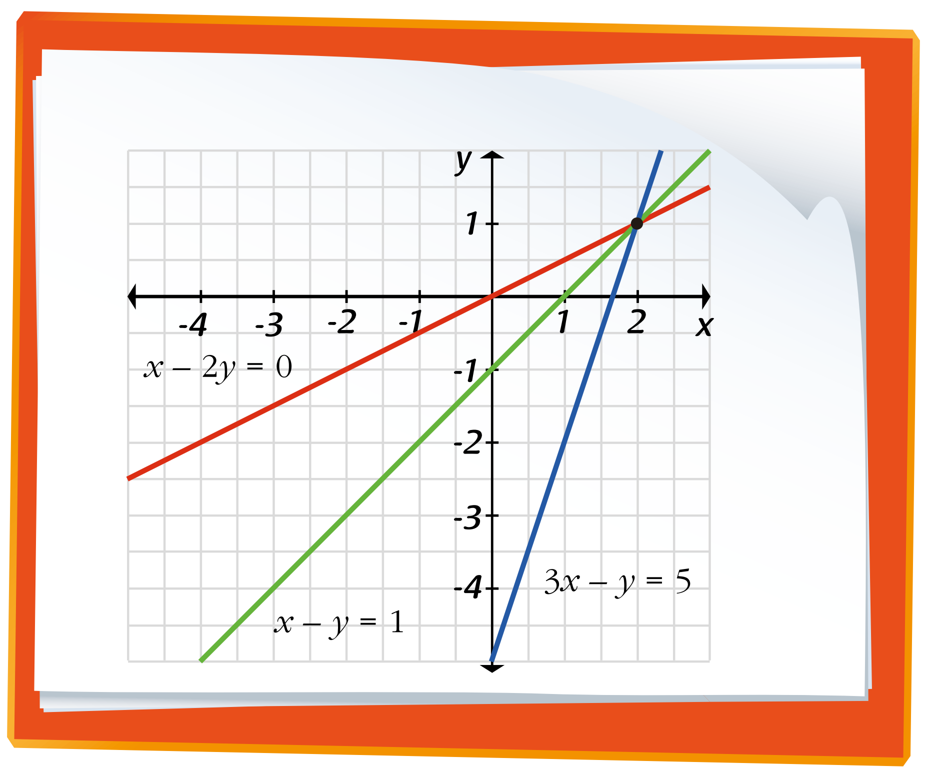
INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 1 Y 2

En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

1. Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay? Justifico la respuesta.

2. Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de las mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay? Justifico la respuesta.

3. La matriz aumentada que representa el sistema de ecuaciones que se representa en el plano cartesiano es:



A. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

B. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

C. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right]$

D. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

3

INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 4 Y 5

En un evento se compran 55 helados: Cono, vaso y paleta. El presupuesto destinado para esta compra es de 270 mil y el precio de cada helado es de 4 mil el cono, 5 mil el vaso y 6 mil la paleta. Conociendo los gustos de los compradores, se sabe que entre cono y vaso se han de comprar el 20% más que las paletas.

4. Selecciono el sistema de ecuaciones que me ayuda a calcular cuántos conos, vasos y paletas puedo comprar:

A. $\begin{cases} c + v + p = 55 \\ 4c + 5v + 6p = 270 \\ 20\%(c + v) + 80\%v = 100\%(v + c + p) \end{cases}$

B. $\begin{cases} c + v + p = 55 \\ 4\,000c + 5\,000v + 6\,000p = 270\,000 \\ 0.2(c + v) + 0.8p = v + c + p \end{cases}$

C. $\begin{cases} c + v + p = 270\,000 \\ 4c + 5v + 6p = 55 \\ (c + v) = 0.2p \end{cases}$

D. $\begin{cases} c + v + p = 55 \\ 4\,000c + 5\,000v + 6\,000p = 270\,000 \\ (c + v) = 1.2p \end{cases}$

4

5. El número de helados en conos vendidos en la semana fue:

A. 25

B. 10

C. 20

D. 55

5

Glosario

- **Ángulo llano:** Es un ángulo que mide 180°.
- **Determinante:** Es un valor numérico que le corresponde a una matriz cuadrada.
- **Matriz:** Es un arreglo rectangular de números reales que se organizan en filas y columnas.
- **Matriz aumentada:** Es la que se obtiene de combinar dos matrices.
- **Matrices cuadradas:** Son aquellas que tienen el mismo número de filas y columnas.
- **Matriz triangular inferior:** Es una matriz triangular cuyos elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.
- **Matriz triangular superior:** Es una matriz cuyos elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.
- **Matriz unitaria o identidad:** Es una matriz cuya diagonal principal son iguales a 1 y el resto de elementos son ceros.
- **Sector circular:** Es una representación circular que representa datos. Cada sector circular es proporcional a su porcentaje.