Unidad 2

Reconozcamos otras funciones y sus diferentes representaciones

Estándares

- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a las familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando las propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
- Calculo la probabilidad de eventos simples usando diversos métodos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo, entre otros).

Competencias

Matemáticas:

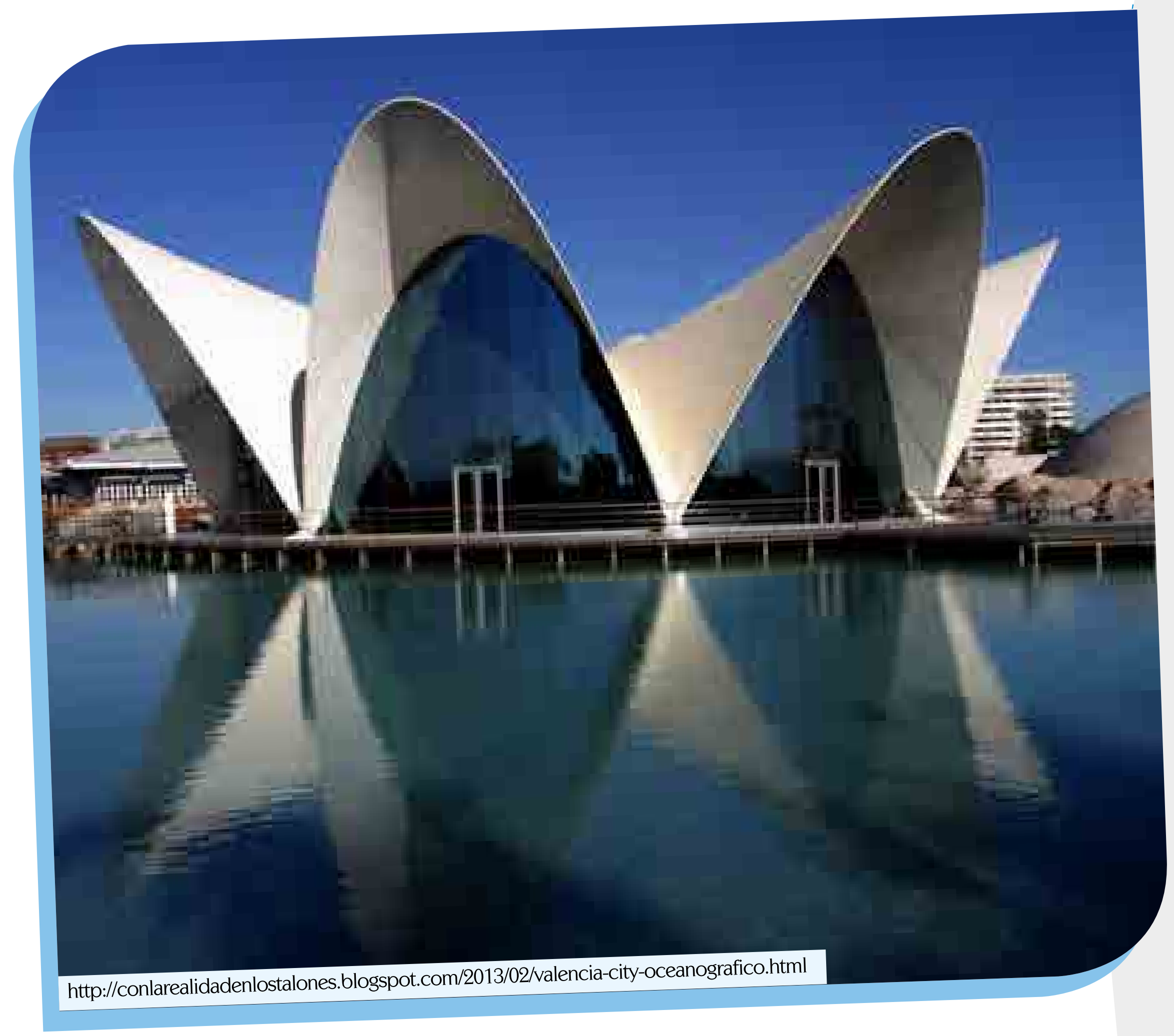
- Resuelvo situaciones de ecuaciones cuadráticas y polinomiales en el contexto de los números reales. Además, comprendo la relación entre conjuntos y técnicas de conteo para resolver situaciones problema de la cotidianidad.

Ciudadanas:

- Construyo relaciones pacíficas que contribuyan a la convivencia cotidiana en mi comunidad y municipio.

Guía 1

Identifiquemos algunas características de la función cuadrática



http://conlarealidadenlostalones.blogspot.com/2013/02/valencia-city-oceanografico.html

Indicadores de desempeño

Conceptual

- Identifica las características de las funciones cuadráticas.

Procedimental

- Maneja las diferentes representaciones de las funciones cuadráticas.

Actitudinal

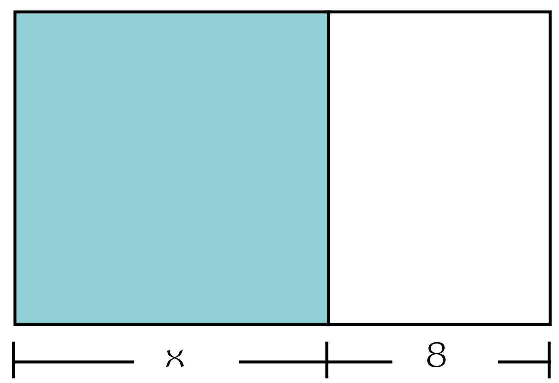
- Resuelve distintas situaciones cotidianas que involucran funciones cuadráticas.

A Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

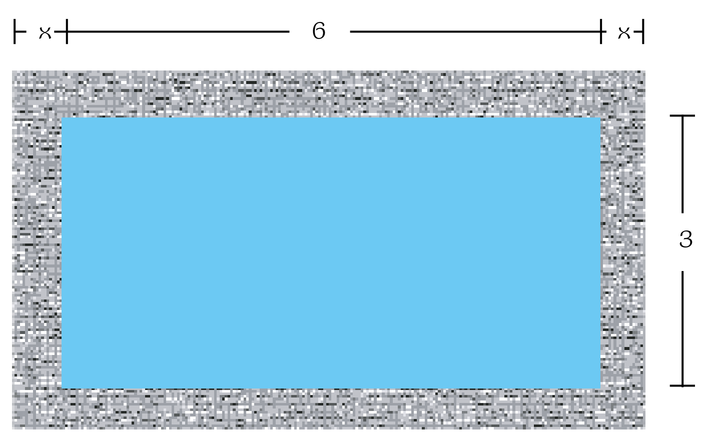
1. Resuelvo las siguientes situaciones en mi cuaderno:

   a. Si en un cuadrado de lado x se aumenta en 8 unidades dos lados paralelos se obtiene un rectángulo. Observo la figura y respondo:



- ✓ ¿Es posible determinar las medidas del rectángulo construido? ¿Cuál sería su base y cuál su altura?
- ✓ ¿Se puede expresar el área del rectángulo construido en función del lado x del cuadrado? ¿Cómo se haría?
- ✓ Si se sabe que la longitud de uno de los lados es de 9 unidades cuadradas, ¿cuál sería el área del rectángulo construido?

   b. Se ha construido una piscina de 6 m x 3 m y se desea hacer un camino a su alrededor de anchura x constante. Observo la figura y respondo:



- ✓ ¿Es posible expresar el área del camino que se desea realizar alrededor de la piscina en términos de x? ¿Cuál sería el procedimiento?
- ✓ Si x es igual a 1, 2, 3 y 4, ¿cuál sería el área del camino para cada caso? Organizo los valores en una tabla.
- ✓ Si el área del camino ha de ser de 190 m², ¿cuál podría ser el valor de x?

TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparo las respuestas de los ejercicios anteriores con un compañero y entre los dos llegamos a definir el resultado que consideramos correcto.

3. Resolvemos cada una de las siguientes operaciones:

   a. $x(x+2)$

   b. $(x-3)(x+7)$

   c. $(2x-3)(2x-1)$

   d. $(8+3x)(5+3x)-32$

   e. $(5x-2)(x+3)$

4. Factorizamos cada una de las siguientes expresiones:

   a. $x^2-12x-28$

   b. $3x^2-5x-2$

   c. $x^2-10x+24$

   d. x^2-6x+8

   e. $2x^2+3x-2$

5. Invitamos al docente a evaluar las actividades desarrolladas.

Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Nos organizamos en grupos de trabajo y solicitamos al relator, al investigador y al controlador de tiempo liderar la siguiente actividad y anotamos en nuestro cuaderno las ideas más importantes de la lectura:

Funciones cuadráticas

Una función cuadrática es de la forma:

$$y = f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}} \qquad a, b\ y\ c \in R\ y\ a \neq 0$$

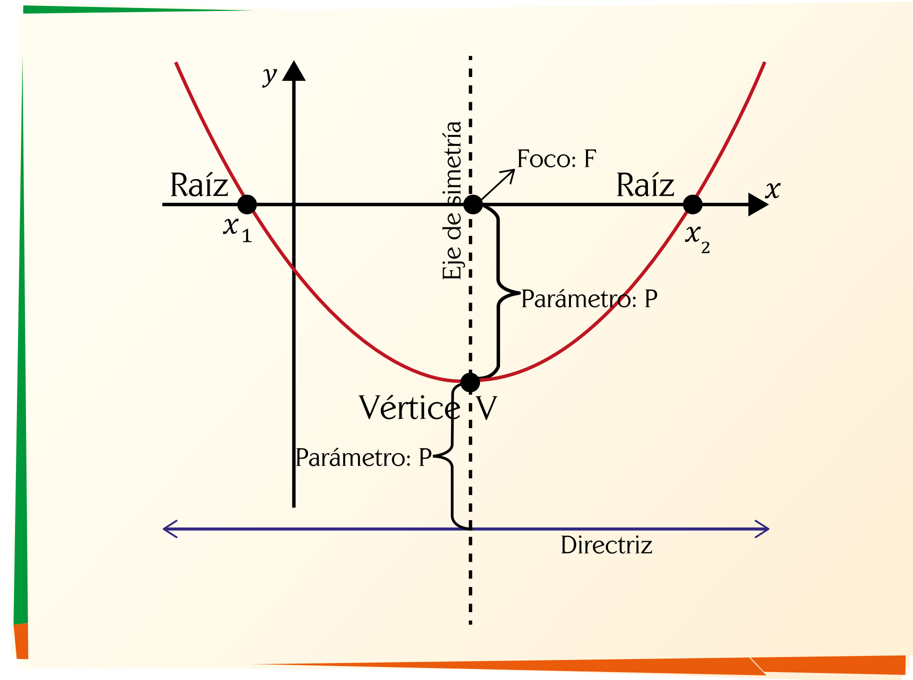
Por ejemplo:

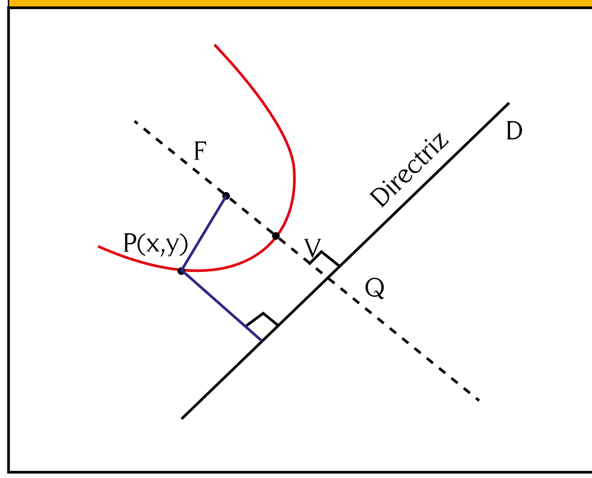
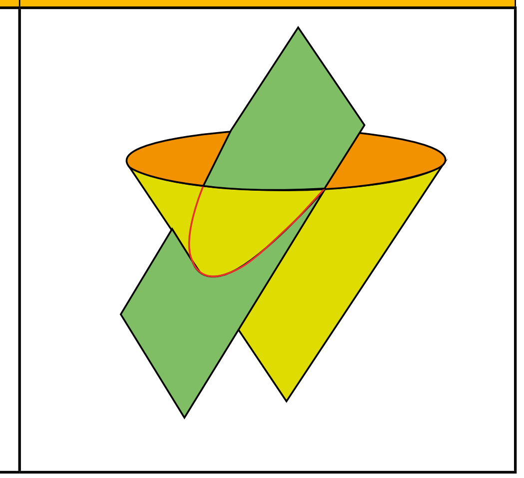
$$f(x) = 4x^2 - 2x + 5$$

Esta es una función cuadrática, en donde $4x^2$ es el término cuadrático, -$2x$ el término lineal y 5 el término independiente.

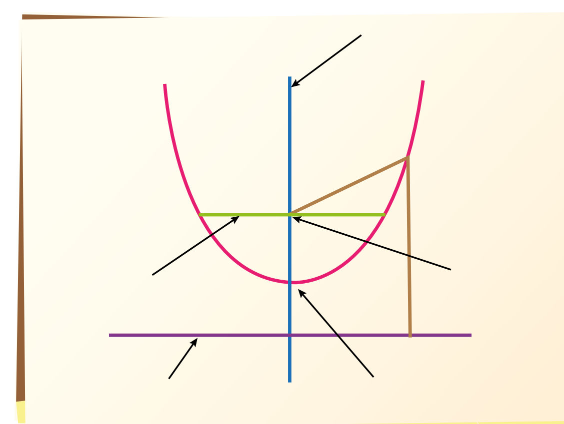
La función cuadrática tiene como representación gráfica una **parábola** en la que se identifican diversos elementos:

- Directriz.
- Eje de simetría o eje focal.
- Cortes con el eje x: x_1 y x_2 (si existen).
- Vértice: V.
- Foco: F.

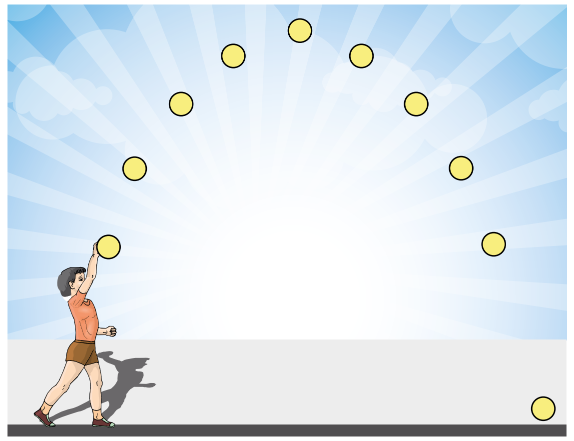


La **parábola** se define como la señal, marca o lugar geométrico que se deja al mover dos distancias, la de un punto al foco y del punto a la directriz. Además, esta distancia tiene la misma medida.	La **parábola** se define como una de las secciones que corta por un plano a un cono.
	

2. Identificamos algunos de los elementos que hacen parte de la parábola:



Una de las aplicaciones de la función cuadrática es la altura $h(t)$ que alcanza un objeto después de t segundos cuando es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0.



Su expresión es:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Si suponemos que la velocidad inicial es $10\ m/s$ y que la aceleración es $10\ m/s^2$, entonces la altura es: $h(t) = 10t - 5t^2$.

Si le damos algunos valores a t, obtendremos:

$h(0) = 10(0) - 5(0)^2 = 0$

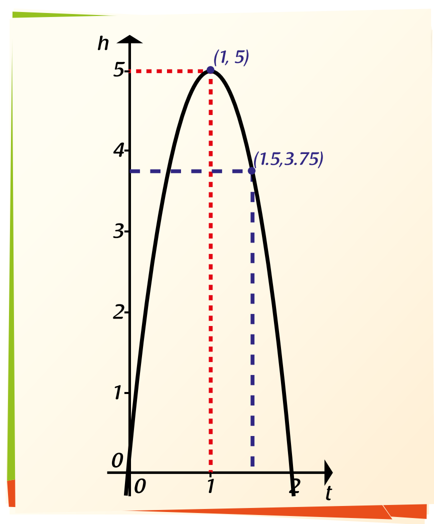
$h(1) = 10(1) - 5(1)^2 = 5$

$h(1.5) = 10(1.5) - 5(1.5)^2 = 3.75$

$h(2) = 10(2) - 5(2)^2 = 0$

t	h(t)
0	0
1	5
1.5	3.75
2	0

Si graficamos esta función, obtendremos:



Es importante determinar el vértice de la función cuadrática cuyas coordenadas son:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}} \text{ y en } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}\right).$$

Con este dato podemos ubicar puntos simétricos de lado a lado para que se pueda graficar. En el ejemplo anterior $h(t) = 10t - 5t^2$, los datos son $a = -5$, $b = 10$, entonces para encontrar la coordenada en $x = -\frac{10}{2(-5)} = -\frac{10}{-10} = 1$

Luego, reemplazamos ese valor en $h(1) = 10(1) - 5(1)^2 = 5$.

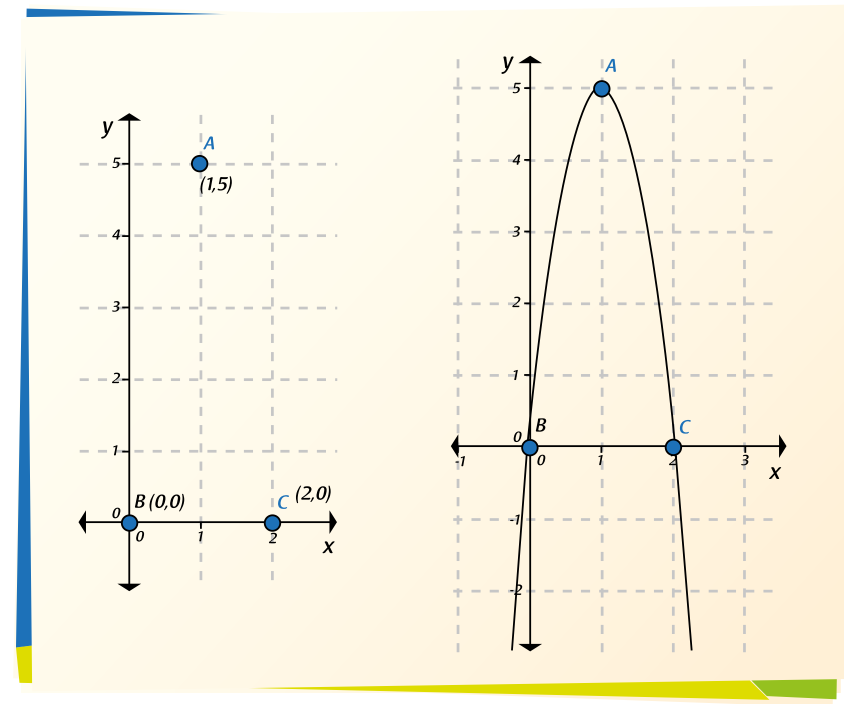
Por lo tanto, las coordenadas del vértice son: (1,5).

Para hallar los puntos equidistantes al valor 1, podemos tomar 0 y 2 que están a una distancia de una unidad a ambos lados del valor 1 y encontramos sus coordenadas correspondientes en y, las cuales deben ser del mismo valor.
En este caso, quedan:

$h(0) = 10(0) - 5(0)^2 = 0$

$h(2) = 10(2) - 5(2)^2 = 0$

Y graficamos:



3. Representamos gráficamente las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

c. $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

d. $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

e. $f(x) = -3x^2 + 7x + 20$

f. $f(x) = 2x^2 + x - 6$

4. Determinamos las coordenadas del vértice de las funciones anteriores.

5. Elaboramos tablas por cada una de las funciones que muestre la selección de puntos simétricos al eje de simetría de la parábola.

6. Continuamos con la lectura sobre las características de las funciones cuadráticas:

La función cuadrática tiene cuatro maneras de representarse algebraicamente:

Forma estándar

Es la función cuadrática en forma de polinomio. Se expresa así:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$y \;= ax^2 + bx + c$$

Forma factorizada

Es la función cuadrática en forma de dos factores, cada uno de ellos es un binomio. Se expresa así: $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Forma canónica

Es la función cuadrática en forma de una suma, en la cual un sumando es un factor $a(x-h)^2$ y el otro un número k . El número representa el desplazamiento en el eje y. Se expresa de esta manera:
$f(x) = a(x-h)^2 + k$

Forma de sección cónica

Es la función cuadrática expresada como parábola, cuya ecuación es:
$4p(y-k) = (x-h)^2$
Donde (h, k) son las coordenadas del vértice y p es la distancia del foco al vértice y del vértice a la directriz.
Sin embargo, esa expresión algebraica no es una función; por lo tanto, tenemos que despejar 'y' de la siguiente manera:

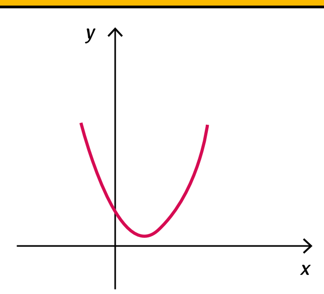
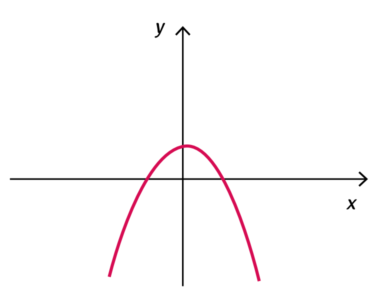
$$4p(y-k) = (x-h)^2$$

$$y - k = \frac{(x-h)^2}{4p}$$

$$y = \frac{(x-h)^2}{4p} + k$$

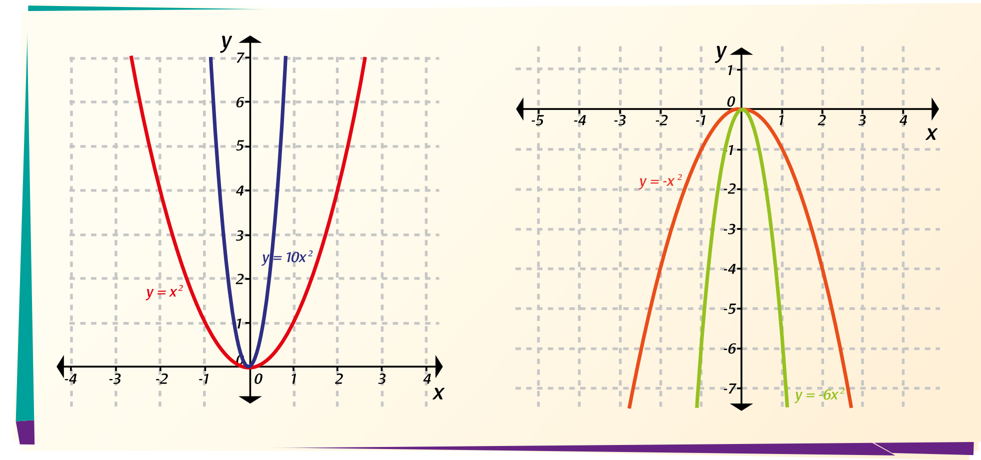
Elementos principales de la gráfica de una función cuadrática

- **Concavidad de la parábola**
  El parámetro a según su signo determina la concavidad, es decir, si abre hacia arriba o hacia abajo la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.	Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
	

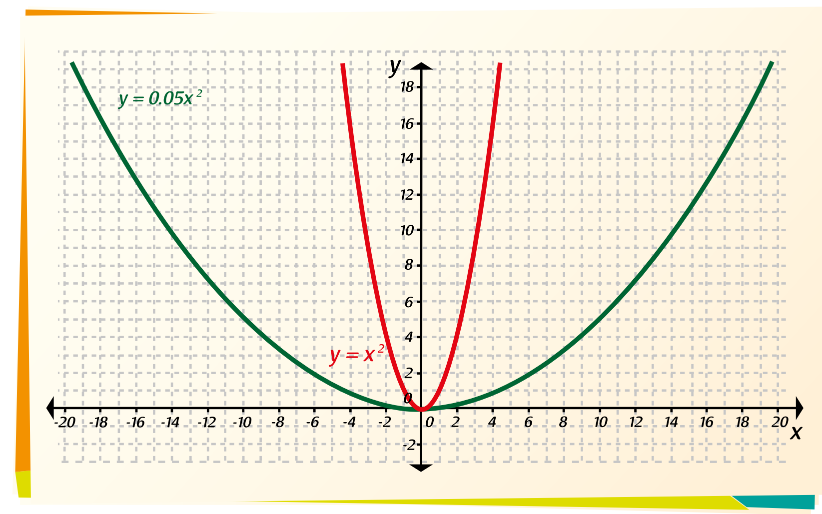
En caso que el valor de $a > 1$ o a <-1, la parábola se comprime y su abertura se va acercando al eje y.

Ejemplo 1:



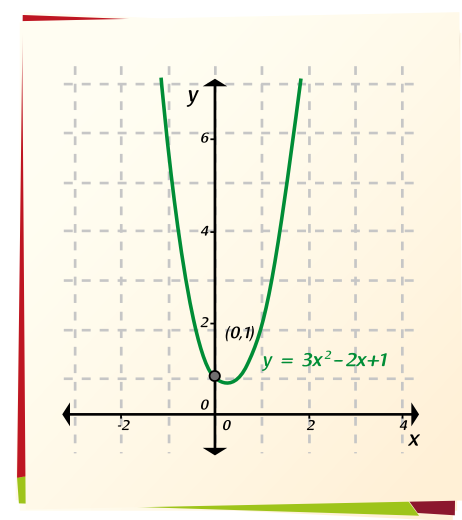
En caso que el valor de $-1 < a < 1$, la parábola se descomprime y su abertura se va acercando al eje x.

Ejemplo 2:



El fenómeno en el que la abertura se comprime o descomprime es conocido como dilatación.

- **Intersección de la parábola con el eje Y**
  Sea la función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
  Cuando su gráfica intercepta al eje y, se debe dar que $x = 0$; si reemplazamos en la ecuación, obtendremos: $y = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c$, entonces $y = c$.
  Por tanto, tenemos que la intersección con el eje y es el punto (0,c).



Ejemplo 3:

Si se tiene la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, al reemplazar por cero se obtiene:

$f(0) = 3(0)^2 - 2(0) + 1 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$

- **Intersección de la parábola con el eje x**
  Para encontrar los puntos de intersección de la función cuadrática con el eje x, es necesario resolver la siguiente ecuación $0 = ax^2 + bx + c$. Existen dos métodos para realizar este procedimiento, por factorización y con la aplicación de una fórmula. Por ahora, sólo utilizaremos la factorización de un trinomio.

Ejemplo 4:

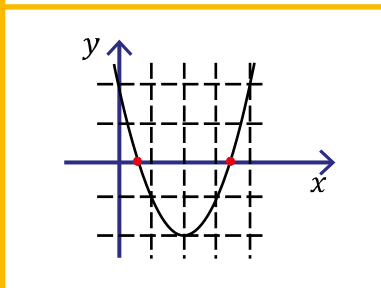
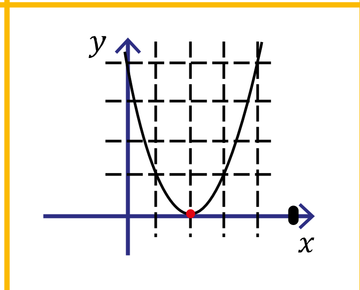
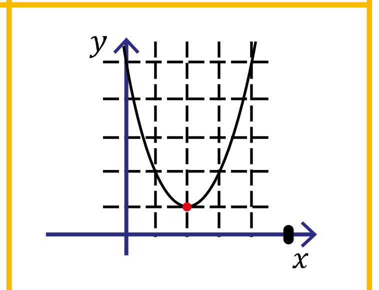
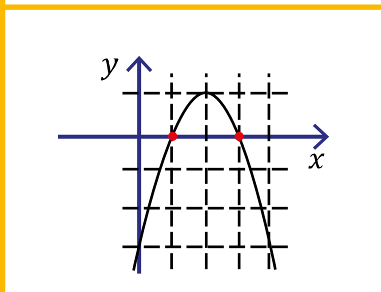
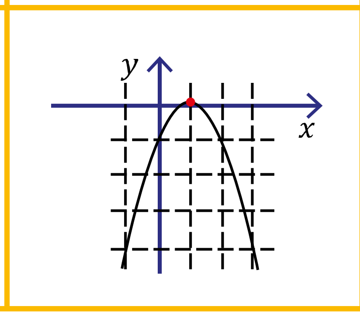
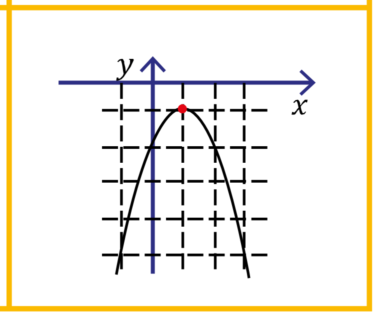
Se tiene la función $f(x) = x^2 + x - 12$. Para hallar los interceptos realizamos la factorización de $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$. Luego, igualamos cada factor a cero y despejamos a x, así:

$(x-3) = 0 \qquad (x+4) = 0$

$x = 3 \qquad x = -4$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos de intersección con el eje x son: (3,0) y (-4,0).

Si graficamos lo visto hasta ahora, tendremos las siguientes posibilidades:

	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

7. Llamamos a nuestro profesor para que nos aclare las dudas.

8. Determinamos los puntos de intersección con el eje x y con el eje y, si es posible:

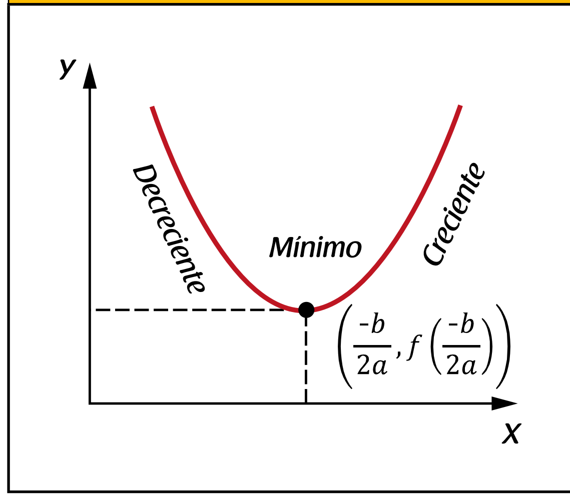
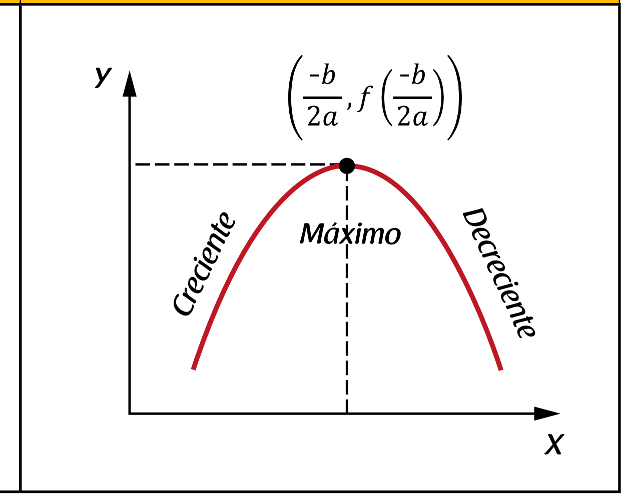
a. $f(x) = x^2 - 2x - 35$

b. $f(x) = 6x^2 + 7x + 2$

c. $f(x) = -5x^2 + x + 4$

d. $f(x) = -7x^2 + 11x + 6$

- **Vértice de la parábola**
  El vértice de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ define el máximo o el mínimo de la parábola.

Si $a > 0$, así se representa el mínimo de la función:	Si $a < 0$, así se representa el máximo de la función:
	

- **Parámetro p de la parábola**
  El parámetro p determina la distancia del vértice al foco, que es la misma distancia del vértice a la directriz. Para recordar esto realizamos las siguientes modificaciones a la expresión de $y = ax^2 + bx + c$ a

$$y = \frac{(x-h)^2}{4p} + k$$

Ejemplo 5:

Se tiene la función $y = 4x^2 + 2x - 12$. Realizamos las siguientes transformaciones:

Sumamos y restamos a ambos lados para completar el cuadrado.

$y = 4x^2 + 2x - 12$

$y = \left(4x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right) - 12 - \frac{1}{4}$

Factorizamos para sacar el valor a.

$$= 4\left(x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}\right) - 12 - \tfrac{1}{4}$$

$$y = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

$$y = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Entonces el vértice es: $\left(\frac{-1}{4}, -\frac{49}{4}\right)$

Continuamos para poder identificar el valor de la distancia p:

$$y + \frac{49}{4} = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$$

Como se sabe que $y - k = 4p(x - h)^2$, entonces $4p = 4$ y luego $p = 1$. La distancia del vértice al foco es 1 unidad y es la misma distancia del vértice a la directriz.

9. Determinamos el vértice y la distancia entre foco y vértice:

a. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

b. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

c. $f(x) = -x^2 - x - 2$

d. $f(x) = (x - 2)^2 - 3$

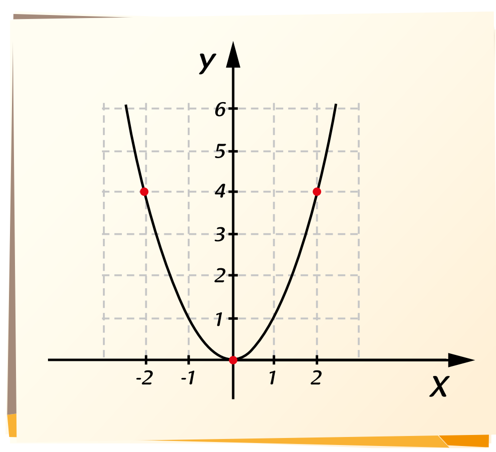
e. $f(x) = -3x^2 + 7x + 20$

f. $f(x) = x^2 + 4$

10. Si tenemos dudas le hacemos preguntas a nuestro profesor para poder continuar con la lectura.

Traslación o desplazamiento de la gráfica de la función cuadrática

El análisis de la traslación de la gráfica de la función cuadrática se hará a partir de la función $y = x^2$ cuya representación gráfica es:



A continuación observaremos cómo se afecta la gráfica cuando sumamos o restamos una constante a la variable independiente (x) o a la variable dependiente (y):

Gráfico de $y = x^2 + 1$

A la función $y = x^2$ se le ha sumado 1, lo que hace que la gráfica de x^2 se desplace una unidad hacia arriba en el eje y:

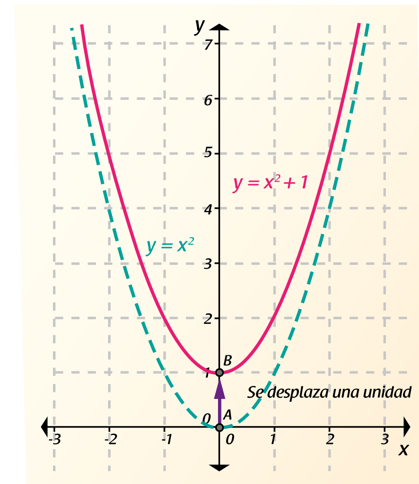


Gráfico de $y = x^2 - 1$

A la función $y = x^2$ se le ha restado 1, lo que hace que la gráfica de x^2 se desplace una unidad hacia abajo en el eje y:

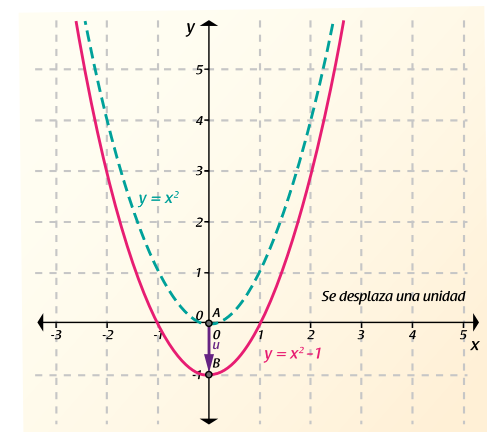


Gráfico de $y = (x - 1)^2$

Cuando a la variable x le restamos una unidad, el gráfico de $y = x^2$ se desplaza una unidad a la derecha en el eje x:

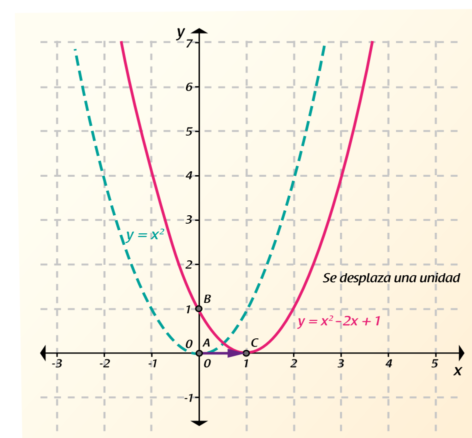
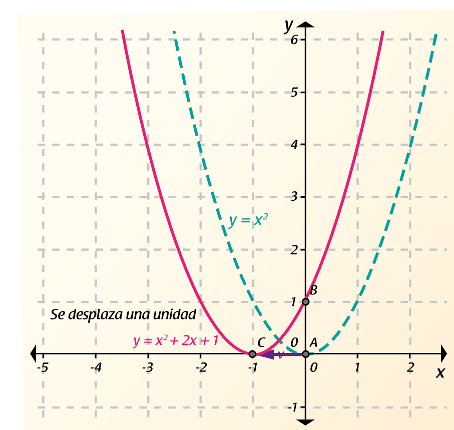


Gráfico de $y = (x + 1)^2$

Cuando a la variable x le restamos una unidad, el gráfico de $y = x^2$ se desplaza una unidad a la izquierda en el eje x:



11. Indicamos cuál fue el desplazamiento aplicado a la función $y = x^2$ para obtener cada una de las siguiente expresiones:

a. $f(x) = (x - 5)^2$

b. $f(x) = (x + 4)^2 - \frac{7}{2}$

c. $f(x) = x^2 + 2.5$

9° - Unidad 2 - Guía 1

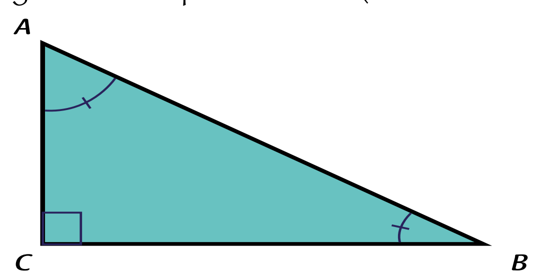
D Aplicación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo en mi cuaderno las siguientes situaciones empleando alguno de los métodos tratados:

   a. La suma de un número y su cuadrado es 42. Hallar dicho número.

   b. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida (en centímetros) tres números pares consecutivos. ¿Cuál es el valor de la medida de cada uno de los lados del triángulo rectángulo?



   c. Dentro de 11 años la edad de Marcela será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace trece años. Calcular la edad de Marcela.

TRABAJO EN PAREJAS

2. Comparamos los resultados obtenidos de manera individual en las situaciones anteriores. Llegamos a un consenso para determinar si alguno de los dos tuvo errores y explicamos las razones para que esto ocurriera.

3. En plenaria realizamos y compartimos nuestras observaciones sobre cada una de las situaciones anteriores.

4. Compartimos con nuestros compañeros y profesor las actividades realizadas y consignamos en los cuadernos las conclusiones generadas durante la actividad y la plenaria.

E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Consideramos la función $y = 3x^2 - 2x - 1$. Completando los cuadrados resulta: $y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$. Grafico la función y respondo:

   a. ¿Hacia dónde está abierta la parábola?
   b. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
   c. ¿Cuál es el valor del eje de simetría?
   d. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la parábola con el eje x y el eje y?

2. Determinamos los puntos de corte para las siguientes parábolas:

   a. $y = 2x^2 - x + 3$

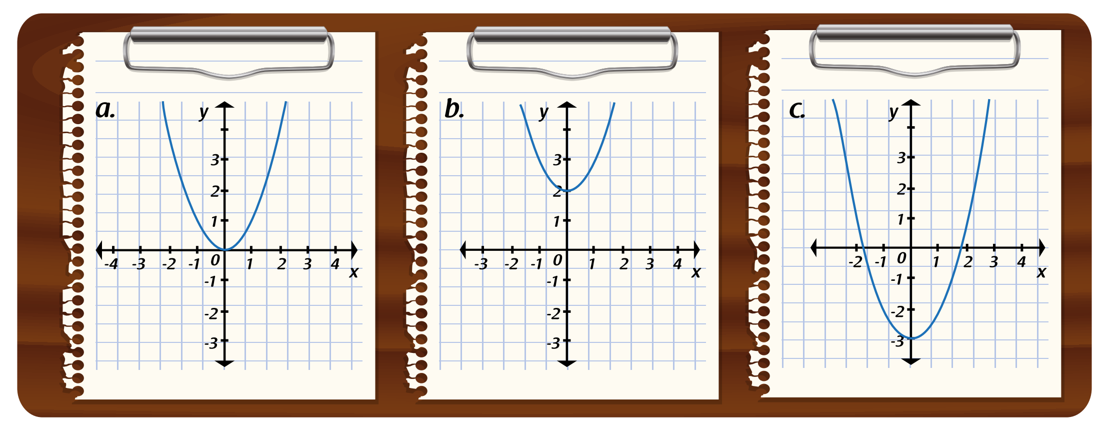
   b. $y = x^2 - 2x + 1$

   c. $y = x^2 + x + 1$

   d. $y = 3x^2 - 7x - 3$

   e. $y = 2x^2 + 5x + 1$

3. Analizamos las siguientes gráficas y establecemos la ecuación de las funciones cuadráticas graficadas a continuación:



4. Presentamos el cuaderno al profesor para su valoración y sustentamos nuestras respuestas.

Evaluación por competencias

1. Determino si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y argumento mi respuesta a través de un ejemplo:

A. Cuando se puede factorizar el trinomio de la función cuadrática, esto indica que existen dos intersecciones con el eje x ( ).

B. Si en la $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, la parábola se abre hacia abajo ( ).

C. La expresión $f(x) = \frac{1}{4}p(x - x_0) + y_0, p \neq 0$ es otra forma de expresar una función cuadrática ( ).

D. La función $y = x^2$ se traslada dos unidades hacia la izquierda cuando se obtiene la función $y = (x - 2)^2$ ( ).

1

Selecciono la respuesta correcta y justifico mi elección.

2. La función $y = x^2 - 6x + 5$ tiene la intersección con el eje x cuyos puntos son $(x_1, 0)$ $(x_2, 0)$. Entonces x_1 y x_2 son:

A. $x_1 = -6$ y $x_2 = 5$

B. $x_1 = -1$ y $x_2 = -5$

C. $x_1 = 6$ y $x_2 = 5$

D. $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$

2

3. El largo de un terrero rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m, el área se hace el doble. Las dimensiones el terreno son:

A. Ancho: 30 m y la longitud: 60 m.

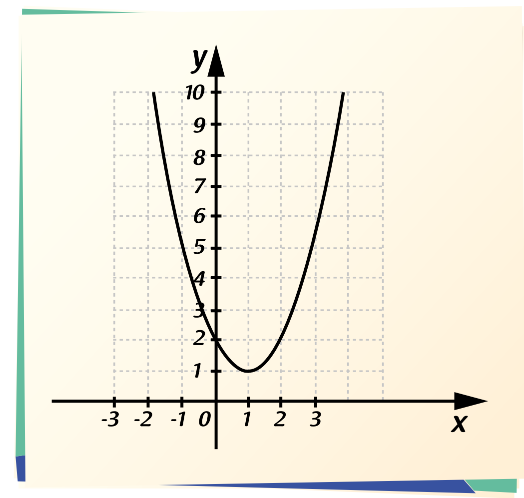
B. Ancho: 20 m y la longitud: 40 m.

C. Ancho: 6 m y la longitud: 12 m.

D. Ancho: 4 m y la longitud: 8 m.

3

4. La función cuadrática que representa la siguiente gráfica es:



A. $f(x) = x^2$

B. $f(x) = x^2 + 2$

C. $f(x) = (x - 1)^2$

D. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

4