GUÍA 2

Y ¿QUÉ ES LA DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES?

Mediante el cálculo diferencial, los científicos de la Nasa pueden determinar la velocidad a la que se desplaza el transbordador Atlantis en cualquier instante, mediante la aplicación de la derivada de una función.

INDICADORES DE LOGROS:

- Establece las fórmulas para derivar las funciones algebraicas, las identifica y las usa con solvencia.
- Identifica las funciones implícitas y les calcula la derivada.
- Reconoce las características personales y grupales del liderazgo (LIDERAZGO).
- Reconoce las necesidades, talentos y conocimientos de los integrantes del grupo.
- Genera confianza, credibilidad y respeto frente al grupo.
- Se adapta fácilmente a las condiciones del entorno en el cual interactúa.
- Genera visión compartida entre los integrantes del grupo.
- Es capaz de redefinir tareas y metas comunes de acuerdo a los intereses colectivos y las circunstancias en las cuales se encuentre el grupo.
- Aporta sus habilidades y capacidades para facilitar la solución de problemas de manera asertiva.

Con los compañeros leemos y analizamos el siguiente contenido:

Además del manejo de fórmulas para la diferenciación de funciones que vamos a desarrollar en esta guía, también trataremos la competencia laboral general. **Liderazgo**, que está relacionada con "la capacidad que las personas tienen para dinamizar y potenciar los conocimientos, habilidades, talentos y destrezas de los miembros de un grupo, para facilitar el trabajo colectivo de acuerdo a sus intereses, necesidades y metas comunes de desarrollo". (tomado del PROYECTO: "EDUCACIÓN MEDIA, CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO").

Como se ve, no se trata de que una sola persona lidere las actividades del subgrupo sino que todos se deben apersonar y pensar "qué tanto se logra hacer con el trabajo y no qué tan duro se trabaja".

El liderazgo permite que todos los miembros avancen con un ritmo satisfactorio.
En un sentido más personal, con el liderazgo se busca promover en los grupos la capacidad de descubrir, fortalecer y potenciar las competencias, habilidades y destrezas que cada persona posee, ocultas o no, para ponerlas al servicio de un grupo, y con ello motivarla a hacer cosas que no había pensado eran posibles de realizar por su propia cuenta a favor de los intereses colectivos.

¿Qué retos importantes enfrentamos como grupo que demandan que ejerzamos liderazgo?
¿Qué capacidades o habilidades deberíamos desrrollar para llegar a ser líderes?

No sólo en el desarrollo de las actividades sino también en otras ocasiones hemos puesto a prueba la capacidad de liderazgo.

A

Sea $F(x) = 3X^2 - 2X + 4$ Con los compañeros del subgrupo calculamos la derivada de la función "Y" con respecto de la variable independiente "X" usando la definición vista en la guía anterior.

Trabajemos, pues, en subgrupo atendiendo a los conceptos del liderazgo, tales como: reconocimiento de necesidades y talentos de los integrantes; la definición de las tareas y metas que debe alcanzar el grupo en esta guía.

Para ello leemos, analizamos y consignamos en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde. Si es preciso, volvemos a resolver los ejemplos hasta comprender y apropiarnos del proceso.

El cálculo de la derivada de una función usando la definición es bastante largo y por esta razón se han ideado fórmulas que permiten abreviar considerablemente su búsqueda.

FÓRMULAS PARA DERIVAR LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS

1. Si Y = C entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{dC}{dx} = 0$, que se enuncia: "La derivada de una constante con respecto a una variable es igual a cero").

2. Si Y = V entonces $\frac{dY}{dV} = \frac{dV}{dV} = 1$, que se enuncia: "La derivada de una variable con respecto a sí misma es igual a uno".

3. Si Y = CV entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d(CV)}{dx} = C\frac{dV}{dx}$, que se enuncia: "La derivada de una constante por una variable es igual a la constante por la derivada de la variable".

4. Si $Y = S_1 + S_2$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d(S_1 + S_2)}{dx} = \frac{d\,S_1}{dx} + \frac{d\,S_2}{dx}$, que se enuncia: "La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas de los sumandos".

5. Si $Y = P^n$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{dP^n}{dx} = nP^{n-1}\frac{dP}{dx}$, que se enuncia: "La derivada de una potencia es igual al exponente, por la base con el exponente disminuido en uno y por la derivada de la base".

6. Si Y = P*S entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d(P * S)}{dx} = P\frac{dS}{dx} + S\frac{dP}{dx}$, que se enuncia:

"La derivada de un producto de dos factores variables es igual al primer factor por la derivada del segundo, mas el segundo factor por la derivada del primero".

7. Si Y = $\frac{N}{D}$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d\frac{N}{D}}{dx} = \frac{D\frac{dN}{dx} - N\frac{dD}{dx}}{D^2}$, que se enuncia:

"La derivada de un cociente entre dos variables es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador y esta diferencia entre el cuadrado del denominador".

Estas fórmulas se pueden deducir usando la definición de derivada de una función, como se procedió en los ejemplos resueltos antes.

Es muy importante memorizar, identificar y usar adecuadamente las fórmulas para derivar las funciones algebraicas, pues el resto del programa de cálculo se fundamenta en ellas.

En los siguientes ejemplos, se muestra cómo deben manejarse las fórmulas para resolver paso a paso cada ejercicio. Por tanto, de manera concienzuda, todos los integrantes del subgrupo deberán tratar de interiorizar las justificaciones que se dan, esforzándose por identificar, comprender y aplicar las fórmulas que permiten calcular las derivadas de las funciones que se plantean, tratando de aplicar dichas fórmulas de manera directa, sin necesidad de indicarlas. Como el liderazgo nos invita a que todo el grupo tenga éxito, quienes avancen más rápido pueden ayudar a quienes presentan dificultades en la comprensión del tema.

1. $Y = 4 + 2X - 3X^2 - 8X^3$

$\frac{dY}{dx} = \frac{d(4+2X - 3X^2 - 8X^3)}{dx}$ (Indicamos $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$\frac{dY}{dx} = \frac{d4}{dx} + \frac{d(2X)}{dx} - \frac{d(3X^2)}{dx} - \frac{d(8X^3)}{dx}$ (porque la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas de los sumandos)

$\frac{dY}{dx} = 0 + 2\frac{dX}{dx} - 3\frac{dX^2}{dx} - 8\frac{dX^3}{dx}$ (En el primer sumando se tiene la derivada de una constante que es igual a 0; en los otros tres sumando se ve la derivada de una constante por una variable, que igual a la constante por la derivada de la variable)

$$\frac{dY}{dx} = 2(1) - 3(2X^{2-1}\frac{dX}{dx}) - 8(3X^{3-1}\frac{dX}{dx})$$ (En el segundo sumando se tiene la derivada de una variable respecto de sí misma que es 1; en los otros dos sumandos aparece la derivada de una potencia que igual al exponente, por la base con su exponente disminuido en 1 y por la derivada de la base)

$$\frac{dY}{dx} = 2 - 6X - 24X^2$$ (Efectuando las operaciones se obtiene la respuesta, puesto que la derivada de una variable respecto de sí misma es 1)

En la práctica, el proceso se agiliza si antes de empezar se analiza la expresión para identificar que se trata de una suma, el primer sumando es una constante, los otros son constante por variable y en los dos últimos la variable es una potencia de base simple. Por tanto, las fórmulas se aplican de manera inmediata, así:

$Y' = 0 + 2(1) - 3(2X)(1) - 8(3X^2)(1)$ o sea $Y' = 2 - 6X - 24X^2$

2. $Y = \frac{1}{X} + \frac{3}{X^2} - \frac{2}{X^3}$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d(\frac{1}{X} + \frac{3}{X^2} - \frac{2}{X^3})}{dx}$$ (Indicando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d\frac{1}{X}}{dx} + \frac{d\frac{3}{X^2}}{dx} - \frac{d\frac{2}{X^3}}{dx}$$ (Porque al lado derecho hay una suma)

(En cada sumando aparece un cociente de una constante sobre una variable, situación que puede cambiarse a constante por variable pasando cada variable al numerador, cambiando el signo del exponente; con esta transformación evitamos usar la fórmula para derivar un cociente entre variables, que es bastante larga).

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d1X^{-1}}{dx} + \frac{d3X^{-2}}{dx} - \frac{d2X^{-3}}{dx}$$

$$\frac{dY}{dx} = 1X^{-2}\frac{dX}{dx} + 3(-2X^{-3}\frac{dX}{dx}) - 2(-3X^{-4}\frac{dX}{dx})$$ (En todos los sumandos hay constante por variable y la variable es una potencia).

$$\frac{dY}{dx} = -X^{-2}-6X^{-3}+6X^{-4}$$ (porque $\frac{dX}{dx}$ es igual a 1)

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{1}{X^2} - \frac{6}{X^3} + \frac{6}{X^4}$$ (Trasformando nuevamente los exponentes negativos)

$Y = \frac{1}{X} + \frac{3}{X^2} - \frac{2}{X^3}$ Para realizar el ejercicio más rápido, lo reescribimos sin los denominadores variables, así:

$Y = 1X^{-1} + 3X^{-2} - 2X^{-3}$. Se observa que a la derecha aparece una suma, cada sumando es constante por variable y cada variable es una potencia. Luego:

$$Y' = 1\,(-1X^{-2})\,((1) + 3(-2X^{-3})(1) - 2(-3X^{-4})(1)$$

Volviendo a escribir sin exponentes negativos, queda:

$Y' = -\frac{1}{X^2} - \frac{6}{X^3} + \frac{6}{X^4}$, resultado igual al obtenido antes.

3. $Y = (3 - X^2)^4$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d(3-X^2)^4}{dx}$$ (Tomando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$$\frac{dY}{dx} = 4(3 - X^2)^3\,\frac{d(3 - X^2)}{dx}$$ (Se trata de la derivada de una potencia que es igual al exponente, por la base con el exponente disminuido en 1 y por la derivada de la base).

$$\frac{dY}{dx} = 4(3 - X^2)^3\,(0 - 2X)$$ (La derivada indicada corresponde a una suma)

$$\frac{dY}{dx} = -8X\,(3 - X^2)^3$$ (Efectuando la multiplicación se obtiene la solución)

El resultado se obtiene más rápido observando que a la derecha aparece una potencia y aplicando la fórmula correspondiente, así:

$Y' = 4\,(3 - X^2)^3\,(-2X) = -8X(3 - X^2)^3$, resultado igual al anterior.

4. $Y = 2X^{\frac{1}{2}} + 6X^{\frac{1}{3}} - 2X^{\frac{3}{2}}$

$\dfrac{dY}{dx} = \dfrac{d(2X^{\frac{1}{2}} + 6X^{\frac{1}{3}} - 2X^{\frac{3}{2}}}{dx}$ (Aplicando $\dfrac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$\dfrac{dY}{dx} = 2\,\dfrac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} + 6\,\dfrac{dx^{\frac{1}{3}}}{dx} - 2\,\dfrac{dx^{\frac{3}{2}}}{dx}$ (Se trata de una suma y cada sumando es una constante por una variable)

$\dfrac{dY}{dx} = 2[\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}(1)]+6[\frac{1}{3}X^{-\frac{2}{3}}(1)]-2[\frac{3}{2}X^{\frac{1}{2}}(1)]$ (La variable es una potencia)

$\dfrac{dY}{dx} = \dfrac{1}{X^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2}{X^{\frac{2}{3}}} - 3X^{\frac{1}{2}}$ (Simplificando y escribiendo sin exponentes negativos)

5. $Y = \sqrt[3]{3X^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5X}}$

Como no estamos usando una fórmula para derivar un radical, se debe reescribir la expresión sin el símbolo de radical, pero sin alterarla:

$Y = (3X^2)^{\frac{1}{3}} - (5X)^{-\frac{1}{2}}$

$\dfrac{dY}{dx} = \frac{1}{3} + (3X^2)^{-\frac{2}{3}}\,\dfrac{d(3X^2)}{dx} - (-\frac{1}{2})\,(5X)^{-\frac{3}{2}}\,\dfrac{d5X}{dx}$ (Es una suma y cada sumando es una potencia)

$\dfrac{dY}{dx} = \frac{1}{3} + (3X^2)^{-\frac{2}{3}}(6X) - (-\frac{1}{2})(5X)^{-\frac{3}{2}}\,(5)$ (Derivando donde se pide)

$\dfrac{dY}{dx} = 2X\,(3X^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{2}\,(5X)^{-\frac{3}{2}}$, que puede tomarse como solución)

6. $Y = (X^2 + 4)\,(2X^3 - 1)^3$

$\dfrac{dY}{dx} = \dfrac{d\,(X^2 + 4)\,(2X^3 - 1)^3}{dx}$ (Indicando $\dfrac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$\frac{dY}{dx} = (X^2+4)\ \frac{d(2X^3 - 1)^3}{dx} + (2X^3-1)^3\ \frac{d(X^2 + 4)}{dx}$ (La derivada del producto de dos factores variables es igual al primer factor por la derivada del segundo, mas el segundo por la derivada del primero).

$\frac{dY}{dx} = (X^2+4)[3(2X^3- 1)^2]\ \frac{d(2X^3 - 1)}{dx} +(2X^3-1)^3 (2X + 0)$ (La derivada de una potencia en la primera y la derivada de una suma en la última)

$\frac{dY}{dx} = (X^2+4)\ [3(2X^3-1)^2]+(6X^2)+(2X^3 - 1)^3 (2X)$ (Derivando en donde se indica).

$\frac{dY}{dx} = 18X^2\ (X^2+4)\ (2X^3-1)^2+ 2X\ (2X^3-1)^3$ (Operando los monomios y escribiéndolos adelante).

7). $Y = \frac{3 - X^2}{1 - 2X}$

$\frac{dY}{dx} = \frac{d\frac{3 - X^2}{1 - 2X}}{dx}$ (Tomando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad).

$\frac{dY}{dx} = \frac{(1-2X)\frac{d(3-X^2)}{dx} - (3-X^2)\frac{d(1-2X)}{dx}}{(1-2X)^2}$ (La derivada del cociente entre dos variables es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, y esta diferencia dividida por el cuadrado del denominador).

$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-2X)(-2X)-(3-X^2)(-2)}{(1-2X)^2}$ (Derivando donde se indica)

$\frac{dy}{dx} = \frac{2(X^2- X + 3)}{(1-2X)^2}$ (Operando y reduciendo)

8. $X^2 + Y^2 = 3X - 4Y$

$\frac{d(X^2 + Y^2)}{dx} = \frac{d(3X - 4Y)}{dx}$ (Tomando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad).

$\frac{dX^2}{dx} + \frac{dY^2}{dx} = \frac{d3X}{dx} - \frac{d4Y}{dx}$ (Tanto a la izquierda como a la derecha de la igualdad aparece la derivada de una suma).

$2X\,\frac{dX}{dx} + 2Y\,\frac{dY}{dx} = 3\,\frac{dX}{dx} - 4\,\frac{dY}{dx}$ (A la izquierda aparece derivada de una potencia en los dos sumandos y a la derecha, derivada de una constante por una variable, también en los dos sumandos).

$2X + 2Y\,\frac{dY}{dx} = 3 - 4\,\frac{dY}{dx}$ (Porque $\frac{dX}{dx}$ es igual a 1).

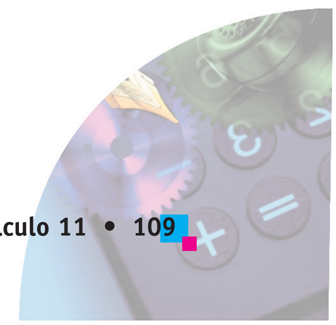
$2Y\,\frac{dY}{dx} + 4\,\frac{dY}{dx} = 3 - 2X$ (Reuniendo a la izquierda los términos que contienen $\frac{dY}{dx}$)

$\frac{dY}{dx}\,(2Y + 4) = 3 - 2X$ (Factorizando a la izquierda)

$\frac{dY}{dx} = \frac{3 - 2X}{2Y + 4}$ (Despejando $\frac{dY}{dx}$, resulta la derivada de la función)

Una expresión como la planteada en el ejemplo 8, se llama una relación implícita debido a que la "Y" no aparece despejada y para hallar la derivada es suficiente diferenciar a los dos lados de la igualdad, aplicar las fórmulas adecuadas y al final, por métodos algebraicos, despejar $\frac{dY}{dx}$.

Para resolver las siguientes actividades, vamos a actuar como un subgrupo líder a nivel del aula; para ello aprovechemos la habilidad de los que más saben, repartamos los trabajos y tareas entre todos para que cada uno de nosotros aporte lo que sabe; asumimos y cumplimos los compromisos que convengan al grupo.



Como se dijo antes, la derivación es un concepto que aparecerá frecuentemente en el curso de cálculo diferencial y por tanto es preciso afianzar muy bien la identificación, aplicación y manejo eficiente de las fórmulas vistas. En consecuencia, echando mano de los conceptos, fórmulas y ejercicios resueltos desarrollo lo siguiente (intento realizar los ejercicios aplicando las fórmulas de manera inmediata), comparto resultados con mis compañeros para determinar la capacidad de adaptación y de redefinición de tareas para la comprensión y solución de los ejercicios. Revisamos nuestros conocimientos con el profesor, en procura de detectar y corregir posibles fallas.

Mediante las fórmulas adecuadas, hallo $\frac{dY}{dx}$

a) $Y = 5X^3 - 3X^2 + 6X - 2$

b) $Y = (2 - 3X)^4$

c) $Y = \sqrt{X^2 - 6X + 3}$

d) $Y = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + X - 1$

e) $F(x) = X^{-2} + \frac{7}{X^3} + 4$

f) $Y = X^3(2 - 3X)^2$

g) $G(x) = \frac{2X + 1}{6 - X}$

h) $X + Y = X^2 - 3$

i) $Y^2 - 3X = X^2 + 4Y$

j) $X^2Y + 3 = 1 - XY^2$

En vista de la importancia que tiene la diferenciación de funciones en el cálculo infinitesimal, nuestro subgrupo, actuando como líder, propone ejercicios de diferenciación donde se deben aplicar las diferentes fórmulas para derivar las funciones algebraicas, tratamos de emularnos con el objetivo de dominar el tema y no por competir. Compartimos nuestra experiencia con el profesor.

Para aplicar las fórmulas de derivación de las funciones algebraicas a la vida cotidiana, debemos primero dar interpretación geométrica al concepto de derivada, tema que se tratará más adelante.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA