Guía 5 A

Máquinas y fracciones equivalentes

Reconozcamos máquinas distintas que producen lo mismo

Trabaja solo

1. Estudia las siguientes máquinas:

M1: $Ei \xrightarrow{\div 6} ¿ \xrightarrow{2\times} Ef$ ⇒ $Ei \xrightarrow{\div 3} Ef$

M2: $Ei \xrightarrow{\div 12} ¿ \xrightarrow{4\times} Ef$ ⇒ $Ei \xrightarrow{\div 3} Ef$

Estas dos máquinas son distintas, sin embargo, ambas se pueden reducir a la misma máquina simple, a una máquina que reduce a la tercera parte.

Comprueba que estas dos máquinas producen el mismo efecto con los siguientes valores de Ei

- 8
- 12
- 20
- 40

2. Compara el Ef que cada vez sale de los pares de las siguientes máquinas y di cuál es la relación multiplicativa entre ellos.

- $Ei \xrightarrow{\div 3} ¿$ $Ei \xrightarrow{\div 12} ¿$
- $Ei \xrightarrow{\div 20} ¿$ $Ei \xrightarrow{\div 5} ¿$
- $Ei \xrightarrow{3\times} ¿$ $Ei \xrightarrow{15\times} ¿$
- $Ei \xrightarrow{\div 4} ¿$ $Ei \xrightarrow{\div 15} ¿$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

¿Por qué M1 y M2 hacen lo mismo?

Una forma de explicar porque M1 y M2 hacen lo mismo.

Las dos máquinas M1 y M2 reducen más que lo que amplían, ambas reducen tres veces más de lo que amplían.

M1 $Ei \xrightarrow{\div 6} ? \xrightarrow{2\,\times} Ef$

Reduce 6 veces mientras amplía 2 veces.

M2 $Ei \xrightarrow{\div 12} ? \xrightarrow{4\,\times} Ef$

Reduce 12 veces mientras amplía 4 veces.

Por eso ambas máquinas reducen a la tercera parte.

Otra forma de explicar porque M1 y M2 hacen lo mismo.

M2 reduce el doble de lo que reduce M1.

M1 $Ei \xrightarrow{\div 6} ?$

M2 $Ei \xrightarrow{\div 12} ?$

M1 reduce 6 veces. M2 reduce el doble de M1 es decir reduce 12 veces.

M2 amplía el doble que M1

M1 $Ei \xrightarrow{\div 6} ? \xrightarrow{2\,\times} Ef$

M2 $Ei \xrightarrow{\div 12} ? \xrightarrow{4\,\times} Ef$

M1 amplía 2 veces.
M2 amplía el doble que M1, es decir amplía 4 veces.

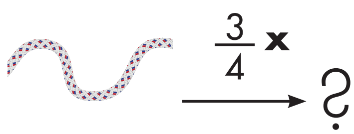
M2 reduce el doble que lo que reduce M1, pero también amplía el doble que lo que amplía M1.

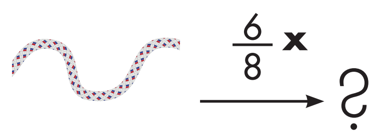
3. Investiga si las dos máquinas siguientes hacen lo mismo.

$Ei \xrightarrow{\div 5} ? \xrightarrow{10\,\times} Ef$ $\qquad$ $Ei \xrightarrow{\div 15} ? \xrightarrow{30\,\times} Ef$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

4. Toma dos pedazos de piola de igual magnitud. Toma una y pásala por la primera máquina y después toma la otra y pásala por la segunda máquina.





- Compara el Ef de las dos máquinas. ¿Las dos piolas salen con la misma o con diferente longitud?
- Explica por qué se obtiene el resultado al que se llega.
- Intenta encontrar otro par de máquinas distintas a "$\frac{3}{4}$ **x**" a "$\frac{6}{8}$ **x**" que haga lo mismo.

5. Comparen sus procedimientos y respuestas. Hagan gráficos que les permitan explicar el resultado.

6. Comparen los dos pares de máquinas. ¿Cuál de ellos tienen dos máquinas que hacen lo mismo?

$$Ei \xrightarrow{\frac{1}{2}\,\times} Ef \qquad Ei \xrightarrow{\frac{4}{8}\,\times} Ef$$

$$Ei \xrightarrow{\frac{5}{2}\,\times} Ef \qquad Ei \xrightarrow{\frac{15}{6}\,\times} Ef$$

7. Toma dos colecciones de 6 tapas y a cada colección aplícale una máquina.

$$Ei \xrightarrow{\frac{2}{3}\,\times} ¿$$

Sugerencia: haz tres grupos iguales y después toma dos.

$$Ei \xrightarrow{\frac{4}{6}\,\times} ¿$$

¿Que sucede? ¿Las dos máquinas hacen lo mismo?

8. Consigue otros ejemplos como los anteriores.

Identifiquemos máquinas equivalentes

Máquinas equivalentes

Se dice que dos máquinas son equivalentes si siempre que entra el mismo Ei producen el mismo Ef. Es decir, si las dos máquinas producen la misma transformación.

Ejemplo:

$$\text{Ei} \xrightarrow{\frac{2}{5}\,\mathbf{x}} \text{Ef} \qquad \text{Ei} \xrightarrow{\frac{6}{15}\,\mathbf{x}} \text{Ef}$$

Son equivalentes porque ambas máquinas siempre producen la misma transformación Si Ei = 15

$$15 \xrightarrow{\frac{2}{5}\,\mathbf{x}} ¿? \qquad 15 \xrightarrow{\frac{6}{15}\,\mathbf{x}} ¿?$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$15 \xrightarrow{\frac{1}{5}\,\mathbf{x}} 3 \xrightarrow{2\,\mathbf{x}} 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 15 \xrightarrow{\frac{1}{15}\,\mathbf{x}} 1 \xrightarrow{6\,\mathbf{x}} 6$$

Si Ei = 30

$$30 \xrightarrow{\frac{2}{5}\,\mathbf{x}} 12 \quad \Longleftrightarrow \quad 30 \xrightarrow{\frac{6}{15}\,\mathbf{x}} 12$$

1. Investiga cuáles de los siguientes pares son máquinas equivalentes:

$$\text{Ei} \xrightarrow{\frac{2}{3}\,\mathbf{x}} \text{Ef} \qquad \text{Ei} \xrightarrow{\frac{8}{12}\,\mathbf{x}} \text{Ef}$$

$$\text{Ei} \xrightarrow{\frac{3}{4}\,\mathbf{x}} \text{Ef} \qquad \text{Ei} \xrightarrow{\frac{4}{5}\,\mathbf{x}} \text{Ef}$$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

2. Escribe en los cuadros los números para que la máquina sea equivalente a la de la izquierda.

- $Ei \xrightarrow{\frac{4}{3}\,\times} Ef$ $\qquad$ $Ei \xrightarrow{\frac{\square}{\square}\,\times} Ef$
- $Ei \xrightarrow{\frac{2}{3}\,\times} Ef$ $\qquad$ $Ei \xrightarrow{\frac{\square}{\square}\,\times} Ef$

3. Utiliza un rectángulo o un círculo, aplica las máquinas y comprueba si son o no son equivalentes.
Sugerencia: revisa la Guía 4C de esta cartilla.

- $Ei \xrightarrow{\frac{2}{3}\,\times} Ef$
- $Ei \xrightarrow{\frac{6}{9}\,\times} Ef$

4. Conversen sobre los resultados obtenidos en las actividades anteriores y hagan lo que se indica.

- Intenten encontrar 5 máquinas distintas que sean equivalentes a la máquina.

$$Ei \xrightarrow{\frac{1}{3}\,\times} Ef$$

- Conversen sobre una forma de obtener máquinas equivalentes a la máquina dada.
- ¿Cuantas máquinas distintas equivalentes a la máquina dada podrán encontrar?

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

5. Aplica la idea de las máquinas equivalentes y resuelve la pregunta de Mariana.

6. Resuelve los problemas.

- Don Alberto siembra de tomate $\frac{2}{5}$ de su parcela y $\frac{3}{10}$ de zanahoria. ¿A cuál de los dos productos le dedica más terreno?

- $\frac{5}{12}$ de las mujeres de la vereda son mayores de 25 años y $\frac{2}{6}$ son niñas menores de 12 años. ¿Hay más, menos o la misma cantidad de niñas menores de 12 años que mayores de 25?

Estudiemos fracciones equivalentes

1. Escribe los pares de fracciones como máquinas y si las máquinas son equivalentes entonces las fracciones son equivalentes. Di si las dos fracciones son equivalentes.

- $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$
- $\frac{1}{5}$ y $\frac{6}{30}$
- $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{8}$
- $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{20}$

2. Haz gráficos con rectángulos o círculos y verifica si las siguientes fracciones son equivalentes:

- $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$
- $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{12}$

3. Encuentra 5 fracciones que sean equivalentes a la fracción dada en cada caso:

- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{4}{5}$

4. Comparen sus procedimientos y respuestas.

5. Conversen sobre un método que les permita encontrar fracciones equivalentes.

   ¿Cuántas fracciones equivalentes a una fracción dada podrían encontrar si aplican el procedimiento encontrado?

Complificación de fracciones

Se tiene la fracción $\frac{3}{4}$

Multiplicando numerador y denominador por 2

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

Multiplicando numerador y denominador por 3

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

Se puede seguir por 4, por 5, etc.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \cdots$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \cdots$$

A este proceso se le llama complificar. Nos permite transformar una fracción a otra equivalente, que tenga numeradores y denominadores mayores.

6. Aplica el método de complificación para obtener 10 fracciones equivalentes a la fracción dada.

- $\frac{2}{3}$
- $\frac{4}{8}$
- $\frac{5}{3}$

7. En la escuela tienen una parcela de forma rectangular de 240 m por 120 m. Los alumnos preparan el terreno para sembrar dos tipos de hortalizas A y B. A la hortaliza A desean dedicar la cuarta parte de su parcela y a la B la tercera parte, ayúdales a dividir el terreno. Haz un croquis en el que muestres por dónde recomiendas hacer las divisiones y di a cuál de las dos hortalizas vas a destinar más terreno. Justifica tus respuestas.

8. Conversen sobre sus procedimientos y respuestas.

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

Simplificación de fracciones

El procedimiento anterior se puede hacer en sentido contrario.

Por ejemplo se tiene $\frac{72}{120}$

$$\frac{72}{120} = \frac{72 \div 2}{120 \div 2} = \frac{36}{60}$$

$$\frac{36}{60} = \frac{36 \div 2}{60 \div 2} = \frac{18}{30}$$

$$\frac{18}{30} = \frac{18 \div 2}{30 \div 2} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{9}{15} = \frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5}$$

Se verifica si el numerador y el denominador son múltiplos de 2 y se hacen las divisiones, después si son múltiplos de 3, de 5, etc.

$$\frac{72}{120} = \frac{36}{60} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \boxed{\frac{72}{120} = \frac{3}{5}}$$

A este método se le llama simplificación de fracciones. A expresiones como $\frac{3}{5}$ se les llama **fracción irreducible**, porque ya no se puede reducir más; su numerador y denominador no tienen un múltiplo común; es decir, no hay un mismo número, que los dividida a ambos.

9. Simplifica las fracciones siguientes, hasta obtener una fracción irreducible.

$\frac{6}{12}$ $\frac{42}{70}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{21}{42}$

10. Combina los métodos de complificación y simplificación para transformar las dos fracciones a otras dos que tengan el mismo denominador que se indica.

$\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ denominador 12

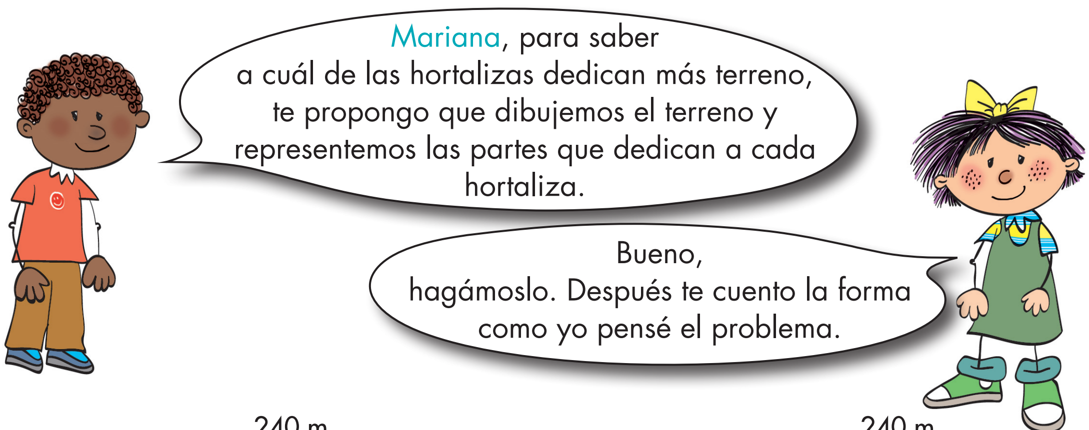
$\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{5}$ denominador 15

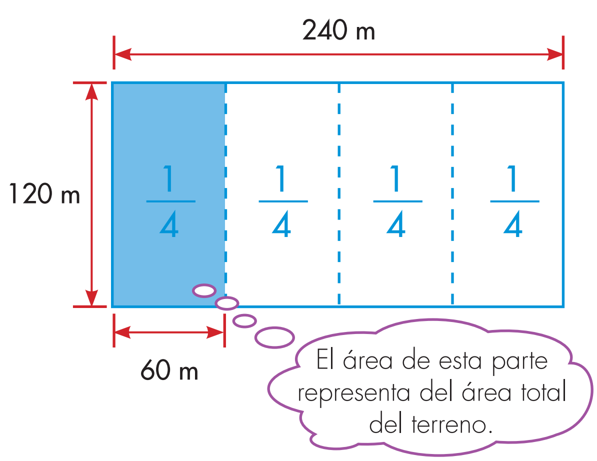
Apliquemos las fracciones para resolver problemas cotidianos

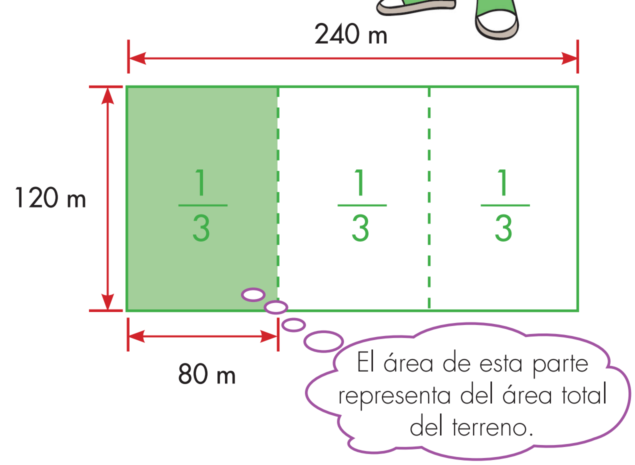
Trabaja en grupo

1. Estudien el diálogo de Mariana y Alejo que tienen cuando tratan de resolver un problema de la actividad 7 de la Guía 5C.

- Primero que todo vuelvan a leer el problema y después estudien lo que hacen Mariana y Alejo.

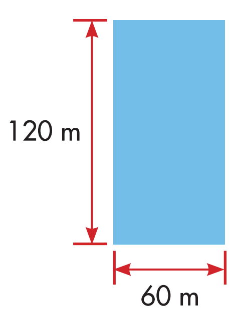


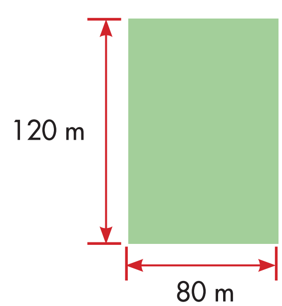




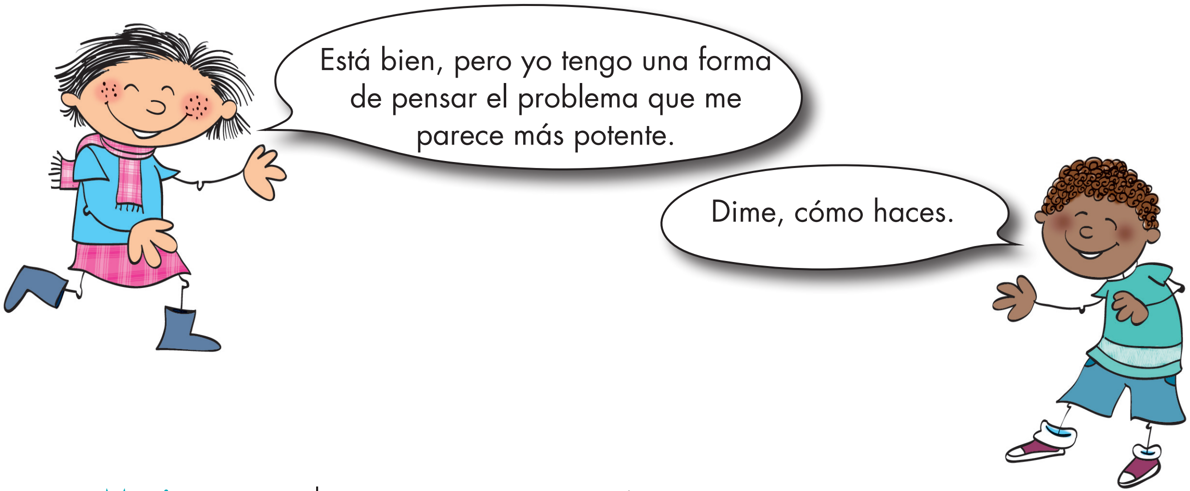
El dialogo entre Mariana y Alejo continua así:

Alejo: si comparas la parte correspondiente a $\frac{1}{4}$ con la parte correspondiente a $\frac{1}{3}$, concluimos que la de $\frac{1}{3}$ es más grande que la de $\frac{1}{4}$.





PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com



Mariana: simplemente yo razono así:

Hortaliza A = $\frac{1}{4}$ o sea de 4 partes iguales toman 1.
Hortaliza B = $\frac{1}{3}$ o sea de 3 partes iguales toman 1.

Las partes de los tercios necesariamente son más grandes que las de los cuartos, porque en el primer caso se divide en menos partes que en el segundo. Como en ambos casos se toman de a una parte, a la hortaliza B se le dedica más terreno.

Alejo: sí, tienes razón, este método es mucho más potente que el mío para casos como estos, pues no tenemos que hacer gráficos, además no importan para nada las medidas del terreno.
Ahora entiendo, $\frac{1}{3}$ de algo siempre será más grande que $\frac{1}{4}$ no importa lo que sea ese algo, siempre que ese algo sea el mismo.

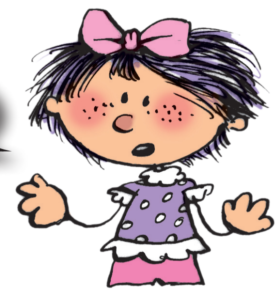
Mariana: eso es, por ejemplo, podríamos pensar en otro problema, digamos que en un hospital $\frac{1}{4}$ de los pacientes son hombres y $\frac{1}{3}$ mujeres, y que nos preguntan: ¿hay más, menos o la misma cantidad de pacientes mujeres que hombres?

2. ¿Cuál es tu respuesta a la pregunta anterior?

3. Inventen un problema en el que la totalidad que se reparte sea leche, y una parte sea $\frac{2}{5}$ y la otra $\frac{2}{7}$. Conversen cómo lo resolverían.

…Mariana tu método es muy bueno, pero cómo haríamos en los casos en que las fracciones que se comparan no tienen el mismo numerador.

Eso es fácil propongo el problema.



Alejo: por ejemplo este problema, don Arturo recoge su cosecha de naranja: grandes, medianas y pequeñas. Don Arturo elaboró la siguiente tabla. Observa que en la tabla el manchón no deja ver la fracción de naranjas medianas.

Fracción de naranjas según tamaño	
Tamaño	Fracción
Grandes	$\frac{2}{5}$
Medianas	
Pequeñas	$\frac{3}{7}$

¿Hay más, menos o igual cantidad de naranjas pequeñas que grandes?

Mariana: como aquí el numerador y el denominador son diferentes, te propongo que transformemos las dos fracciones para llevarlas a fracciones que tengan el mismo denominador.

$$\overset{7\,\times}{\underset{7\,\times}{\frac{2}{5} = \frac{14}{35}}} \qquad \overset{5\,\times}{\underset{5\,\times}{\frac{3}{7} = \frac{15}{35}}}$$

Ahora podemos hacer la comparación con facilidad.

$$\frac{14}{35} < \frac{15}{35}$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

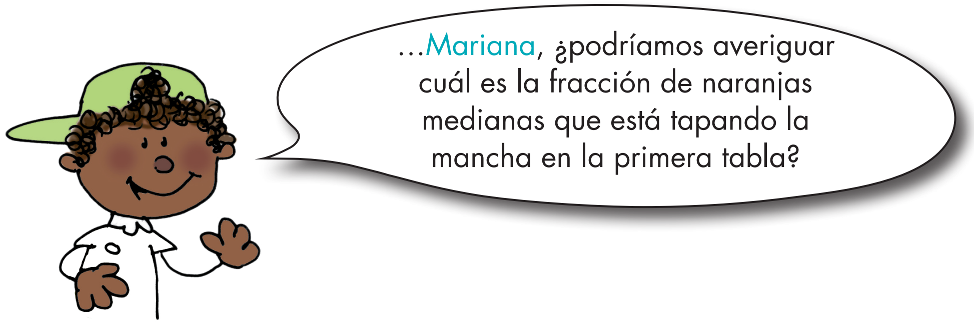
$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$$

Hay menos naranjas grandes que pequeñas.

4. Si en lugar de la tabla anterior don Arturo hizo la tabla:

Fracción de naranjas según tamaño	
Tamaño	**Fracción**
Grandes	$\frac{3}{8}$
Medianas	$\frac{5}{24}$
Pequeñas	$\frac{5}{12}$

¿Cuál de los tamaños es más abundante?



Mariana: sí, podemos reescribir la tabla:

Tamaño	fracción	fracciones transformadas
Grandes	$\frac{2}{5}$	$\frac{14}{35}$
Medianas		¿
Pequeñas	$\frac{3}{7}$	$\frac{15}{35}$

Como la totalidad de las naranjas son $\frac{35}{35}$ es fácil saber cuál es la fracción de las medianas.

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

¿Cuál es la fracción que representa la cantidad de naranjas grandes y pequeñas?

GRANDES (G) PEQUEÑAS (P)

$$\frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$$

Naranjas medianas = (total de naranjas) – (la suma de G y P)

$$N1 = \frac{35}{35} - \frac{29}{35} = \frac{6}{35}$$

La cantidad de naranjas medianas es de = $\frac{6}{35}$ del total.

El método de transformar las fracciones con el mismo denominador es útil para comparar dos o más fracciones y decidir cuál es mayor o menor y para sumar o restar.

5. Resuelve los siguientes problemas:

- De un bulto de café María y Juana toman dos partes. María toma $\frac{2}{9}$ y Juana $\frac{4}{12}$, el resto se las dejaron a José.

  ¿Que fracción representa la suma de las dos partes?

  ¿Cuál de las dos partes es mayor?

  Si el bulto pesa 5 arrobas, ¿cuánto pesa cada parte?

  ¿Que fracción del bulto le quedó a José?

Tres señores compraron matas de rosas en un vivero. Del número de matas que había, el primero se llevó $\frac{1}{6}$, el segundo $\frac{1}{3}$ y el tercero $\frac{1}{4}$. ¿Qué parte del número de matas compraron entre los 3 clientes?

De un terreno su propietario vende un lote que es exactamente la tercera parte del terreno. El señor que compra el lote construye una casa que ocupa la cuarta parte de éste. ¿Qué parte del área del terreno inicial ocupa la casa? Sugerencia: representar el problema como máquinas.

Si el terreno mide 480 m^2, ¿cuánto mide el terreno que ocupa la casa?

presenta tu trabajo al profesor