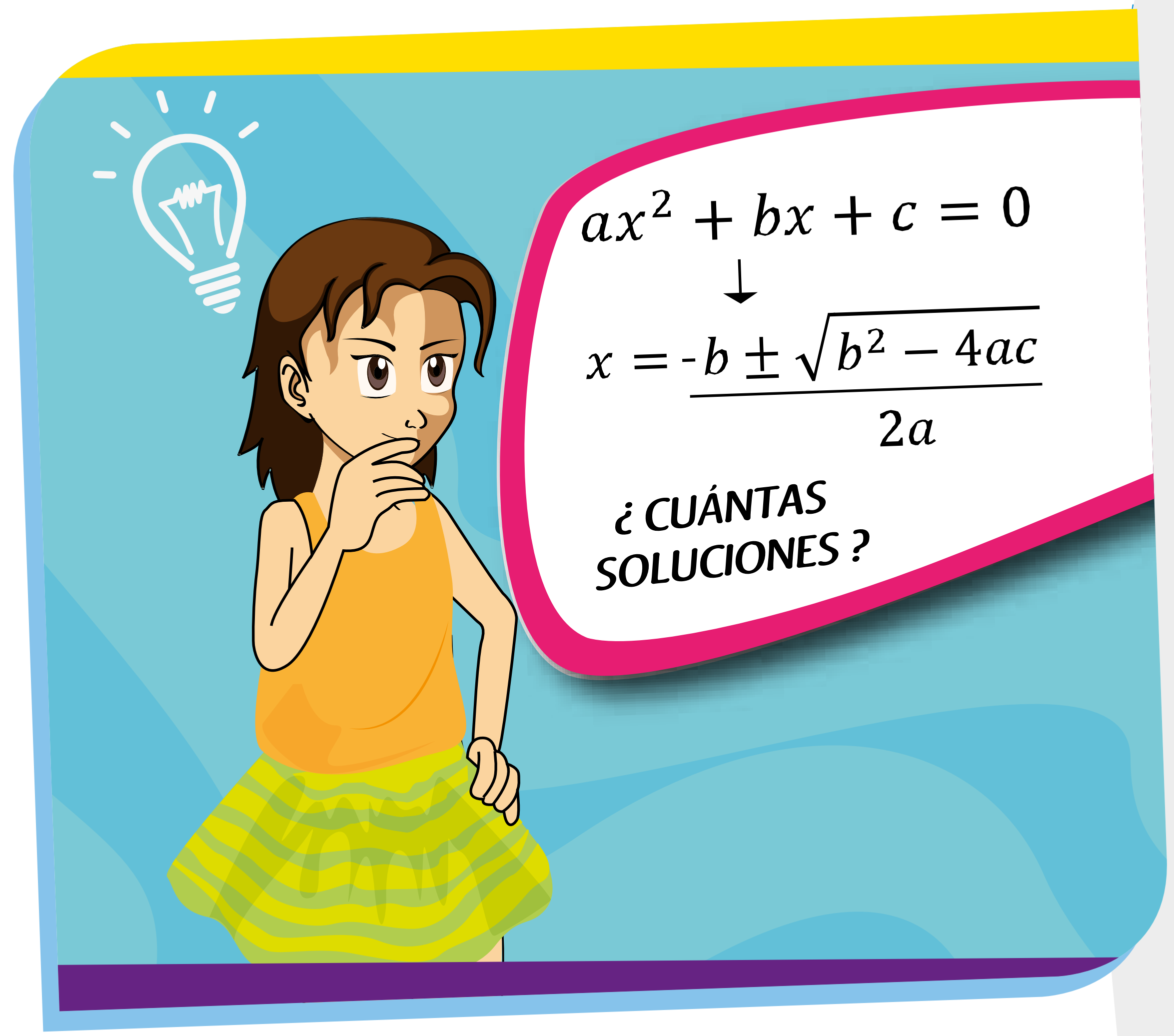
Glosario

- **Ecuación cuadrática de una variable:** Es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y $c \in R$ y $a \neq 0$. Además, la letra x representa la variable.
- **Ecuaciones equivalentes:** Son ecuaciones que tienen la misma solución.
- **Resolver la ecuación:** Consiste en encontrar todos los valores que hacen que esa ecuación sea una igualdad.
- **Parábola:** Es la representación gráfica de una función cuadrática.
- **Plano cartesiano:** Está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, las cuales se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen.
- **Variable independiente:** Es aquella cuyo valor no depende de la otra.

Guía 2

Solucionemos ecuaciones cuadráticas en el conjunto de los números reales



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Identifica las diferentes técnicas de solución de ecuaciones cuadráticas.

Procedimental

- Resuelve problemas con ecuaciones cuadráticas.

Actitudinal

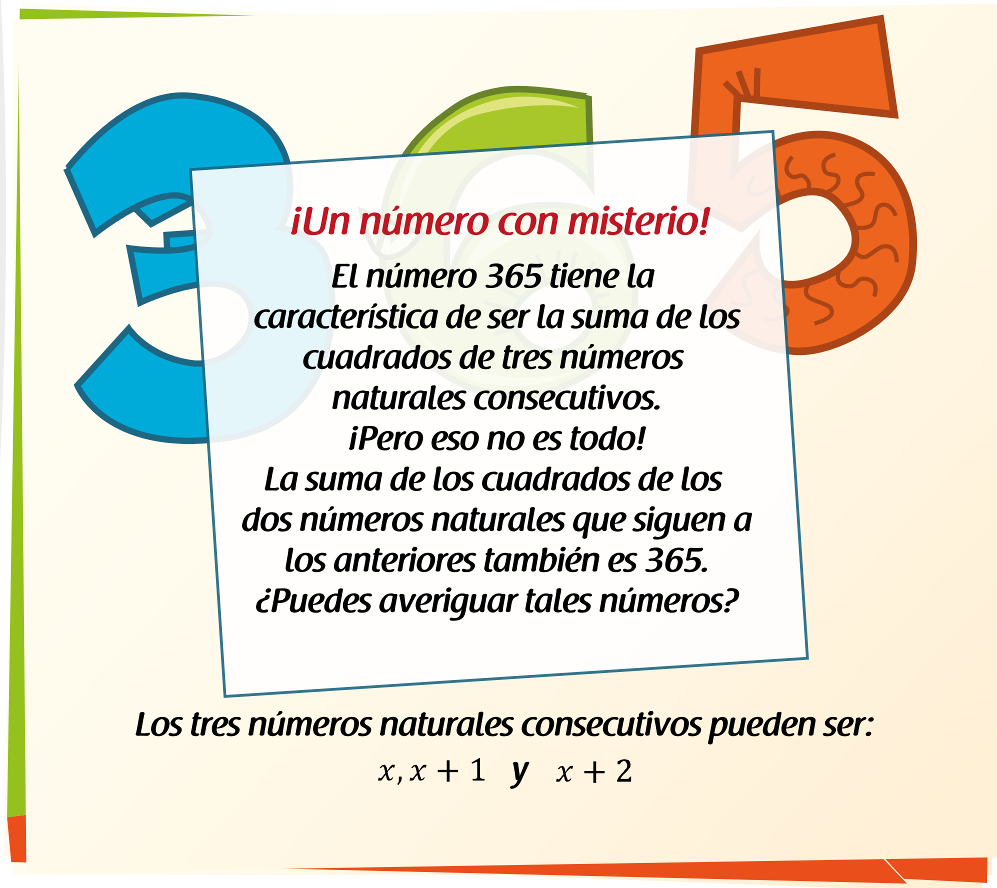
- Demuestra aprecio y valora las posibilidades que ofrece la matemática a situaciones cotidianas.

A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

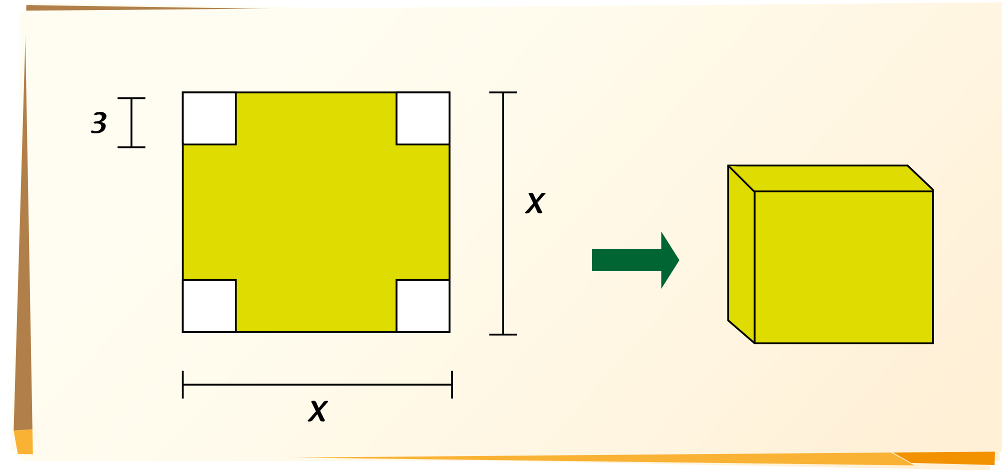
1.Resuelvo las siguientes situaciones en mi cuaderno:

a. Leo atentamente el siguiente cartel:



- ✓ De acuerdo con lo que se enuncia en el cartel, ¿qué expresión permite representar la suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos?
- ✓ Al desarrollar la expresión que representa la suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos, ¿qué se obtiene?
- ✓ ¿Puedo averiguar los números que se piden en el cartel?

b. Se quiere armar una caja sin tapa con una hoja de cartón cuadrada. Esta debe tener $3cm$ de altura y un volumen igual a $48\ cm^3$. Observo la figura y respondo:



Si el volumen de una caja se calcula multiplicando la superficie de la base por la altura:

- ✓ ¿Qué expresión permite determinar el volumen de la caja que se quiere armar?
- ✓ ¿Qué medidas debe tener, como mínimo, la hoja de cartón con la que se quiere armar la caja?

TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparo las respuestas de los ejercicios anteriores con un compañero. Entre los dos llegamos a definir el resultado que consideramos correcto.

3. Resolvemos los siguientes productos y explicamos qué tipo de polinomio se forma:

   a. $x(x+2)$

   b. $(x-3)(x+7)$

   c. $(8+3x)(5+3x)-32$

4. Factorizamos cada una de las siguientes expresiones y explicamos qué técnica empleamos para resolverla:

   a. $x^2-12x-28$

   b. $x^2-10x+24$

   c. x^2-6x+8

5. Consultamos algunas técnicas de factorización de trinomios en los libros que se encuentran en el CRA, o si es posible en Internet, y las anotamos en el cuaderno.

6. Invitamos al docente a evaluar las actividades desarrolladas.

Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. *Nos reunimos en grupos de tres, asignamos los roles que consideremos necesarios para el buen desarrollo de las siguientes actividades y a medida que avancemos en la lectura vamos escribiendo en nuestro cuaderno las ideas más importantes:*

Hasta el momento hemos trabajado con las ecuaciones lineales y las funciones lineales con una variable; sin embargo, existen otras situaciones que se pueden modelar con ecuaciones de grado superior.

Cuando en una ecuación el exponente mayor de la variable es dos (2) en una expresión polinómica, esta se denomina ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado con una incógnita o una variable, es una ecuación de la forma:

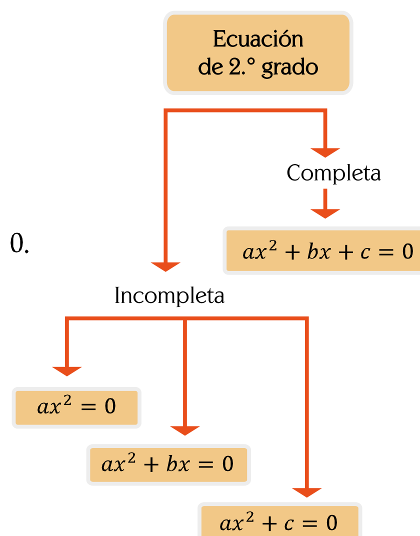
$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde } a, b \text{ y } c \in R \text{ y } a \neq 0$$

Ejemplos:

$x^2 + 25 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 8 = 0$

Ambas son ecuaciones de segundo grado pues el mayor exponente al que aparece elevada la variable x es dos.

La ecuación cuadrática puede ser:



- **Completa**
  La ecuación es completa cuando existen los tres términos del trinomio, así: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

Ejemplo:

$x^2 - 6x + 8 = 0$ es una ecuación completa puesto que $a = 1$, $b = 6$ y $c = 8$.

- **Incompleta**
  La ecuación es incompleta cuando en $ax^2 + bx + c = 0$, se presenta alguno de los siguientes casos:

✓ $b \neq 0$, $c = 0$ por lo tanto es del tipo $ax^2 + bx = 0$.
Ejemplo: $x^2 + 7x = 0$

✓ $b = 0$, $c \neq 0$ por lo tanto es del tipo $ax^2 + c = 0$.
Ejemplo: $x^2 + 25 = 0$

✓ $b = 0$, $c = 0$ por lo tanto es del tipo $ax^2 = 0$.
Ejemplo: $4x^2 = 0$

2. *Clasificamos las siguientes ecuaciones en lineales o cuadráticas; y si son cuadráticas en completas o incompletas:*

a. $x + 11 = 10x^2$
b. $x(x + 3) = 5x + 3$
c. $3x + 2 = 2x - 1$
d. $9x^2 + 49 = 0$
e. $64x^2 = 0$
f. $x^2 - 2x - 15 = 0$
g. $x^2 + 4x = 285$
h. $7x - 3x + 2 = 0$

Toda ecuación de segundo grado con una variable puede tener dos **soluciones o raíces**, que llamaremos x_1 y x_2. Para obtener dichas soluciones se puede emplear **la fórmula de Bhaskara** reemplazando los coeficientes a, b y c en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

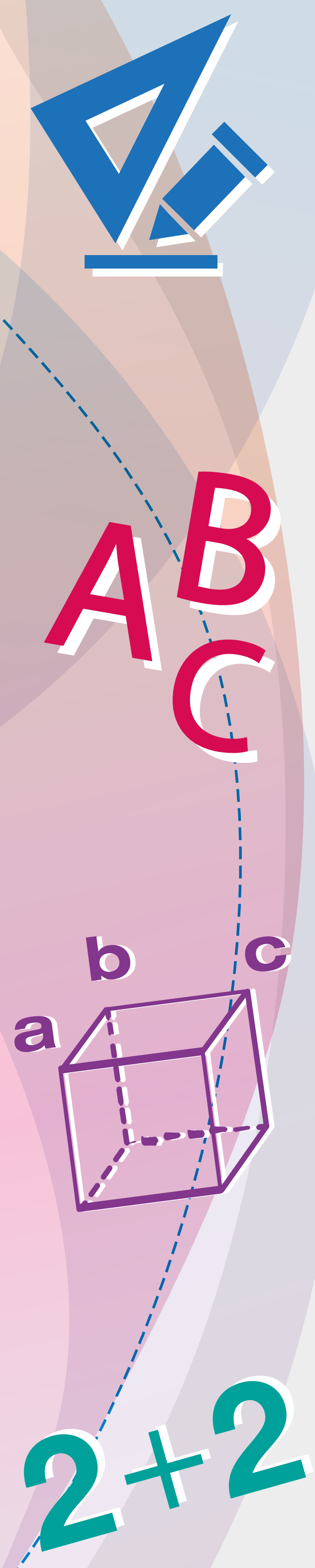
Podemos escribir estas dos expresiones de forma abreviada, así:

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión del radicando $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación y se simboliza con la letra griega Δ.

El discriminante permite determinar en cada ecuación el tipo de soluciones que tendrá; pueden presentarse tres casos:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones, ambas son números reales distintos.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene una sola solución real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene soluciones reales, ya que el radicando da un número negativo.



3. Existen algunos métodos para solucionar una ecuación cuadrática. A continuación estudiaremos algunos de ellos, sin olvidar anotarlos en el cuaderno:

- **Fórmula de Bhaskara**
  Esta fórmula se deduce de completar el cuadrado, así como se muestra a continuación:

$ax^2 + bx + c = 0$; dividiendo los dos miembros por a

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{o sea} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Sumando $\left[\frac{1}{2}\frac{(b)}{a}\right]^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ a los dos miembros,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sacamos raíz a ambos lados

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$$

Ordenado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para comprender cómo se emplea la fórmula de Bhaskara, se ilustrará en el siguiente ejemplo: $x^2 - 6x + 8 = 0$:

Paso 1:
Identificamos el valor de los coeficientes a, b y c, así:

$$a = 1 \qquad b = -6 \quad y \quad c = 8$$

Paso 2:
Reemplazamos los valores obtenidos en la fórmula de Bhaskara, así:

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \quad y \quad x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

Paso 3:
Resolvemos las operaciones indicadas para determinar las soluciones o raíces:

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 + \sqrt{4}}{2} = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 - \sqrt{4}}{2} = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Paso 4:
Comprobamos las soluciones en la ecuación:

- Reemplazamos $x = 4$ en la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$:

$$4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0$$
$$16 - 24 + 8 = 0$$
$$-8 + 8 = 0$$
$$0 = 0$$

- Reemplazamos $x = 2$ en la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$:

$$2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0$$
$$4 - 12 + 8 = 0$$
$$-8 + 8 = 0$$
$$0 = 0$$

Por lo tanto $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

4. Resolvamos las siguientes ecuaciones empleando la fórmula de Bhaskara:

a. $x^2 = 19x - 88$
b. $6x^2 - x = 222$
c. $5x^2 - 7x - 90 = 0$
d. $4x^2 + 3x - 22 = 0$
e. $49x^2 - 16 = 0$
f. $36x^2 = 0$

- **Despejando la variable x^2**
  En algunos casos en los que sólo aparece la variable x^2 , esta se puede despejar para calcular las soluciones.

Ejemplo:

$$(x + 8)^2 + 15 = 136$$

Paso 1:
Despejamos x restando 15 en cada uno de los miembros de la ecuación:

$(x + 8)^2 + 15 - 15 = 136 - 15$

Paso 2:
Resolvemos las operaciones indicadas:

$(x + 8)^2 = 121$

Paso 3:
Aplicamos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:
$\sqrt{(x+8)^2} = \sqrt{121}$

Paso 4:
Solucionamos las raíces:
$x + 8 = \pm 11$

Paso 5:
Determinamos las dos soluciones:
Entonces:

$x + 8 = 11$	$x + 8 = -11$
$x = 11 - 8$	$x = -11 - 8$
$x = 3$	$x = -19$

Paso 6:
Realizamos las comprobaciones, es decir, demostramos si estos son los valores que solucionan la ecuación:

$(3+8)^2 + 15 = 136$	$(-19+8)^2 + 15 = 136$
$11^2 + 15 = 136$	$(-11)^2 + 15 = 136$
$121 + 15 = 136$	$136 = 136$
$136 = 136$	

Por lo tanto, $x_1 = 3$ y $x_2 = -19$ son las soluciones de la ecuación $(x+8)^2 + 15 = 136$

5. Resolvemos las siguientes ecuaciones despejando la variable x^2 :

a. $(x-7)^2 + 2 = 38$
b. $(x+3)^2 = 25$
c. $(x-3)^2 + 8 = 9$
d. $(x+5)^2 - 9 = 72$
e. $(x-15)^2 + 12 = 156$
f. $4x^2 - 16 = 0$

- **Completar cuadrados**
  Para resolver una ecuación cuadrática empleando el método de completar cuadrados se debe establecer un trinomio cuadrado perfecto.

  Ejemplo:
  Se tiene la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$; los siguientes son los pasos para resolverla a través del método de completar cuadrados:

Paso 1:
Identificamos el coeficiente del término $(-6x)$, cuya parte literal es x , que en este caso sería -6.

Este coeficiente siempre lo dividimos por 2, así: $\frac{-6}{2} = -3$. Luego, este valor se eleva al cuadrado, así: $(-3)^2 = 9$.

Ahora sumamos y restamos el cuadrado encontrado en el mismo lado de la ecuación:

$$x^2 - 6x + 8 + 9 - 9 = 0$$

Paso 2:
Organizamos los términos de la ecuación para obtener un trinomio cuadrado perfecto y lo definimos con un paréntesis, así:

$$(x^2 - 6x + 9) + 8 - 9 = 0$$
$$(x^2 - 6x + 9) - 1 = 0$$

Paso 3:
Despejamos el trinomio cuadrado perfecto y lo factorizamos:

$$(x^2 - 6x + 9) = 1$$
$$(x-3)^2 = 1$$

Paso 4:
Aplicamos la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación y determinamos los valores posibles de x:

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{1}$$
$$(x-3) = \pm 1$$

Entonces:

$x - 3 = 1$	$x - 3 = -1$
$x = 1 + 3$	$x = -1 + 3$
$x = 4$	$x = 2$

Paso 5:
Realizamos las comprobaciones, como ya lo sabemos $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

6. Resolvemos las siguientes ecuaciones con el método de completar los cuadrados:

a. $x^2 = 19x - 88$
b. $6x^2 - x = 222$
c. $5x^2 - 7x - 90 = 0$
d. $4x^2 + 3x - 22 = 0$
e. $x^2 = 16x - 63$
f. $64x^2 + 121 = 176x$

- **Descomposición de factores**
  Una ecuación cuadrática se puede resolver empleando el método de descomposición de factores, lo cual es posible si la ecuación es factorizable. Para hacerlo se emplea la siguiente propiedad de los números reales $a \cdot b = 0$, donde $a = 0$ o $b = 0$ .Cualquiera de los factores puede ser cero para que el producto sea cero.

  Ejemplo:
  $x^2 - 6x + 8 = 0$, sólo se puede resolver si la expresión es factorizable, así:

Paso 1:
Se factoriza el trinomio dado:

$$x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$$

Paso 2:
Se iguala a cero cada uno de los factores obtenidos:

$$(x-4)=0$$
$$(x-2)=0$$

Paso 3:
Se despeja el valor de x de cada uno de los factores:

$$\begin{array}{c|c} (x-4)=0 & (x-2)=0 \\ x-4+4=0+4 & x-2+2=0+2 \\ x=4 & x=2 \end{array}$$

Paso 4:
Realizamos las comprobaciones, como ya lo sabemos $x_1=4$ y $x_2=2$ son las soluciones de la ecuación $x^2-6x+8=0$.

7. Resolvemos las siguientes ecuaciones empleando la descomposición de factores:

a. $x^2=19x-88$
b. $6x^2-x=222$
c. $5x^2-7x-90=0$
d. $x^2+7x-10=0$
e. $x^2=5x-6$
f. $x^2+x=2$

Solución de problemas con ecuaciones cuadráticas

Para resolver problemas por ecuaciones de segundo grado se puede realizar el siguiente procedimiento:

Tomemos como ejemplo el siguiente problema:

Un número entero cumple con que el cuadrado del antecesor de su doble equivale a su cuadrado aumentado en 5. ¿Cuál es el número?

Paso 1:
Expresamos en lenguaje algebraico cada una de las proposiciones que hacen parte del problema:

- x: Es el número entero.
- $(2x-1)^2$: Corresponde al cuadrado del antecesor del doble de un número entero.
- x^2+5 : Corresponde al cuadrado del número entero aumentado en 5 unidades.

Paso 2:
Relacionamos las expresiones algebraicas en una ecuación, así:

$$(2x-1)^2=x^2+5$$

Paso 3:
Ordenamos y reducimos para obtener una ecuación cuadrática:

$$3x^2-4x-4=0$$

Paso 4:
Empleamos uno de los métodos vistos para resolver la ecuación cuadrática, en este caso usaremos la **Fórmula de Bhaskara**, así:

- Identificamos el valor de los coeficientes a, b y c , así:

$$a=3 \quad b=-4 \text{ y } c=-4$$

- Reemplazamos los valores obtenidos en la fórmula de Bhaskara, así:

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}$$

- Resolvemos las operaciones indicadas para determinar las soluciones o raíces:

$$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}=\frac{4+\sqrt{64}}{6}=\frac{4+8}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{(-4)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}=\frac{4-\sqrt{64}}{6}=\frac{4-8}{6}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, $x_1=2$ y $x_2=-\frac{2}{3}$

Paso 5:
Finalmente, se interpreta el resultado en términos de la situación planteada; en este caso como el número que se pide es un entero, la solución correcta es $x_1=2$.

8. Resolvemos los siguientes problemas:

a. Un triángulo tiene un área de 24 cm² y la altura mide 2 cm más que la base correspondiente. ¿Cuánto mide la altura?

b. La suma de dos números es 9 y la de sus cuadrados es 53. Hallo los números.

c. La suma de las edades de A y B es 23 años y su producto es 102. Hallo ambas edades.

9. En una actividad grupal de clase socializamos los ejercicios resueltos, con el fin de confrontar los aprendizajes logrados.

10. Solicitamos a nuestro profesor que valore nuestro desempeño durante la fundamentación científica y la ejercitación, y que nos aclare los conceptos en los que tenemos mayor dificultad.

D Aplicación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo en mi cuaderno las siguientes situaciones empleando alguno de los métodos tratados:

   a. La diferencia de dos números es 25 y su suma multiplicada por el número menor equivale a 325. Hallo los números.

   b. El largo de un rectángulo excede a su ancho en 5 m. Si cada dimensión se aumenta en 2 m el área será el doble. ¿Cuáles serán las dimensiones del rectángulo?

   c. Un carro costó 4 veces lo que sus llantas, y la suma de los cuadrados del precio del carro y el precio de las llantas es de $ 38 025 000 000 000. ¿Cuánto costó el carro y cuánto las llantas?

TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparamos los resultados obtenidos de manera individual en las situaciones anteriores. Llegamos a un consenso para determinar si alguno de los dos tuvo errores y explicamos las razones para que esto ocurriera.

3. En plenaria realizamos y compartimos nuestras observaciones sobre cada una de las situaciones anteriores.

4. Compartimos con nuestros compañeros y profesor las actividades realizadas. Consignamos en nuestros cuadernos las conclusiones generadas durante la actividad y la plenaria.

E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Resolvemos en el cuaderno las siguientes ecuaciones cuadráticas empleando alguno de los métodos vistos:

   a. $2x^2 = 0$

   b. $3x^2 - 4 = 28 + x^2$

   c. $x^2 - 121 = 0$

   d. $x^2 + 2x - 8 = 0$

   e. $(x + 5)^2 = 49$

2. Solucionamos los siguientes problemas:

   a. El cuadrado de un número disminuido en 8 equivale en 5 veces el exceso del número sobre 2. Hallo el número.

   b. El área de una lámina de acero es $216\ cm^2$ y el largo es cuatro sextos del ancho. ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho?

   c. ¿Cuáles son las dimensiones de un lote que tiene forma rectangular si su perímetro es $66\ m$ y su área $810\ m^2$?

TRABAJO EN FAMILIA

3. Solicito a las personas con las que vivo que me colaboren mencionando dos situaciones que puedan modelarse utilizando ecuaciones cuadráticas y que se relacionen con las siguientes temáticas:

   a. Soluciones de conflictos de mi comunidad.
   b. Soluciones a problemas de deterioro ambiental.
   c. Soluciones a problemas de manejo de basuras en el colegio.

TRABAJO EN EQUIPO

4. Compartimos nuestras situaciones y seleccionamos las más pertinentes para nuestra comunidad.

5. Presentamos el cuaderno al profesor para su valoración y sustentamos nuestras respuestas.

Evaluación por competencias

1. Determino si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y argumento mi respuesta a través de un ejemplo:

   A. Cuando el discriminante $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones que son números reales distintos ( ).

   B. La ecuación es completa cuando en $ax^2 + bx + c = 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, ( ).

   C. Toda ecuación de segundo grado con una incógnita tiene tres soluciones o raíces ( ).

   D. Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación tiene soluciones reales ( ).

1

Selecciono la respuesta correcta y justifico mi elección:

2. Al resolver la ecuación $x^2 = 16x - 63$ se obtiene como solución:

   A. $x_1 = -7$ y $x_2 = 9$
   B. $x_1 = 7$ y $x_2 = -9$
   C. $x_1 = -7$ y $x_2 = -9$
   D. $x_1 = 7$ y $x_2 = 9$

2

3. La solución $x_1 = -13$ y $x_2 = 7$ corresponde a la ecuación:

   A. $(x+3)^2 = 1000$
   B. $(x+3)^2 = 100$
   C. $(x-3)^2 = 1000$
   D. $(x-3)^2 = 100$

3

4. Determino en qué paso se cometió el error al resolver la ecuación $m^2 - 10m + 9 = 0$:

PASO 1:
Se identifica el coeficiente del término lineal $(-10m)$, que en este caso es -10; ahora sumamos y restamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de m, así: $m^2 - 10m + 9 + 25 - 25 = 0$

PASO 2:
Se asocia convenientemente para obtener un trinomio cuadrado perfecto, así:

$$(m^2 - 10m + 25) + 9 - 25 = 0$$

PASO 3:
Se desarrolla el trinomio cuadrado perfecto:

$$(m-5)^2 = 16$$

PASO 4:
Se determinan las dos soluciones empleando el método de despejar la incógnita, así:

$$\sqrt{(m-5)^2} = \sqrt{16}$$
$$(m-5) = \pm 16$$

Entonces:

$m_1 - 5 = 16$	$m_2 - 5 = -16$
$m_1 = 16 + 5$	$x_2 = -16 + 5$
$m = 21$	$x_2 = -11$

A. PASO 1.
B. PASO 2.
C. PASO 3.
D. PASO 4.

4

5. El método que se empleó en el punto anterior recibe el nombre de:

A. Fórmula de Bhaskara.
B. Completar cuadrado.
C. Descomposición de factores.
D. Despejando la incógnita.

5

Glosario

- **Discriminante:** Expresión de la fórmula de Bhaskara, $b^2 - 4ac$, que permite determinar el tipo de solución en cada ecuación.
- **Ecuación cuadrática de una variable:** Es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y $c \in R$ y $a \neq 0$. Además, la letra x representa la variable.
- **Ecuaciones equivalentes:** Son ecuaciones que tienen la misma solución.
- **Resolver la ecuación:** Consiste en encontrar todos los valores que hacen que esa ecuación sea una igualdad.