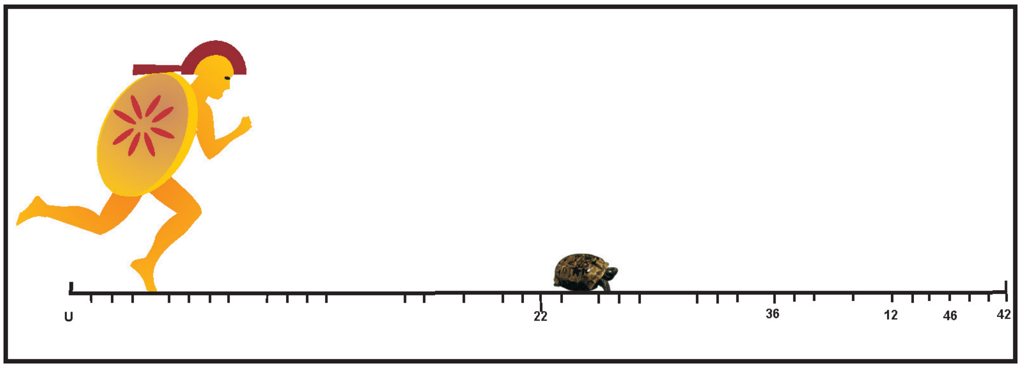
Guía 2

¿DÓNDE ESTÁN LAS BASES DEL CÁLCULO?



Argumento de Aquiles y la Tortuga

Según éste argumento, el más rápido de los hombres, Aquiles, no podrá alcanzar nunca al más lento de los animales, la tortuga, si se da a ésta una ventaja inicial en una carrera, pues mientras Aquiles recorre el camino que la tortuga llevaba por la mencionada ventaja inicial, la tortuga habrá recorrido otra porción, aunque más pequeña. Cuando Aquiles haya llegado a recorrer ésta última porción de camino, la tortuga habrá avanzado otra porción más pequeña, y así la tortuga llevará siempre la ventaja hasta en espacios infinitamente pequeños, con lo cual, Aquiles no podrá alcanzarla nunca.

INDICADORES DE LOGROS:

- Define una sucesión numérica, calcula el elemento a_n y la clasifica correctamente
- Establece el concepto de límite con sus propiedades.
- Maneja adecuadamente las propiedades de los límites y las aplica a sucesiones y funciones reales para calcularles el límite (cuando exista).
- Identifica la diferencia entre trabajo en grupo y trabajo en equipo. (TRABAJO EN EQUIPO).
- Demuestra una actitud abierta, propositiva y proactiva frente al trabajo en grupo.
- Comparte la información y la experiencia con los demás
- Concierta con el grupo los objetivos y métodos de trabajo.
- Asume roles, responsabilidades y compromisos acordes a sus capacidades y las necesidades del grupo.
- Evalúa colectivamente, de manera crítica y reflexiva los resultados alcanzados por el grupo.
- Coopera con los otros, para lograr los resultados esperados por el grupo.

Los conceptos que encontramos a continuación son de gran utilidad en el desempeño de nuestro trabajo. Leámoslos y comentémoslos con mucho interés.

En esta guía trataremos la competencia laboral general **Trabajo en Equipo** cuya definición es un poco compleja porque se suele confundir trabajo en grupo con trabajo en equipo.

UN GRUPO lo podemos considerar como un conjunto de personas que tienen un propósito común, que no tiene necesariamente funciones individuales y específicas definidas, ni estrategias o procedimientos establecidos, el accionar del grupo, no necesariamente corresponde al objeto de la totalidad de sus participantes, lo cual genera que algunos integrantes no asuman sus responsabilidades y simplemente se dediquen a "chupar rueda" como coloquialmente decimos (los integrantes que sólo aspiran a que su nombre figure como integrante del grupo para beneficiarse del trabajo de los otros).

UN EQUIPO, se entiende como un conjunto de personas que se encuentran reunidas en torno a un propósito común, que comparten una serie de valores, procesos de organización, comunicación y estrategias para adelantar procesos o lograr compromisos con el equipo; todos los integrantes trabajan por el equipo.

En la naturaleza, tenemos ejemplos de trabajo en equipo como en un hormiguero o una colmena, en donde cada miembro aporta y se beneficia; las "mingas" de las comunidades indígenas en nuestro medio son otro ejemplo del beneficio que conlleva el trabajo en equipo.

Esta competencia facilita el aprendizaje del trabajo en grupo, a partir de modelos de cooperación, mejora las dinámicas de trabajo colectivo, se potencia la generación de alternativas de trabajo grupal, a partir de los conocimientos, habilidades, destrezas y talentos de todo el equipo, se generan procesos de aprendizaje relacionados con la corresponsabilidad frente a las funciones, tareas y resultados esperados, se construye un conocimiento de grupo que permite la evaluación crítica y reflexiva de los resultados obtenidos, se facilita la solución de problemas, aplicando ideas creativas e innovadoras, se mejoran la planeación, ejecución y evaluación de los procesos planteados por el equipo.

Cuando se trabaja en equipo, todos los integrantes del grupo aportan y se responsabilizan, en procura de que los asociados alcancen los logros propuestos.

Estemos, pues, atentos a las sugerencias y actividades propuestas en la guía y que se refieren a esta competencia.

A

Con mis compañeros de subgrupo leemos, analizamos y revisamos nuestros conocimientos en matemáticas, procurando que todos participen. Si es necesario repasamos los temas que debamos afianzar.

Sean las secuencias:
3, 7, 11, 15,... 30, 27, 24, 21,... 2, 6, 18, 54,... 60, 30, 15, 7.5,...
Agregamos dos elementos a cada secuencia y determinamos la regla general que permite obtener cada una de ellas. Escribimos otros ejemplos similares a éste y los discutimos.

Con seguridad, reconocieron en los ejemplos anteriores dos progresiones aritméticas y dos geométricas. Son casos especiales del tema que nos ocupará a continuación, que es fundamental para el estudio del cálculo infinitesimal.

¿La actividad anterior fue realizada en grupo o en equipo? ¿Por qué?

B

La siguiente información contiene los elementos fundamentales para encarar el estudio del cálculo infinitesimal, por tanto es necesario que compartamos y discutamos con los compañeros de subgrupo, intentando comprender e interiorizar los conceptos para aplicarlos a la solución de los ejercicios propuestos.

Leemos, analizamos y consignamos en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde

Consideremos las siguientes relaciones definidas por comprensión en: $\mathrm{N} \Rightarrow \Re$

$S_0 = \{(n, S_{(n)}) / S_{(n)} = n + 1\}$ (Se lee "S subcero es el conjunto conformado por los pares n, S sub-ene- tales que S sub-ene- es igual a n mas uno").

$$S_1 =\{(n,S_{(n)}) \ / \ S_{(n)}=\frac{n-1}{n+2}\}$$

$$S_2 =\{(n,S_{(n)}) \ / \ S_{(n)}= 5-n^2\}$$

$$S_3 =\{(n,S_{(n)}) \ / \ S_{(n)}=\frac{3n^2}{n^2+4}\}$$

$$S_4 =\{(n,S_{(n)}) \ / \ S_{(n)}=\frac{2}{n}\}$$

$$S_5 =\{(n,S_{(n)}) \ / \ S_{(n)}= (-1)^n(n^2+ 1)\}$$

$$S_6 =\{(n,S_{(n)}) \ / \ S_{(n)}= 2(-1)^{n-1}\}$$

Aunque las relaciones anteriores no se pueden describir completamente por extensión sí podemos calcular algunos de los primeros elementos, así:

$$S_0 =\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\ldots(n,n + 1)\}$$

$$S_1 =\{(1,0),(2,\frac{1}{3}),(3,\frac{2}{5}),(4,\frac{1}{2}),\ldots(n,\frac{n-1}{n+2})\}$$

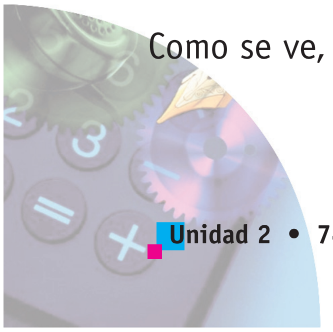
$$S_2 =\{(1,4),(2,1),(3,-4),(4,-11),\ldots(n,5 - n^2)\}$$

$$S_3 =\{(1,\frac{3}{5}),(2,\frac{3}{2}),(3,\frac{27}{13}),(4,\frac{12}{5}),\ldots(n,\frac{3n^2}{n^2+4})\}$$

$$S_4 =\{(1,2),(2,1),(3,\frac{2}{3}),(4,\frac{1}{2}),\ldots(n,\frac{2}{n})\}$$

$$S_5 =\{(1,-2),(2,5),(3,-10),(4,17),\ldots(n,(-1)^n(n^2+1)\}$$

$$S_6 =\{(1,2,(2,-2),(3,2),(4,-2),\ldots(n,(-1)^{n-1})\}$$



Como se ve, a cada natural se le asocia un solo real, es decir, son funciones.

DEFINICIÓN: una sucesión numérica es una función que tiene por dominio los naturales y por rango un subconjunto de los reales.

NOMENCLATURA: como en toda sucesión las primeras componentes son los naturales, para describir la sucesión es suficiente nombrar las segundas componentes, o sea: $S_n = a_1, a_2, a_3, a_{4,}, \ldots a_n$, siendo a el término y n la posición que ocupa en la sucesión. Por ejemplo:

$S_0 = \{2,3,4,5 \ldots n+1\}$

$S_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}), \ldots \frac{n-1}{n+2}\}$

$S_2 = \{4,1,-4,-11, \ldots 5-n^2\}$

$S_3 = \{\frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{27}{13}, \frac{12}{5}, \ldots \frac{3n^2}{n^2+4}\}$

$S_4 = \{2,1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \ldots \frac{2}{n}\}$

$S_5 = \{-2,5,-10,17, \ldots (-1)^n (n^2+1)\}$

$S_6 = \{2,-2,2,-2, \ldots (-1)^{n-1})\}$

CLASES DE SUCESIONES

a) Crecientes: si cualquier término es mayor que el anterior.

b) Decrecientes: si cualquier término es menor que el anterior.

c) Alternantes: si es creciente para ciertos términos y decreciente para otros.

d) Convergentes: si el término enésimo tiende a un solo valor finito, cuando n tiende al infinito natural.

e) Divergentes: si el término enésimo tiende a uno de los infinitos reales, cuando n tiende al infinito natural.

f) Oscilantes: cuando el término enésimo tiende a más de un valor finito o a los dos infinitos reales, cuando n tiende a infinito natural.

En los ejemplos anteriores, mirando primero los términos dados y luego asignando a n valores grandes como 10^2, 10^3, 10^6 etc., se puede comprobar que:

- S_0 es creciente y divergente.
- S_1 es creciente y convergente.
- S_2 es decreciente y divergente.
- S_3 es creciente y convergente.
- S_4 es decreciente y convergente.
- S_5 es alternante y oscilante.
- S_6 es alternante y oscilante.

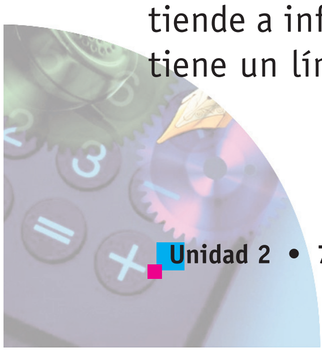
En efecto: En S_1, por ejemplo, $a_{100} =$; $\frac{100 - 1}{100 + 2} = \frac{99}{102} = 0.97$

$a_{1000} = \frac{1000 - 1}{1000 + 2} = \frac{999}{1002} = 0.997$; $a_{1000000} = \frac{1000000 - 1}{1000000 + 2} = \frac{999999}{1000002} = 0.99999$. Se ve que entre más grande sea el valor de n, el cociente se aproximará tanto a 1 como se desee y la sucesión converge a 1. También se evidencia que para valores grande de n, los valores "1" del numerador y "2" del denominador se pueden suprimir (es algo así como a una playa de arena quitarle 1 o 2 granos) sin cometer error.

Si calculamos términos similares en S_2, resulta:
$a_{100} = 5 - 100^2 = 5 - 10000 = -9995$; $a_{1000} = 5 - 1000^2 = 5 - 1000000 = -999995$.
Aquí, entre más grande sea el valor de n, tanto más alejado a la izquierda de 0 es el valor del término y la sucesión diverge a $-\infty$.

EL CONCEPTO INTUITIVO DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN NUMÉRICA

Se ha visto que existen sucesiones que tienden a un solo valor finito, cuando n tiende a infinito natural, y son convergentes. En lo sucesivo se dirá que la sucesión tiene un límite.



El concepto de límite ha sido de enorme utilidad en el desarrollo de las matemáticas; en él se fundamenta el cálculo infinitesimal, así llamado por utilizar cantidades infinitesimales (infinitamente pequeñas).

Aunque muchos matemáticos utilizaron la idea intuitiva de límite, fue el matemático francés Agustín Cauchy (1789-1857) quien a principios del siglo XIX, dio una definición satisfactoria de límite.

DEFINICIÓN: si una sucesión converge a un valor K, el límite de la sucesión es K siempre y cuando el valor absoluto de la diferencia entre el enésimo término de la sucesión y K sea un número real positivo muy próximo a cero, o sea:

$\lim_{n \to \infty} S(n) = K \Leftrightarrow |S(n) - K| < r$, siendo r un real positivo muy próximo a 0.

Propiedades de los límites

1) $\lim_{n \to \infty} C = C$, C es constante (El límite de una constante es la constante).

2) $\lim_{n \to \infty} C * S(n) = C * \lim_{n \to \infty} S(n)$ (El límite de una constante por una sucesión es igual a la constante por el límite de la sucesión).

3) $\lim_{n \to \infty} \frac{C}{n} = 0$ (El límite de una constante sobre una variable que tiende al infinito es igual a 0).

4) $\lim_{n \to \infty} [S(n) + S1(n)] = \lim_{n \to \infty} S(n) + \lim_{n \to \infty} S1(n)$

(El límite de una suma de sucesiones es igual a la sumas de los límites de los sumandos). La propiedad también se aplica para la resta que es la inversa de la suma.

5) $\lim_{n \to \infty} [S(n) * S1(n)] = \lim_{n \to \infty} S(n) * \lim_{n \to \infty} S1(n)$

(El límite de un producto de sucesiones es igual al producto de los límites de los factores). Vale también para el cociente que es la inversa del producto.

$$6)\quad \lim_{n \to \infty} b^n = \begin{cases} 1, \text{ si } b = 1 \\ 0, \text{ si } |b| < 1 \\ \infty \text{ si, } b > 1 \end{cases}$$

(El límite de una potencia de exponente variable y que tiende al infinito es igual a 1, si la base es 1; es igual a 0, si la base en valor absoluto es menor que 1; es infinito si la base es mayor que 1).

Como aplicación a las propiedades calculemos:

$$\lim_{n \to \infty} [2 -(1)^n]$$

Solución: Como la operación general es una suma, tomamos el límite de cada sumando (propiedad 4): $\lim_{n \to \infty} 2 = 2$ (el límite de una constante es igual a la constante (propiedad 1). Y $\lim_{n \to \infty} (1)^n = 1$ (Propiedad 6:el límite de una potencia cuando la base es 1 y el exponente tiende a ∞ es 1), o sea:

$$\lim_{n \to \infty} [2 -(1)^n] = \lim_{n \to \infty} 2 \lim_{n \to \infty} (1)^n = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2\sqrt{3} - (\frac{2}{3})^n}{\sqrt{2} + \frac{2}{n^2}}$$

Se trata del límite de un cociente y por tanto se debe tomar el límite, tanto al dividendo como al divisor; en el numerador se ve una suma y en el denominador también; en el numerador hay una constante y un potencia de exponente variable; en el denominador hay una constante y una constante sobre una variable, lo que justifica lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{3}-(\frac{2}{3})^n}{\sqrt{2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left[2\sqrt{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{2\sqrt{3}-0}{\sqrt{2}+0}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

Resultado que racionalizado es igual a $\sqrt{6}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2}{2n^3-3n+1}$$

De acuerdo con los ejercicios anteriores, para hallar el límite se reemplaza la valímible n por ∞ (dar el paso al límite) pues al buscar el límite de una operación, ésta se conserva.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2}{2n^3-3n+1}=\frac{4*\infty^3+3*\infty^2}{2*\infty^3-3*\infty+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

Es lógico pensar en que una suma de infinitos da otro infinito, pero el resultado final $\frac{\infty}{\infty}$ no tiene sentido en matemáticas y recibe el nombre de FORMA INDETERMINADA.

En ocasiones, la indeterminación se puede eliminar por métodos algebraicos, usando un artificio que consiste en transformar la expresión dada dividiendo todos los términos, tanto del numerador como del denominador por la variable que tenga mayor exponente (n^3) en este caso y simplificando antes de dar el paso al límite, así:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2}{2n^3-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^3}{n^3}+\frac{3n^2}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}-\frac{3n}{n^3}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{2-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

Si se vuelve a dar el paso al límite, queda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2}{2n^3-3n+1}=\frac{4+0}{2-0+0}=2$$, que es el límite.

EL LÍMITE DE FUNCIONES REALES

En las sucesiones se ha operado con un tipo especial de funciones de naturales contra reales y se les calculó el límite cuando la variable tiende al infinito natural. Se amplía ahora dicho criterio a funciones de reales contra reales, es decir, se va a extender el conjunto DOMINIO. Estas funciones reciben el nombre de REALES y para calcular su límite se procede de manera análoga a como se hizo con las sucesiones; la diferencia está en que la variable X puede tender a cualquier valor real o a cualquiera de los infinitos.

Para hallar el límite de una función real se empieza por dar el paso al límite, es decir, reemplazar la variable por el valor dado: si el resultado es un valor finito, ese es el límite; si aparece $\frac{\infty}{\infty}$ se trata de la indeterminada a causa del cero, que a veces puede eliminarse buscando la manera de que el factor lineal que anula el divisor aparezca, tanto en el numerador como en el denominador, para poder simplificar antes de volver a dar el paso al límite; si el resultado es ∞, el límite no existe, situación que en ocasiones es aparente y el límite se puede calcular efectuando primero una racionalización, del numerador ó del denominador ó de ambos.

Algunos ejemplos aclaran la situación:

$$\lim_{x \to -4} (4X^2 - 5X + 1) = 4\,(-4)^2 - 5(-4) + 1 = 64 + 20 + 1 = 85$$

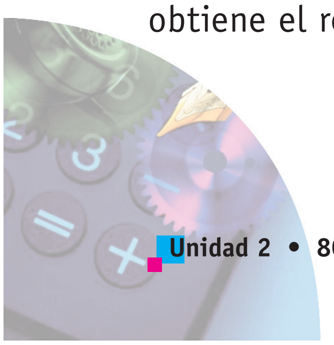
(valor finito y es el límite)

$$\lim_{x \to -1} \frac{2X^5 - 3X^3 + 2x}{X + 8} = \frac{2(-1)^5 - 3(-1)^3 + 2(-1)}{-1 + 8} = \frac{-2 + 3 - 2}{7} = -\frac{1}{7}$$

(valor finito y es el límite)

$$\lim_{x \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$, forma indeterminada a causa de la división por 0.

Como X tiende a 1, el factor lineal que anula el denominador es X-1 y si se logra que aparezca como factor, tanto en el numerador como en el denominador, se simplifica y la indeterminación desaparece; al volver a dar el paso al límite se obtiene el resultado:



$$\lim_{x \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

que es el valor del límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{X + 3} - \sqrt{3}}{X} = \frac{\sqrt{0 + 3} - \sqrt{3}}{0} = \frac{0}{0}$$, indeterminada a causa de la división por 0.

El factor lineal que anula el denominador es X y por tanto se debe buscar la manera de que X aparezca como factor, tanto en el numerador como en el denominador; en este caso se racionaliza el numerador, así:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{X + 3} - \sqrt{3}}{X} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{X + 3} - \sqrt{3})\ (\sqrt{X + 3} + \sqrt{3})}{X\ (\sqrt{X + 3} + \sqrt{3}\ )} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{X + 3 - 3}{X(\sqrt{X + 3} + \sqrt{3}\ )} \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{X + 3} - \sqrt{3}}{X} = \lim_{x \to 0} \frac{X}{X\ (\sqrt{X + 3} + \sqrt{3}\ )} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{X + 3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{0 + 3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

es el límite buscado y se puede racionalizar, quedando $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Guiándome por los conceptos expuestos antes sobre la competencia y ayudándome de los ejercicios resueltos, desarrollamos en el cuaderno los siguientes planteamientos.

No olvidemos que mi aporte individual debe beneficiar a todos los compañeros del subgrupo. Para tal efecto designemos algunas funciones, así: un integrante que modere las discusiones de cada uno de los ejercicios; otro que registre las conclusiones y los demás que tengan una participación efectiva. Así podremos evidenciar un verdadero trabajo en equipo.

1. Analizo las siguientes sucesiones, determinando cuáles de ellas son crecientes, decrecientes, oscilantes, convergentes o divergentes. (Sugerencia: calcular los tres primeros términos y luego hallar a_{1000}, por ejemplo)

   a) $a_n = n + 2$

   b) $b_n = 6 - 12n$

   c) $c_n = 3 / (n+3)$

   d) $d_n = (n^2 - 1)/(n^2 + 1)$

   e) $f_n = (-1)^{2n} * [n/(n+1)]$

2. Usando las propiedades adecuadas, calculo el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n + 3}{n}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n^3 + 3n^2 + 3}{1 + 2n^3}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^{n-1}}{2^{n+1}}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1}\right)$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n + 1}}{n}$

3) Evalúo el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{X - 1}{X^2 + 2x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{X^2 - 4}{X^2 - 3X + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{X - 4}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - X^2}{3 - \sqrt{X^2 + 5}}$

Para afianzar conceptos y encontrar algunas aplicaciones a la idea intuitiva de límite, desarrollo las siguientes cuestiones:

1. Expresiones decimales como 2.333.., 0.454545…son desarrollos decimales periódicos puros, porque empiezan en la posición de las décimas y hay una cifra o grupo de cifras que se repiten. Ese grupo de cifras son el periodo. En la primera expresión el período es 3 y en la segunda es 45. La generatriz es el cociente de donde proviene un desarrollo decimal periódico y en este caso, esa generatriz resulta de escribir el período y dividirlo entre tantos nueves como cifras tiene el periodo. En los ejemplos, las generatrices son $2 + \dfrac{3}{9}$ y $\dfrac{45}{99}$, que simplificadas son $\dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{5}{11}$. Ahora consideremos expresiones como 2.999... y 4.999 que son desarrollos decimales periódicos puros. Si se aplica la regla anterior, queda:

   $2 + 0.999 = 2 + \dfrac{9}{9} = 2 + 1 = 3.$ De forma similar, $4 + 0.999 = 4 + \dfrac{9}{9} = 4 + 1 = 5.$

   Como se ve, no existen dos enteros tales que al dividirlos den un desarrollo decimal con solo nueves en la parte decimal y se nos presenta intuitivamente un paso al límite. Ahora, plantee y desarrolle algunos ejemplos que le permitan afianzar el concepto.

2. Uso la aplicación CABRI para construir un polígono regular de 20 o de 30 lados por ejemplo para que compruebe que el perímetro de ese polígono, cuando el número de lados es muy grande, es la circunferencia.

3. Igualmente, uso micromundos Pro para ordenarle a la tortuga que dibuje una circunferencia, haciendo avances pequeños y girando un ángulo también pequeño, hasta completar un ángulo de una vuelta.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA