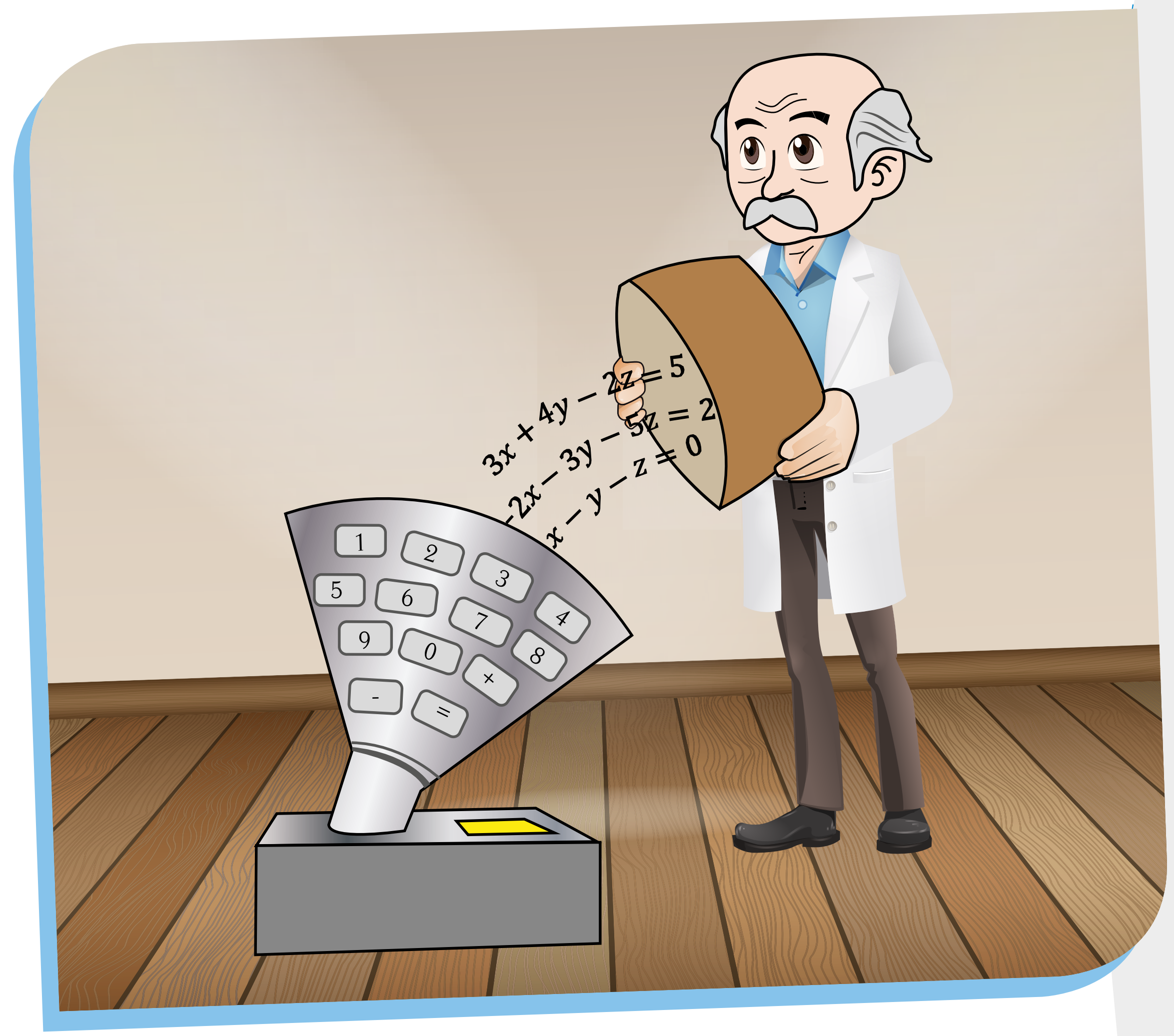
Glosario

- **Ecuaciones equivalentes:** Son ecuaciones que tienen la misma solución.
- **Ecuación lineal de una variable:** Es una ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales y la letra x representa la variable.
- **Plano cartesiano:** Está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen.
- **Resolver la ecuación:** Consiste en encontrar todos los valores que hacen que esa ecuación sea una igualdad.
- **Variable independiente:** Es aquella cuyo valor no depende de la otra.

Guía 2

Avancemos a sistemas de ecuaciones de más de dos variables



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Reconoce diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones 3 x 3.

Procedimental

- Aplica los diferentes métodos para la solución de sistemas de ecuaciones 3 x 3.

Actitudinal

- Demuestra disposición para someter a validación sus conjeturas ante sus compañeros.

A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo en mi cuaderno los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a. $\begin{cases} -x - 6y = -22 \\ -x + 6y = 14 \end{cases}$ b. $\begin{cases} -5x + 3y = -13 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

2. Soluciono los siguientes problemas:

a. Una caja de café contiene 144 paquetes pequeños, unos pesan 0.25 lb cada uno y otros 0.50 lb. Si en total la caja pesa 60 Kg, ¿cuántos paquetes hay de cada tipo?

b. En enero del 2014, Pedro inició un trabajo nuevo con un salario anual de $ 890 000. Su jefe aceptó incrementar su salario en $10 000 cada enero de los años por venir. Mariana inició un nuevo empleo con un salario anual de $ 950 000, su jefe estuvo de acuerdo en aumentar su salario en $ 5 000 cada enero de los años siguientes.

✓ ¿Cuál es la ecuación que representa el salario de Pedro?

✓ ¿Cuál es la ecuación que representa el salario de Mariana?

✓ ¿Cuál es el sistema de ecuaciones lineales que se tiene que resolver para determinar el año en que los salarios son iguales, a partir del 2006?

✓ ¿Cuál es ese salario?

✓ Realizo la gráfica que representa la situación.

TRABAJO EN PAREJAS

3. Reviso junto a mi compañero las respuestas de los anteriores ejercicios. En caso de que no tengamos las mismas respuestas, revisamos cada uno de los planteamientos y llegamos a la misma solución.

4. Completamos la siguiente tabla con la información de las ventajas y desventajas de los sistemas de ecuaciones lineales y redactamos unas conclusiones sobre esta actividad para darlas a conocer ante el grupo:

	Ventajas	Desventajas
Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.	1.	1.
	2.	2.
	3.	3.

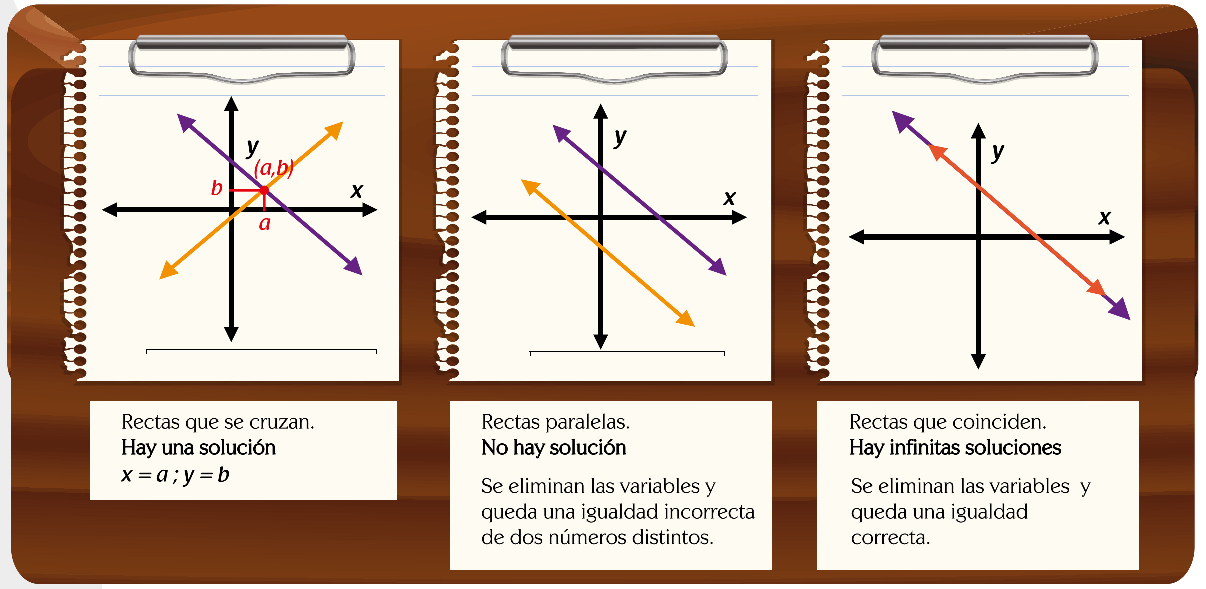
5. Le presentamos los ejercicios realizados al docente y aclaramos dudas, si es necesario.

BC Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. En grupos de 4 compañeros, asignamos roles y le solicitamos a un estudiante que realice la siguiente lectura y anotamos los aspectos más importantes en nuestros cuadernos:

En la guía anterior desarrollamos aspectos relacionados con sistemas de ecuaciones de dos variables y dos ecuaciones. Las posibles soluciones son:



La mayoría de sistemas de ecuaciones coincide en el número de variables y en el número de ecuaciones. En esta guía avanzaremos a tres variables y tres ecuaciones cuyos sistemas coinciden con los ya vistos.

Sistema de ecuaciones lineales 3 x 3

Este sistema se caracteriza porque se tienen tres variables $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ y tres ecuaciones.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x - y - 3z = -10 \end{cases}$$

Existen varios métodos para solucionar sistemas de ecuaciones 3 x 3, que desarrollaremos en esta guía:

a. Método de reducción.
b. Método de Cramer.
c. Método gráfico.

Método de reducción

Este método consiste en reducir el sistema de ecuaciones de 3 x 3 a un sistema de ecuaciones de 2 x 2. A continuación se dan los pasos de este método a través de un ejemplo:

Paso 1: Enumeramos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = 6 & (1) \\ x - y + 2z = 5 & (2) \\ x - y - 3z = -10 & (3) \end{cases}$$

Paso 2: Eliminamos la variable x de las ecuaciones (1) y (2) para reducirla a una ecuación (4) de dos variables y, z; para ello, multiplicamos por -1 la ecuación (1). Así mismo, reducimos las ecuaciones (2) y (3) a la ecuación (5) con las variables y, z; para ello, multiplicamos por -1 la ecuación (2).

$$\begin{array}{lcl} x + y - z = 6 \ (1) & \xrightarrow[\text{-1 a la } Ec\,(1)]{\text{multiplico por}} & -x - y + z = -6 \\ x - y + 2z = 5 \ (2) & & \underline{\ x - y + 2z = 5\ } \\ & & -2y + 3z = -1 \ (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x - y + 2z = 5 \ (2) & \xrightarrow[\text{-1 a la } Ec\,(2)]{\text{multiplico por}} & -x + y - 2z = -5 \\ x - y - 3z = -10 \ (3) & & \underline{\ x - y - 3z = -10\ } \\ & & -5z = -15 \ (5) \end{array}$$

Paso 3: Solucionamos el sistema de ecuaciones 2 x 2 que acabamos de obtener:

$$-2y + 3z = -1 \ (4)$$
$$-5z = -15 \ (5)$$

Resolvemos por el método sustitución despejo de $Ec\,(5)$, la variable z

$$-5z = -15$$
$$z = \frac{-15}{-5}$$
$$z = 3$$

Reemplazo $z = 3$ en ecuación EC (4)

$$-2y + 3\,(3) = -1$$
$$-2y + 9 = -1$$
$$-2y = -1 - 9$$
$$-2y = -10$$
$$y = \frac{-10}{-2}$$
$$\boxed{y = 5}$$

Paso 4: Sustituimos y= 5 ; z= 3 en una de las tres ecuaciones iniciales para encontrar el valor de x:

Reemplazamos en ecuación EC (2)

$$x - y + 2z = 5$$
$$x - 5 + 2(3) = 5$$
$$x - 5 + 6 = 5$$
$$x = 5 + 5 - 6$$
$$\boxed{x = 4}$$

Paso 5: Comprobamos en las tres ecuaciones si obtenemos igualdades con los valores x=4, y=5 ; z=3:

en la ecuación $Ec\ (1)$

$$x+y-z=6$$
$$4+5-3=6$$
$$6=6$$

en la ecuación $Ec\ (2)$

$$x+y+2z=5$$
$$4-5+2(3)=5$$
$$4-5+6=5$$
$$5=5$$

en la ecuación $Ec\ (3)$

$$x-y-3z=-10$$
$$4-5-3(3)=-10$$
$$4-5-9=-10$$
$$-10=-10$$

Por tanto, (4, 5, 3) es la solución del sistema.

2. Resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de reducción:

a. $\begin{cases} 3x-2y+z=-7 \\ x+y-2z=4 \\ -x-y+4z=2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x-2y+2z=4 \\ -2x+4x+1=2 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ -2x+6y-z=-14 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$

3. Continuamos con la lectura sobre el método de Cramer, no olvidamos consignar en el cuaderno los aspectos que consideremos necesarios:

Método de Cramer

Este método consiste en hallar el valor del cociente de los determinantes que se construyen con el sistema de ecuaciones. Cada cociente da el valor de una de las variables.

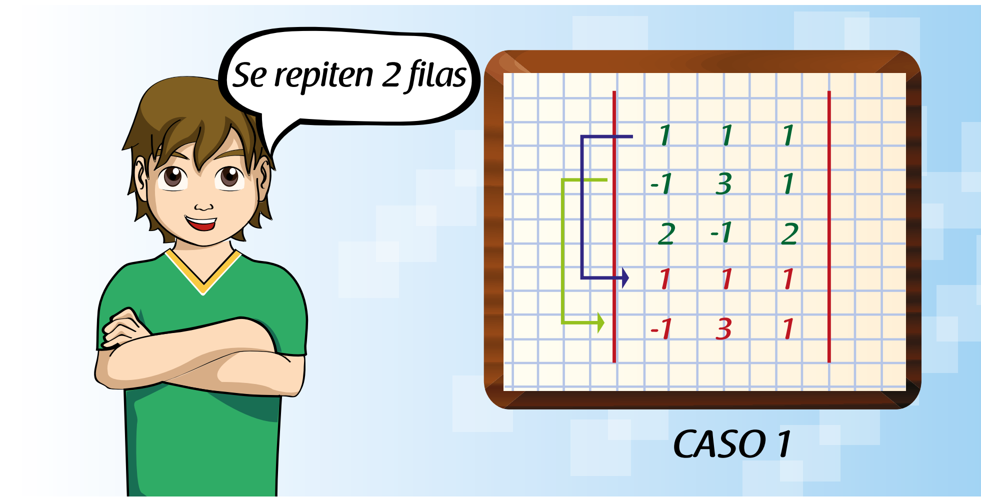
A continuación se explica cómo se construyen los determinantes que se requieren para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

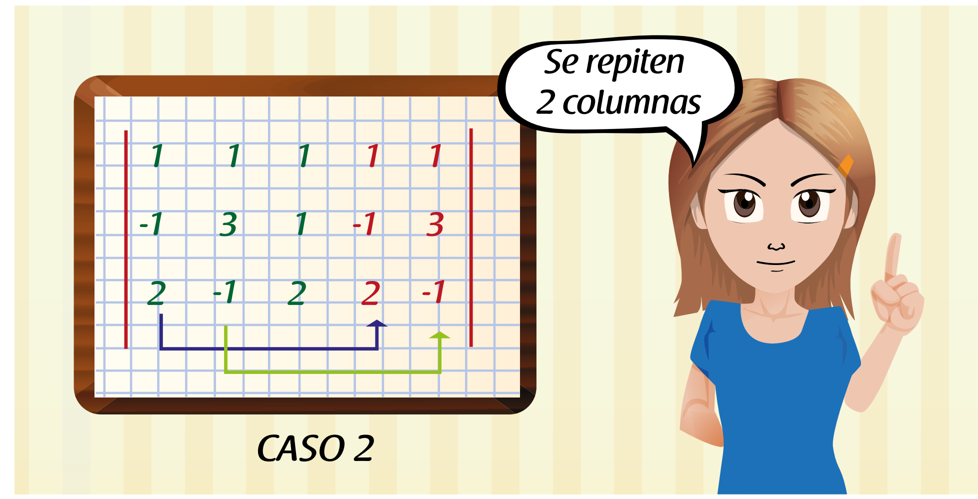
$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ -x+3y+z=13 \\ 2x-y+2z=7 \end{cases}$$

Construimos un **determinante** que llamaremos P con sólo los coeficientes de las variables x, y; z; en el orden en el que se presentan en la ecuación:

$$P=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante P tiene que ser diferente de cero, ya que este es el divisor de los cocientes de Cramer. Un determinante se soluciona cuando encontramos un valor numérico. Utilizaremos la **regla de Sarrus** que consiste en repetir las dos primeras filas (caso 1) o las dos primeras columnas (caso 2):





Trazamos seis diagonales, tres en una dirección y tres en la otra dirección:

Caso 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Caso 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora se multiplican los tres números seleccionados por diagonal. En el caso 1: De las diagonales de arriba hacia abajo se suman los productos y de abajo hacia arriba se restan los productos. Luego se suman los resultados para obtener un número.

Caso 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(1) (3) (2) + (-1) (-1) (1) + (2) (1) (1) - (-1) (1) (2) - (1) (-1) (1) - (2) (3) (1)

6 + 1 + 2 + 2 + 1 - 6

6

En el caso 2: De las diagonales de la izquierda a la derecha se dejan los signos y se suman los productos y de derecha a izquierda se restan los productos. Luego, se suman los resultados para obtener un solo número:

Caso 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(1)(3)(2) + (1)(1)(2) + (1)(-1)(-1) - (1)(-1)(2) - (1)(1)(-1) - (1)(3)(2)$$

$$6 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1 \quad - \quad 6$$

$$6$$

Entonces el valor del determinante P es: 6.

Para hallar los otros determinantes que necesitamos, siempre partimos del determinante P y reemplazamos los coeficientes de la variable que estamos buscando por los valores independientes o que están al lado derecho de las ecuaciones:

$$X = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ -1 & 13 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} \qquad Z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ -1 & 3 & 13 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Determinamos el valor de los determinantes X, Y y Z aplicando la regla de Sarrus.

5. Continuamos con la lectura y consignamos en nuestro cuaderno:

Los valores de los determinantes son:

P = 6

X = 24

Y = 30

Z = 12

Aplicamos la regla de Cramer formando los cocientes, donde el divisor es el valor del determinante P:

$x = \dfrac{X}{P}$	$y = \dfrac{Y}{P}$	$z = \dfrac{Z}{P}$
Reemplazamos los datos:	Reemplazamos los datos:	Reemplazamos los datos:
$x = \dfrac{24}{6} = 4$	$y = \dfrac{30}{6} = 5$	$z = \dfrac{12}{6} = 2$

Obtenemos que la solución del sistema es (4, 5, 2).

El siguiente cuadro muestra el resumen del método de Cramer para tres ecuaciones con tres variables:

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{matrix}\right\} \text{Sistema de ecuaciones}$$

con

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Soluciones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{P} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{P} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{P}$$

6. Solicitamos al docente que aclare nuestras dudas sobre el método Cramer para poder realizar los siguientes ejercicios:

a. $\begin{cases} -2x + y - 3z = -1 \\ x + 2x + z = 6 \\ 3x + y - 2z = 13 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x - 3y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ -x + 2x + z = -1 \end{cases}$

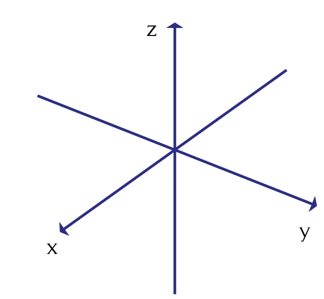
c. $\begin{cases} 2x - 5x - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 17 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - 7x - 4z = -1 \\ 2x - 3y + 9z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

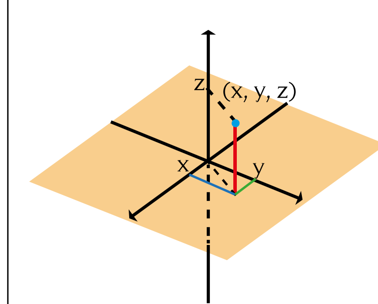
7. Continuamos con la lectura sobre el método gráfico, no olvidamos seguir consignando en el cuaderno:

Método gráfico

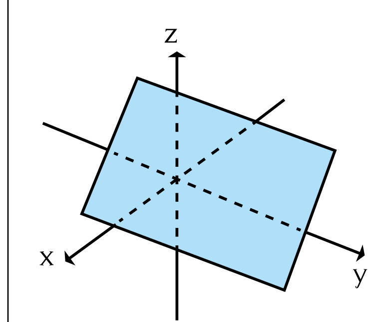
Recordemos cómo representar un punto (x, y, z) y un plano:



Paso 1: Trazamos los tres ejes.

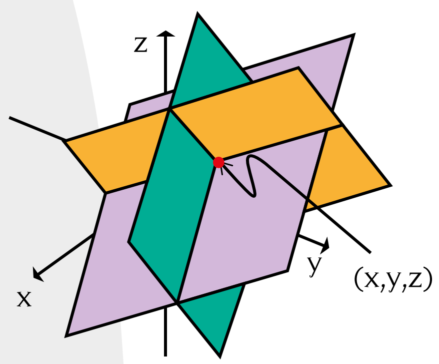
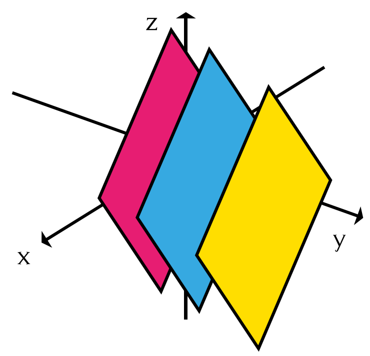
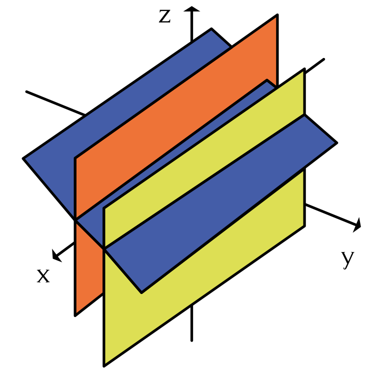


Paso 2: Recordamos cómo ubicar un punto (x,y,z).



Paso 3: Ubicamos tres puntos para dibujar un plano.

Las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones 3 x 3 son:

Única solución	Sin solución	Sin solución
		
Se determina un punto con coordenadas (x,y,z).	Se determinan tres planos paralelos.	Se determinan dos planos paralelos.

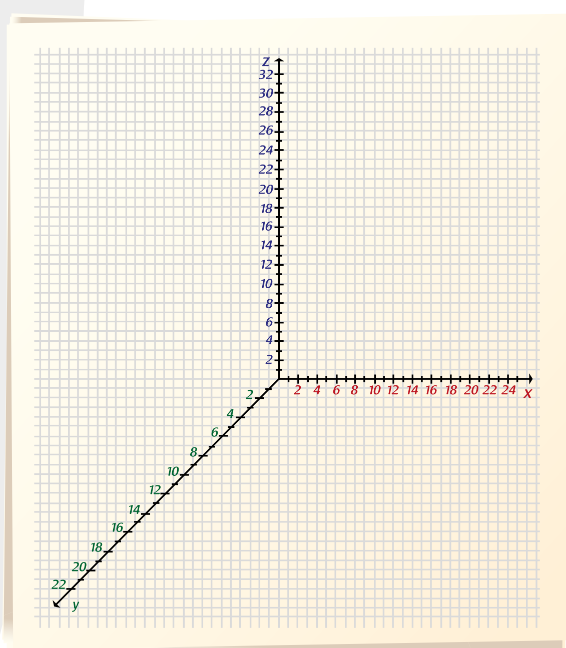
Si observamos sucede lo mismo en el tipo de soluciones en el sistema de ecuaciones 2 x 2. Analizamos el siguiente ejemplo:

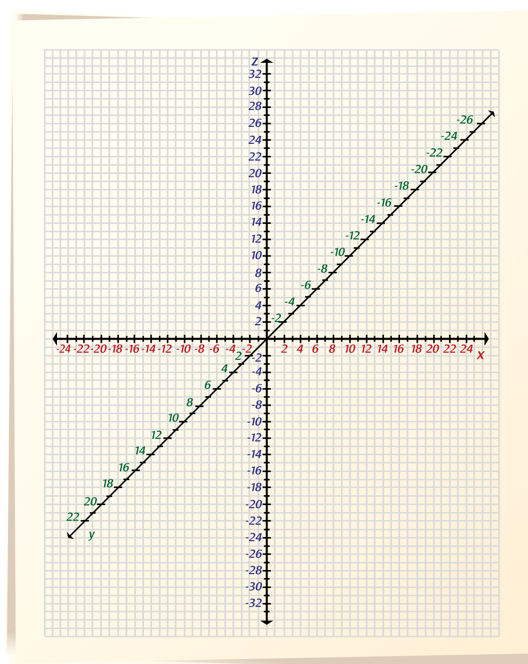
Ejemplo:

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico:

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ x-y+3z=15 \\ 2x+2y-z=7 \end{cases}$$

Primer paso: Trazamos los ejes x, y, z:



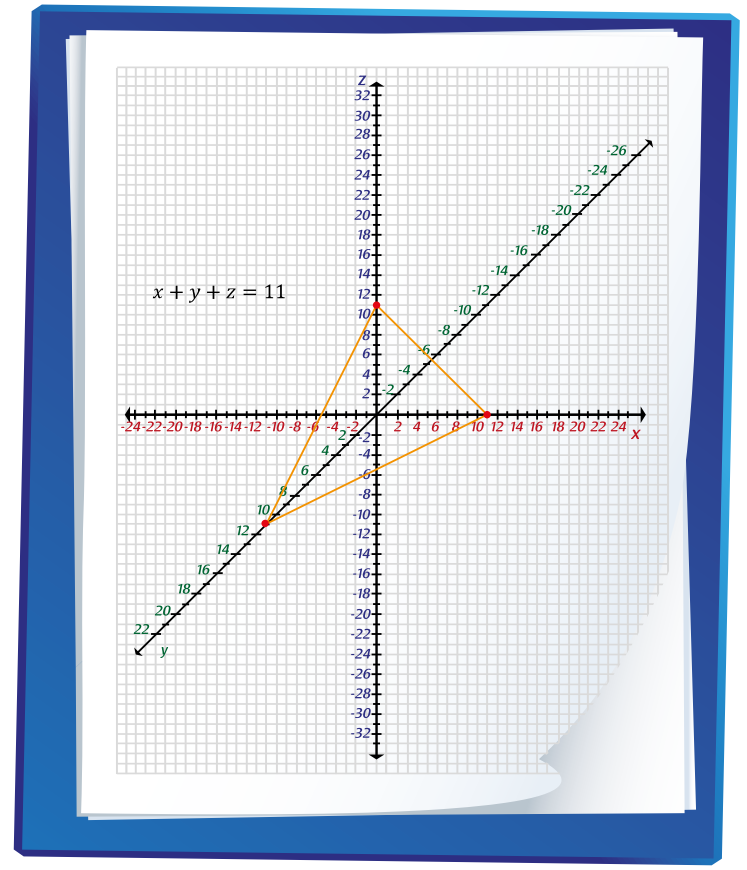


Segundo paso: Representamos cada una de las ecuaciones, realizando las trazas en el mismo plano:

- Representamos en el plano $x+y+z=11$. Para ello representamos tres puntos cualquiera con los que se trazan tres segmentos, por ejemplo:

Para $x=0$, $y=0$ queda $0+0+z=11$. Por lo tanto, $z=11$. Entonces el punto es $(0,0,11)$.
Para $x=0$, $z=0$ queda $0+y+0=11$. Por lo tanto, $y=11$. Entonces el punto es $(0,11,0)$.

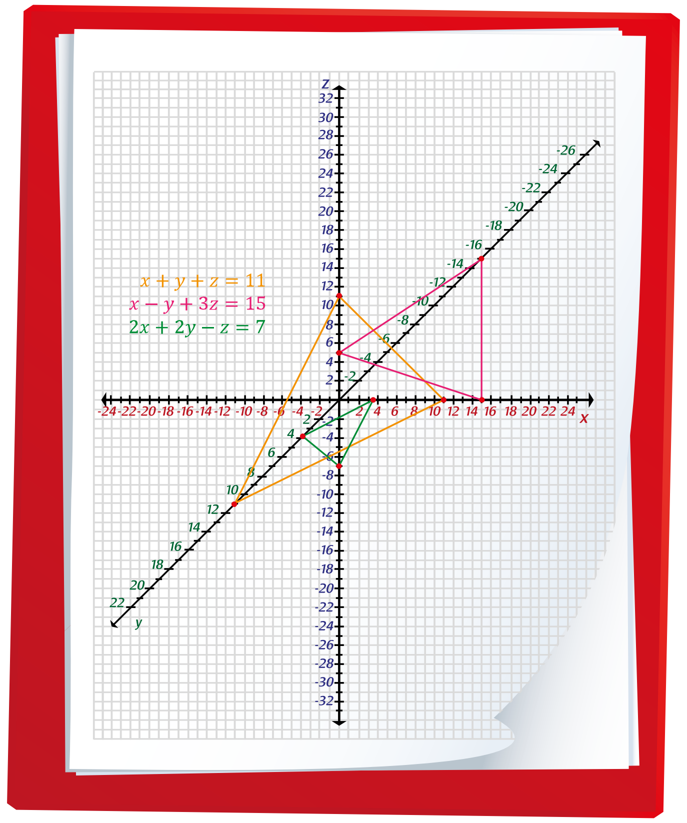
Para $y=0$, queda $x+0+0=11$. Por lo tanto, $x=11$. Entonces el punto es $(11,0,0)$.



- Representamos en el plano $x-y+3z=15$. Para ello representamos tres puntos cualquiera con los que se trazan tres segmentos, por ejemplo:
  Para $x=0$, $y=0$ queda $0-0+3z=15$. Por lo tanto, $z=5$. Entonces el punto es $(0,0,5)$.
  Para $x=0$, $z=0$ queda $0-y+0=15$. Por lo tanto, $y=-15$. Entonces el punto es $(0,-15,0)$.
  Para $y=0$, $z=0$ queda $x-0+0=15$. Por lo tanto, $x=15$. Entonces el punto es $(15,0,0)$.

- Representamos en el plano $2x+2y-z=7$. Para ello representamos tres puntos cualquiera con los que se trazan tres segmentos, por ejemplo:
  Para $x=0$, $y=0$ queda $0+0-z=7$. Por lo tanto, $z=-7$. Entonces el punto es $(0,0,-7)$.
  Para $x=0$, $z=0$ queda $0+2y-0=7$. Por lo tanto, $y=\frac{7}{2}$. Entonces el punto es $(0,\frac{7}{2},0)$.

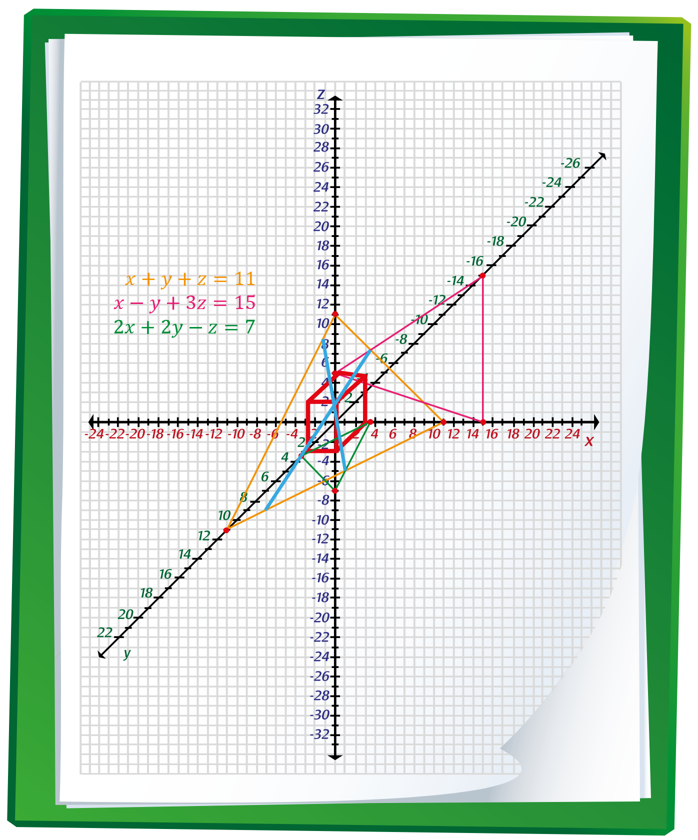
  Para $y=0$, $z=0$ queda $2x+0-0=7$. Por lo tanto, $x=\frac{7}{2}$. Entonces el punto es $(\frac{7}{2},0,0)$.



Tercer paso: Se marca la recta que es la intersección de dos planos.

Cuarto paso: Se marca otra recta que sea la intersección del plano que faltaba con uno de los planos anteriores.

Quinto paso: Se busca el punto de intersección de las dos rectas trazadas. Este punto es la solución del sistema:



8. Hallamos la solución de cada sistema y luego lo graficamos en el plano cartesiano:

a. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 2x + 3x + 5z = 30 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 5x + 3y + 3z = 24 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$

9. Compartimos con el profesor los ejercicios anteriores y le solicitamos que nos aclare las dudas y evalúe nuestro desempeño en la actividad.

D Aplicación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de reducción y el método Cramer. Indico cuál de los 2 métodos fue el que más se me facilitó:

a. $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + 3y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = -3 \\ -6x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparamos nuestros resultados y en caso de que existan diferencias, revisamos nuestros procedimientos para encontrar el error y realizar la respectiva corrección.

3. Buscamos en internet o en libros (que se encuentran en el CRA) otras formas de proceder para resolver sistemas de ecuaciones 3 x 3 y las consignamos en el cuaderno.

4. Compartimos con nuestros compañeros y profesor las actividades realizadas. Recuerdo que compartiendo mis tareas puedo identificar las fortalezas y aspectos a fortalecer sobre los aprendizajes de esta guía.

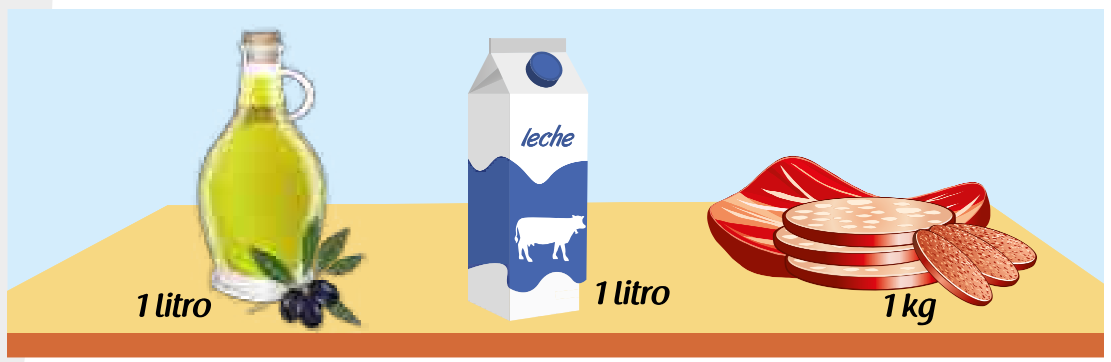
E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Resolvemos los siguientes problemas mostrando el sistema de ecuaciones que se requiere para cada uno de ellos:

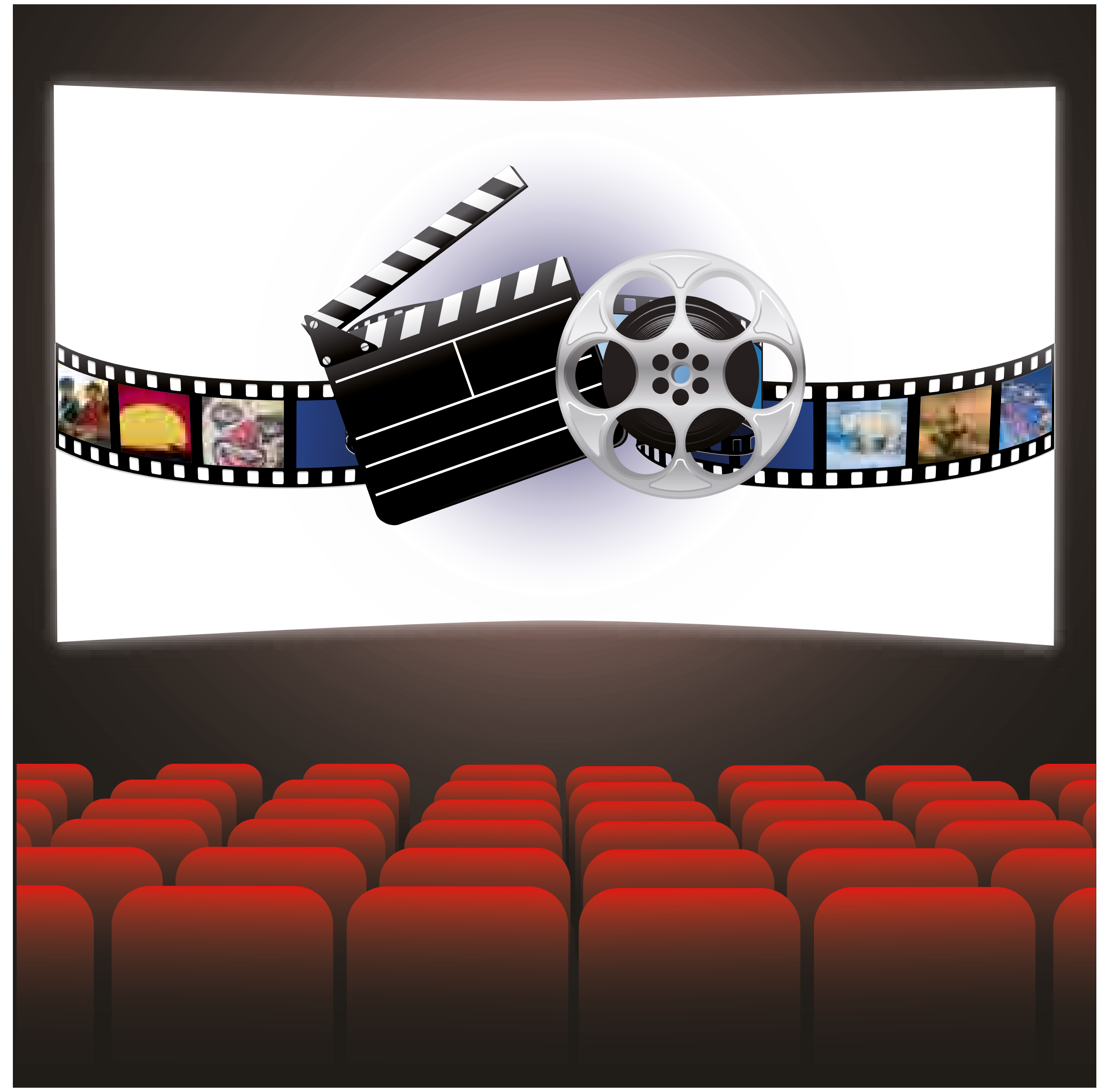
   a. La suma de tres números es 27. El número menor disminuido en 1 equivale a ¼ de la suma del mayor y el mediano. La diferencia entre el menor y el mediano equivale al mayor disminuido en 3. ¿Cuáles son los tres números?

   b. Un cliente de un supermercado ha pagado un total de $156 000 por 12 *l* de leche, 3 kg de jamón serrano y 24 *l* de aceite de oliva. Calculamos el precio de cada artículo, sabiendo que 1 *l* de aceite cuesta el triple que 1 *l* de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 *l* de aceite más 4 *l* de leche.



   c. Se juntan 300 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican en número a los niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 200 al doble de niños. Averigüamos el número de hombres, mujeres y niños.

   d. Un cinema está especializado en películas de tres tipos: Infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: El 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste americano representan el 30% del total de las películas. El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste americano más el 60% de las de terror representan la mitad del total de las películas. Hay 100 películas más del oeste americano que de infantiles. Hallamos el número de películas presentadas en el cinema.



2. Invitamos al profesor a evaluar nuestra actividad.

Evaluación por competencias

INFORMACIÓN PARA CONTESTAR LAS PREGUNTAS 1, 2 Y 3:

Un fabricante de coches ha lanzado al mercado tres nuevos modelos (A, B y C). El precio de venta de cada modelo es 3, 4 y 6 millones respectivamente, ascendiendo el importe total de los coches vendidos durante el primer mes a 500 millones. Por otra parte, los costos de fabricación son de 2 millones por coche para el modelo A, de 3 para el modelo B y de 4 para el C. El costo total de fabricación de los coches vendidos en ese mes fue de 350 millones y el número total de coches vendidos 280.

1. El sistema que representa el problema es:

A. $\begin{cases} A+B+C=500 \\ 3A+4B+6C=280 \\ 2A+3B+4C=350 \end{cases}$

B. $\begin{cases} A+B+C=350 \\ 3A+4B+6C=500 \\ 2A+3B+4C=280 \end{cases}$

C. $\begin{cases} A+B+C=280 \\ 3A+4B+6C=500 \\ 2A+3B+4C=350 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 5A+7B+10C=350 \\ 3A+4B+6C=500 \\ 2A+3B+4C=350 \end{cases}$

1

2. La solución del sistema de ecuaciones muestra que el modelo con más coches es:

A. El modelo A es tres veces mayor que el modelo B.

B. El modelo B es el quintuplo del modelo C.

C. El modelo C es ocho veces mayor que los otros dos modelos.

D. No hay solución porque el sistema es inconsistente.

2

3. Escribo un problema equivalente al dado de tal forma que los datos correspondan a la mitad de los datos.

4. En un sistema de ecuaciones lineales 3 x 3 existe solución debido a:

A. La intercepción de dos planos.

B. La intercepción de tres planos.

C. La intercepción de tres rectas.

D. La intercepción de dos rectas.

4

5. La solución del siguiente sistema $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ -x-4y-5z=-11 \\ 5y-z=4 \end{cases}$ es

A. (-1,1,1)

B. (1,2,1)

C. (2,1,1)

D. (1,1,1)

5