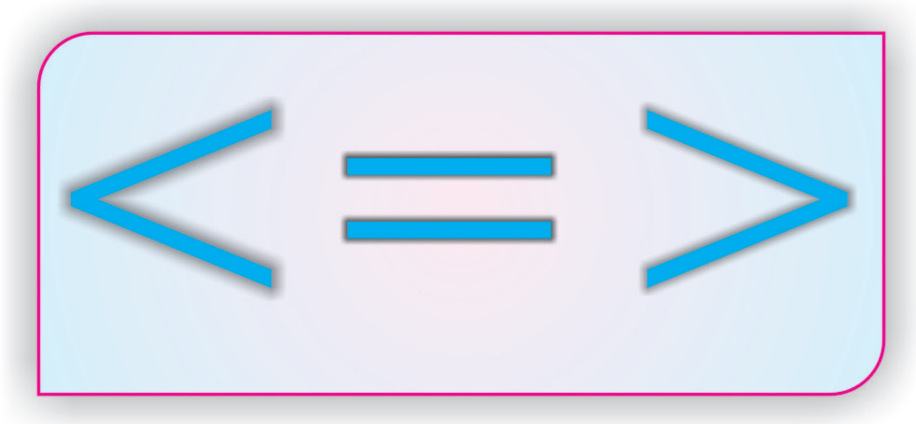
GUÍA 3

LAS INECUACIONES
¿PARA QUÉ SIRVEN ESTOS SÍMBOLOS DE RELACIÓN?



INDICADORES DE LOGROS

- Define la desigualdad y establece sus propiedades.
- Aplica correctamente las propiedades de las desigualdades para resolver inecuaciones lineales con una variable, interpreta gráficamente la solución y la expresa en forma de intervalo.
- Resuelve con propiedad inecuaciones con una variable de grado superior a 1, interpreta gráficamente la solución y la expresa en forma de intervalo.
- Define el valor absoluto de una variable, establece sus propiedades y las aplica para resolver ecuaciones e inecuaciones que contienen valor absoluto.
- Demuestra interés por actualizar su información de manera constante. (GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN).
- Identifica la información requerida para ampliar su conocimiento de una situación o problema.
- Ubica las distintas fuentes de información disponibles.
- Recoge organizadamente la información.
- Analiza la información recolectada.
- Utiliza la información para tomar decisiones y emprender acciones.
- Reconoce la información resultante de la experiencia de otros.
- Organiza y archiva la información recolectada.

En esta unidad, nos adentraremos también en la competencia laboral general **Gestión de la Información** que se define como "la capacidad de recolectar información pertinente con el fin de procesarla, interpretarla y utilizarla para resolver situaciones".

En el mundo actual es cada vez mayor el flujo de información y de allí la necesidad de establecer nuevos canales de comunicación y aprendizaje que faciliten el acceso a la información disponible y permitan una mejor apropiación de la misma.

Estemos, pues, pendientes de las sugerencias y actividades propuestas en la guía y que se refieren a esta competencia.

A

Para adentrarse en el estudio de los conceptos escritos en la guía, es preciso revisar y afianzar algunos elementos ya vistos. Por tanto desarrollamos las cuestiones que se plantean.

Antes de iniciar se debe nombrar un coordinador de mesa que se encargará de:

- Moderar el uso de la palabra.
- Hacer que todos los integrantes participen en las discusiones, aportando ideas.
- Dirigir el trabajo, leyendo y ejecutando las instrucciones.
- Asesorar la elaboración y presentación adecuada de las conclusiones como una forma de organizar información.

1. Resolver en el cuaderno los siguientes ejercicios:
1. Factorizar:
   a) $X^2 - Y^2$
   b) $9a^2 - 4b^2$
   c) $ax + ay$

d) $4a^2b + 2ab - 6ab^2$

e) $x^2 + 2x - 3$

f) $2x^2 + 5x - 3$

2. Resolver las ecuaciones lineales:

a) $3x - 6 = 2x + 1$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$

Comparemos y discutamos las soluciones que encontramos entre los diferentes subgrupos, nos ponemos de acuerdo y presentamos las inquietudes al profesor con el fin de aprovechar la información que aportaron otros, con su experiencia.

Si se requiere, repasamos factorización y ecuaciones, acudiendo a cualquier fuente que ofrezca la información que necesitamos.

Hemos ubicado números reales en la recta numérica y hemos operado con intervalos como $a<b<c$ (se lee “b mayor que a y b menor que c”). Haremos ahora un estudio más exhaustivo de los símbolos de relación “<” y “>”.

B

Leo, analizo y me apropio de los conceptos que aparecen abajo. Así mismo consigno en mi cuaderno los elementos que aparecen en el recuadro verde. Si lo requiero copio también los ejemplos.

Podemos comprobar que, geométricamente, un número real **“a”** es mayor que otro real **“b”** si en la recta real el punto asociado a **“a”** está a la derecha del punto asociado a **“b”**. Algebraicamente, **“a”** es mayor que **“b”** siempre y cuando la diferencia entre **“a”** y **“b”** sea un número real positivo, lo que se expresa simbólicamente así:

$$a>b \Leftrightarrow (a-b) \in R^+$$

Por ejemplo: 7 > 3 porque 7 - 3 = 4 que es un real positivo.
-5 > -8 porque -5 - (-8) = -5 + 8 = 3 que es un real positivo

Expresiones como las planteadas en los dos ejemplos se llaman DESIGUALDADES.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

$a > b \Leftrightarrow b < a$ (propiedad antisimétrica)

Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c, \forall c \in R$ (propiedad monotónica de la suma)

Si $a > b \Rightarrow a * c > b * c, \forall c \in R^{+}$(propiedad monotónica del producto)

Si $a > b \Rightarrow a * c < b * c, \forall c \in R^{-}$(propiedad antimonotónica del producto)

INECUACIONES

Se llama **INECUACIÓN** a una desigualdad en la que hay por lo menos una variable.
Por ejemplo: $x + 2 > 3$; $X^2 > -4$; $X^2 + Y^2 \leq 16$

RESOLVER una inecuación es calcular el intervalo dentro del cual la variable toma valores que la satisfacen. Así, el conjunto solución de $x + 2 > 5$ es $]1,\infty[$ y el de $X^2 > -4$ es el conjunto de los reales.

¿Por qué? Compare su respuesta con las de otros compañeros.

Para resolver inecuaciones lineales basta aplicar las propiedades de las desigualdades que son muy similares a las de las igualdades en la solución de ecuaciones, pero cuidándose de usar correctamente la propiedad antimonotónica. Por ejemplo, hallar el conjunto solución $x + 2 < 7$. Si se suma -2 a los dos miembros, resulta $x + 2 - 2 < 5 - 2$ (monotónica de la suma). Luego, $x < 3$ y entonces el conjunto solución es $]-\infty, 3[$, lo que significa que cualquier valor de x que le pertenezca al intervalo satisface la inecuación.

Otro ejemplo: resolver la inecuación $3 - 2x > x + 9$. Si sumamos a los dos lados -3 -x, queda: $3 - 2x -3 -x > x + 9 -3 -x$ (Propiedad monotónica de la suma). O sea $-3x > 6$. Si multiplicamos los dos miembros por -1, resulta $3x < -6$ (propiedad antimonotónica del producto). Luego $x < -2$. Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $]-\infty,-2[$ y significa que cualquier valor de x que le pertenezca al intervalo, satisface la inecuación.

Otro ejemplo: resolver la inecuación $-10 \leq 2x -4 \leq 2$. Como aparece una doble inecuación, pues se lee del centro hacia los lados, trasladamos el -4, tanto a la izquierda como a la derecha (pasa positivo) $-10 + 4 \leq 2x \leq 2 + 4 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$. Luego la solución es el intervalo $[-3,3]$.

Inecuaciones de grado superior a uno

La solución de inecuaciones de grado superior a 1 se realiza efectuando una transformación de la inecuación en otra equivalente que sólo contenga factores lineales variables que deben compararse con cero.

Por ejemplo, hallemos el conjunto solución de $X^2 < 6 - X$

$X^2 + X - 6 < 0$ (comparando con 0)

$(x + 3)(x - 2) < 0$ (Transformamos a factores lineales)

Como cada factor variable puede ser positivo o negativo, el producto será negativo (menor que 0) cuando los factores tengan signos contrarios, es decir, existen dos posibilidades:

a) El producto es negativo cuando $x + 3 > 0$ y $x - 2 < 0$; ó

b) El producto es negativo cuando $x + 3 < 0$ y $x - 2 > 0$;

Si se resuelven las inecuaciones de la primera posibilidad y hallamos su intersección (observe que el conectivo utilizado es y, que es equivalente a la intersección entre conjuntos), encontramos una solución parcial S1.

Si se resuelven las inecuaciones de la segunda posibilidad y calculamos su intersección, hallaremos otra solución parcial S2.

Debido al conector ó que liga las dos posibilidades, la solución general S es la UNIÓN de las de las dos soluciones parciales. O sea:

a) $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \wedge x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$, cuya intersección es $S1 =]-3,2[$

b) $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3 \wedge x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$, cuya intersección es $S2 = \{ \}$

Finalmente, $S = S1 \cup S2 =]-3,2[\cup \{ \} =]-3,2[$ que es la solución, como puede comprobarse tomando algunos valores que estén en el intervalo solución y reemplazarlos en la inecuación original.

Método alternativo: se expresa la inecuación como un producto de factores lineales que se comparan con cero, igual que en el primer método. Se toman las dos opciones de ser positivo o negativo que tiene cada factor lineal variable, se resuelven las inecuaciones resultantes y se traslada el resultado al eje real, para finalmente determinar los signos del producto en los diversos intervalos en que queda dividido el eje real, así:

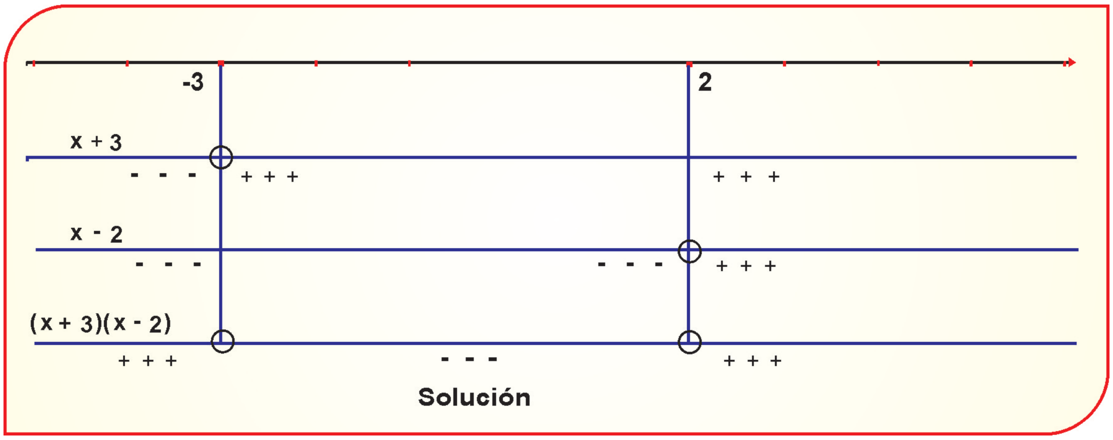
$X^2 + X - 6 < 0$

$(x + 3)(x - 2) < 0$ (Condición: el producto debe de ser negativo)

Para $x + 3$; $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$
$X + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$

Para $x - 2$; $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
$X - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

Para interpretar geométricamente los resultados, trazamos un eje real y ubicamos los valores de x que anulan cada factor: -3 y 2. Por dichos puntos bajamos verticales al eje para visualizar los intervalos en que queda dividido. Luego se trazan paralelas al eje, una por cada factor y otra por el producto; se escriben los signos que toma cada factor en los diversos intervalos; por último se determinan los signos del producto y se seleccionan los intervalos que cumplan con la condición establecida:



Observe que el factor X + 3 es positivo (tiene signo +) cuando x sea mayor que -3 (a la derecha de -3); el mismo factor x + 3 es negativo (tiene signo -) cuando x sea menor que -3.

De modo similar, el factor x - 2 es positivo cuando x sea mayor que 2 y es negativo cuando x sea menor que 2.

Para el signo del producto basta multiplicar los signos de los factores en los diversos intervalos. Como la condición es que el producto sea negativo, sólo se cumple en el intervalo]-3,2[que es la solución.

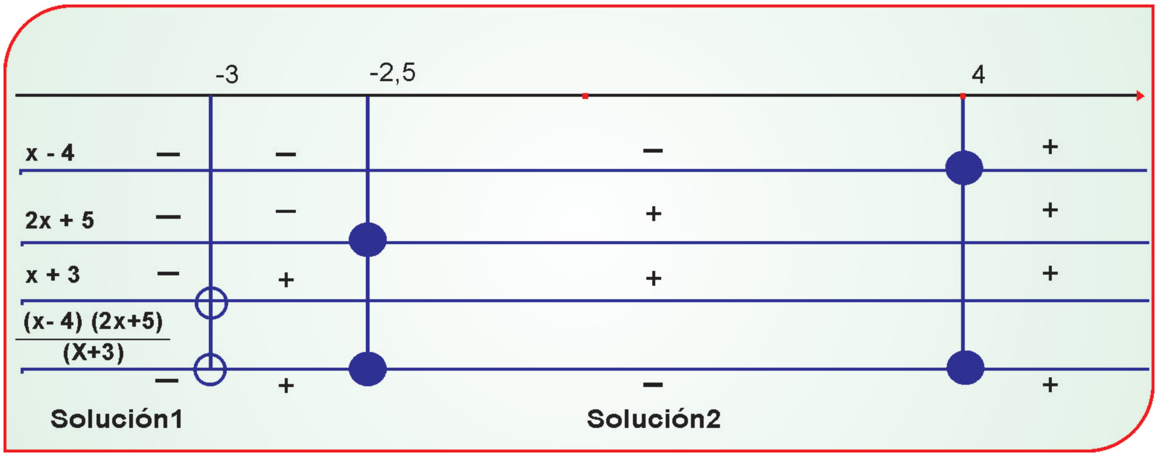
Resolver la inecuación $\frac{2x^2 - 3x - 20}{x+3} \leq 0$. Si se factoriza el numerador, queda: $\frac{(x - 4)\ (2x + 5)}{x+3} \leq 0$. Si planteamos las posibilidades para los tres factores, se tiene:

$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $x - 4 < 0 \Rightarrow x > 4$

$2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$; $2x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$

$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$; $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$

Si se trasladan estos resultados al eje real, resulta: $X - 4 \geq 0$



x - 4 es positivo cuando x sea mayor ó igual que -4 y x - 4 es negativo cuando x sea menor que 4.

2x + 5 es positivo cuando x sea mayor ó igual que - 2.5 y 2x + 5 es negativo cuando x sea menor que -2.5.

x + 3 es positivo cuando x sea mayor que -3 (note que x no puede ser igual a - 3, porque el denominador sería igual a 0 y esta operación no está definida en matemáticas) y x + 3 es negativo cuando x sea menor que -3.

Para calcular el signo de la operación $\frac{(x - 4)\ (2x + 5)}{x+3} \leq 0$, basta multiplicar los signos de los factores en los diversos intervalos, y como la condición es que el cociente sea "negativo" (menor o igual que cero), hay dos intervalos que la cumplen. Luego, la solución es $]-\infty, -3[\cup \left[-\frac{5}{2}, 4\right]$, como se puede comprobar tomando algunos valores de x que le pertenezcan a esos intervalos.

Valor absoluto: el valor absoluto de un número real es el módulo del real, pero tomado siempre positivo. El valor absoluto se indica escribiendo el real entre dos barras, así:

$$|+5| = 5; |-5| = 5; |\pm 3.8| = 3.8$$

Como se ve, existen siempre dos números reales que son iguales en valor absoluto: son los opuestos.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO:

$|V| = K \Leftrightarrow -\pm V = K \Leftrightarrow V = -K \vee V = K$

$|V| < K \Leftrightarrow -K < V < k$

$|V| > K \Leftrightarrow V < -K \vee V > K$

Usemos las propiedades para hallar el conjunto solución de:

$|2x - 3| = 7 \Leftrightarrow 2x - 3 = \pm 7 \Rightarrow 2x = 3 \pm 7 \Rightarrow x = 5$ ó $x = -2$. Luego el conjunto solución es $S = \{-2, 5\}$

$|2x - 3| < 7 \Leftrightarrow -7 < 2x - 3 < 7 \Rightarrow -7+3<2x<7+3 \Rightarrow -4<2x<10 \Rightarrow -2 < x < 5$. Luego el conjunto solución es $S = \{]-2,5[\}$.

$|2x - 3| > 7 \Leftrightarrow 2x-3 < -7$ ó $2x-3 > 7 \Rightarrow 2x < -4$ ó $2x > 10 \Rightarrow x < -2$ ó $x > 5$.

Luego el conjunto solución es $S = \{]-\infty, -2[\cup]5,\infty[\}$

A continuación escribo y resuelvo en mi cuaderno los siguientes ejercicios. Me apoyo en los ejemplos resueltos, en los apuntes y en los conceptos de mis compañeros. Comparo las soluciones con las halladas por otros miembros del subgrupo. Estructuro un informe y lo comparto con mi profesor.

1. Clasifico los siguientes números, partiendo del conjunto más reducido al más amplio:

5 es ______________________________

$-\frac{3}{2}$ es ______________________________

$\sqrt{8}$ es ______________________________

$3\sqrt{-27}$ es ______________________________

3.81717... es ______________________________

2. Digo si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifico mis respuestas:

- Todo natural es entero
- Todo real es racional
- Algunos reales son irracionales
- En los reales se pueden realizar todas las operaciones de la aritmética
- Cualquier subconjunto de los reales es un intervalo
- $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$ son racionales
- Cualquier real se puede expresar como un desarrollo decimal

3. Resuelvo las siguientes inecuaciones y represento en la recta real el conjunto solución:

- $x - 5 > 0$
- $2x < 10$
- $3 - x > 16$
- $-3x > -15$
- $2x - 3 > 5$
- $2x + 5 > 3x - 8$

Para desarrollar los ejercicios 4, 5 y 6 se sugiere hacer un análisis de los métodos para resolver inecuaciones no lineales, propuestos en B, de tal modo que permita seleccionar el más práctico, mostrando su habilidad para gestionar.

4. Resuelvo las siguientes inecuaciones que contiene productos y cocientes, usando paralelas al eje real y doy las respuestas en intervalos:

$(x - 3)(x - 1) < 0$

$\frac{x-3}{x-1} < 0$ (¡cuidado! el denominador no puede ser cero)

$(X^2 + 4)(x - 5) > 0$

$(x^2 + 1)(x + 4) < 0$ (ver que el primer factor se puede suprimir por ser siempre positivo).

5. Resuelvo las siguientes inecuaciones dobles y doy la respuesta en intervalos:

$0 \leq 4x - 1 < 3$

$-3 < 3x + 4 \leq 6$

6. Resuelvo las inecuaciones no lineales usando las paralelas al eje real y doy la respuesta en intervalos.

$x^2 + 2x < 8$

$\dfrac{3x - 8}{2x + 3} < 4$

$x^2 \geq 3x + 28$

$2x^3 - 4x^2 < 48x$

7. Calculo:

$|8 - 12| =$

$|-7 - 7| =$

$||-5| - |3|| =$

$||-8| - 9| =$

8. Escribo sin el símbolo de valor absoluto y calculo el conjunto solución en:

$|x - 2| \leq 5$

$|1 - x| = 2$

$|7x - 15| = -4$

$|5 - 2x| \geq 3$

$|x - 6| < 4$

D

El éxito en el proceso de aprendizaje se da, en la medida en que se alcancen los logros propuestos. Si he desarrollado las guías de la manera sugerida, podré aplicar mis conocimientos en la solución de situaciones que frecuentemente se nos presentan, pues debo tener en cuenta que seré yo mismo el primer beneficiado. Si tengo dificultades, trataré de superarlas apoyándome en los recursos de que dispongo.

a. Escribo la desigualdad correspondiente entre:

- Mi edad y la de mi padre.
- Mi edad y la de mi compañero.

b. ¿Qué signo pondría entre el área del recinto de mi casa y el de mi colegio?

c. Expreso algebraicamente todos los números mayores que 3 y los represento en la recta real.

d. Expreso los números mayores que 3, pero que no sobrepasen a 7 y los represento en la recta numérica.

e. En una familia de tres hijos, el padre da dinero a los hijos según su edad. Al mayor le da $2000 y al menor $500. Si Pablo es el mediano, ¿qué puedo decir del dinero que recibe?

f. Elaboro una inecuación en la que estén incluidas las edades de todos los compañeros de mi grupo. ¿Qué información debo recolectar?

g. Dados los intervalos AB cuyos extremos son -8 y 2, abierto y CD cuyos extremos son -1 y 6, cerrado, los represento geométricamente en el mismo eje real y luego:

- Expreso cada intervalo en notación de intervalos.
- Expreso cada intervalo en notación de conjuntos.
- Calculo su unión y doy la respuesta en las dos nomenclaturas.
- Calculo su intersección y doy la respuesta en las dos nomenclaturas.

h. En la siguiente demostración determino en dónde está el error que permite llegar a un absurdo.

$a = b$

$a^2 = ab$

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

$(a + b)(a - b) = b(a - b)$

$a + b = b$

$2b = 1b$

$2 = 1$

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA