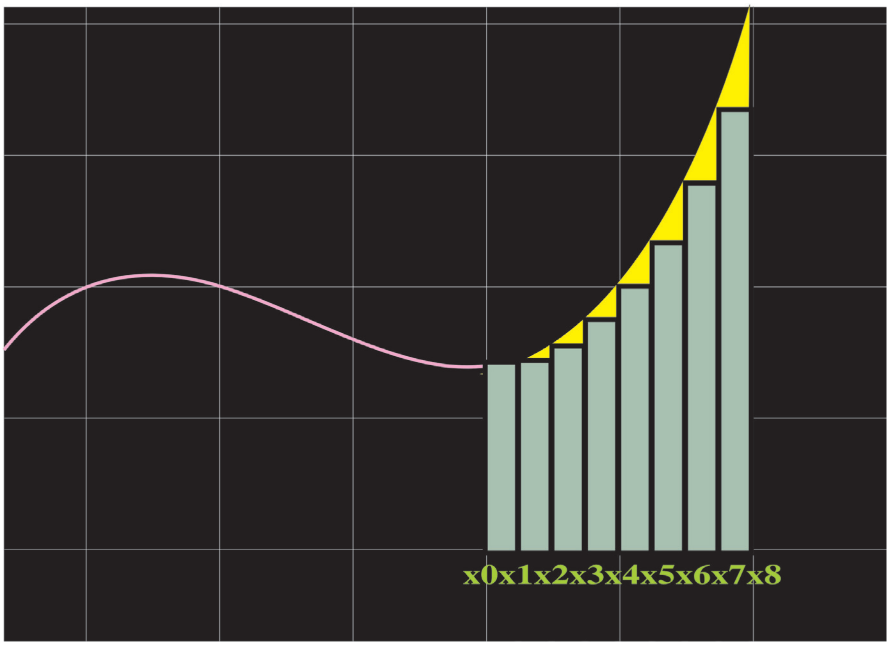
UNIDAD 3

Y EN CÁLCULO ¿QUÉ ES LA DIFERENCIACIÓN?



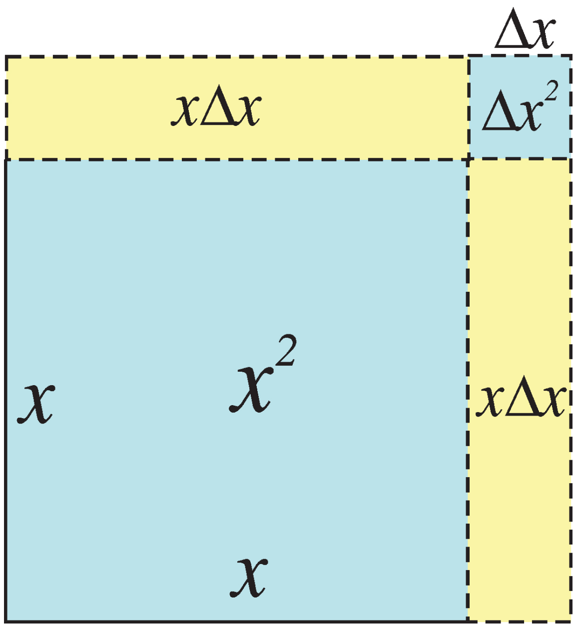
Los rectángulos tienen igual base cuya longitud es x = X1-XO = X2-X1 = ... X8-X7. La génesis del cálculo se remonta a la antigua Grecia, cuando Arquimedes tuvo la genial idea de considerar las áreas como una colección infinita de rectángulos. Pero debieron pasar 2000 años hasta que Cavalieri, matemático italiano, volviera a usar de esa manera los infinitos.

LOGROS DE LA UNIDAD:

- Define el concepto de incremento de una variable y lo utiliza adecuadamente para hallar la ecuación general que permite su cálculo.
- Define el incremento relativo de una función y lo usa para calcular la velocidad media de una partícula cuya ecuación cinemática se conoce.
- Define el concepto de derivada, establece las fórmulas para diferenciar funciones algebraicas y las usa adecuadamente.
- Resuelve problemas en forma acertada y oportuna. (SOLUCIÓN DE PROBLEMAS).
- Dinamiza los conocimientos, habilidades y destrezas de las personas, con el propósito de que interactúen de manera autónoma y generen resultados. (LIDERAZGO).

Guía 1

¿INCREMENTAR ES SINÓNIMO DE AUMENTAR?



Si el cuadrado de lado x se incrementa en Δx, resulta otro cuadrado de lado x+ Δx cuya área es equivalente a la suma de las áreas coloreadas.

INDICADORES DE LOGROS:

- Define y calcula el incremento de una variable.
- Establece y usa correctamente la ecuación general de los incrementos.
- Define y calcula el incremento relativo de una función y lo usa con propiedad para calcular la velocidad media de una partícula cuando se conoce su ecuación cinemática.
- Define la derivada de una función Y=F(x) y por medio de ella la calcula correctamente.
- Identifica problemas, sus causas y consecuencias y establece una definición de éste (SOLUCIÓN DE PROBLEMAS).
- Aporta soluciones y evalúa alternativas.
- Ejecuta en la medida de sus posibilidades, acciones que contribuyen a la solución de problemas detectados.
- Hace seguimiento a la solución de los problemas identificados y realiza retroalimentación.

Antes de iniciar el desarrollo del aspecto matemático de la guía leemos, analizamos y comentamos los siguientes conceptos, relacionados con la competencia laboral general **Solución de Problemas**, que se entiende como "capacidad de identificar adecuadamente un problema, analizando sus síntomas, causas y consecuencias, de forma tal que se pueda definir claramente para entrar de una forma creativa a aportar soluciones alternativas, evaluando la mejor de éstas, ejecutándola y haciéndole seguimiento para determinar su sostenibilidad en el tiempo.

Los problemas consumen tiempo, crean estrés y parece que nunca van a desaparecer. Por ello muchas personas tratan de librarse de ellos lo antes posible. La tendencia natural es seleccionar la primera solución razonable que se nos ocurre y acabar con el problema. Por desgracia, la primera solución no es muchas veces la mejor.

Cuando se tiene bien identificada la causa de un problema, ya se tiene un 50% de la solución de éste.

No siempre se llega a la mejor solución de un problema, sin embargo lo realmente importante es la actitud con que se asume y afronta.

La solución creativa de problemas, implica la práctica de una comunicación efectiva y una toma de decisiones de manera asertiva" (tomado de PROYECTO: "EDUCACIÓN MEDIA, CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO").

A

Ahora, leo, analizo y respondo las siguientes cuestiones relacionadas con conocimientos de matemáticas vistos antes.

Sea $F(x) = 3X^2 - 2X + 4$ Calculo F(1), F(-1), F(0), F(a) y F(a+b); F(a+b) – F(a). Cuando la variable X pasa de 0 a 1, ¿aumenta o disminuye? Y cuando cambia de 1 a -1, ¿aumenta o disminuye? ¿Qué nombre se le podría dar a ese cambio?

Comparo mis resultados con los de otros compañeros y si es preciso refuerzo mis conocimientos en matemáticas. Si en el análisis surgen problemas de comprensión, ¿cómo los resolvería?

B

Leo, analizo y consigno en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde.

Dada una variable V, se define el incremento de V como el cambio que experimenta V al cambiar de un valor inicial V_1 a otro valor final V_2, es decir, incremento de V es igual a $V_2 - V_1$.

De acuerdo con la definición, incrementar no siempre es aumentar, pues una variación puede darse también como una disminución. Simbólicamente:
$\Delta v = V_2 - V_1$ (Se lee «incremento delta v es igual v_2 menos v_1)

Por ejemplo, si V cambia de 2 a 5, $\Delta v = 5 - 2 = 3$; si V cambia de –1 a 6 entonces $\Delta v = 6 - (-1) = 6 + 1 = 7$

Usando la ecuación $\Delta v = V_2 - V_1$ calcule el valor final de la variable V. Para la solución es suficiente despejar V_2, así: $V_2 = V_1 + \Delta v$

LA ECUACIÓN GENERAL DE LOS INCREMENTOS

Sea (1) $Y = F(x)$. Si los incrementos de la variable X y de la función Y son Δx y Δy , respectivamente, los valores finales serán:

(2) $Y + \Delta y = F(X + \Delta x)$. Y si a la (2) le restamos la (1), queda:

(3) $\Delta y = F(X + \Delta x) - F(x)$, que es la ecuación general de los incrementos que permite calcular el incremento de la función a través del valor inicial de la variable y de su incremento.

Por ejemplo: si (1) $Y = X^2 - 3X + 1$, hallar la ecuación general de los incrementos.
(2) $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^2 - 3(X + \Delta x) + 1$ (Incrementando, tanto la variable como la función).

(3) $\Delta y = (X + \Delta x)^2 - 3(X + \Delta x) + 1 - (X^2 - 3X + 1)$ (Restando la (1) de la (2)

(4) $\Delta y = X^2 + 2X\,\Delta x + \Delta x^2 - 3X - 3\,\Delta x + 1 - X^2 + 3X - 1$ (operando)

(5) $\Delta y = \Delta x\,(2X + \Delta x - 3)$ (Reduciendo términos semejantes y factorizando)

Usar el resultado anterior para calcular el incremento Δy de la función cuando la variable X cambia de 1.2 a 2.

Solución: $\Delta x = 2 - 1.2 = 0.8$. Luego: $\Delta y = 0.8[2(1.2) + 0.8 - 3] = 0.16$, que es la respuesta.

EL INCREMENTO RELATIVO DE UNA FUNCIÓN O COCIENTE INCREMENTAL O COCIENTE DE NEWTON

Si en la ecuación general de los incrementos $\Delta y = F(X + \Delta x) - F(x)$ dividimos los dos miembros entre Δx, resulta: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{F(X + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$. El incremento relativo de la función es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, es decir, la razón del incremento de la función al incremento de la variable. Por ejemplo, en la función $Y = X^2$, hallar el incremento relativo cuando X cambia de 1 a 1.2.

Solución: Buscamos la ecuación general de los incrementos:

$Y + \Delta x = (X +)^2$. Luego $\Delta y = ((X + \Delta x)^2 - X^2$. Por tanto:

$\Delta y = X^2 + 2X\Delta x + \Delta x^2 - X^2$, o sea: $\Delta y = \Delta x(2X + \Delta x)$ De aquí:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2X + \Delta x$. Si X cambia de 1 a 1.2 entonces $\Delta x = 1.2 - 1 = 0.2$ y reemplazando:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2(1) + 0.2 = 2.2$, que es el valor del incremento relativo.

Cuando la función es el espacio S y la variable es el tiempo t, el incremento relativo $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ corresponde a una velocidad media.

Por ejemplo: una partícula se mueve de acuerdo con la ecuación cinemática $S = 2t^2 + 5t - 3$, con S en metros y t en segundos.¿Cuál es la velocidad media cuando el tiempo cambia de 1 a 1.2 segundos?.

Solución: $S + \Delta s = 2(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) - 3$. De donde:

$\Delta s = 2(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) - 3 - (2t^2 + 5t - 3)$

$\Delta s = 2t^2 + 4t\ \Delta t + 2\ \Delta t^2 + 5t + 5\ \Delta t - 3 - 2t^2 - 5t + 3$

$\Delta s = \Delta t\ (4t + 2\ \Delta t + 5)$. Luego: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 4t + 2\Delta t + 5$. Por definición:

Velocidad media = $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} 4(1) + 2(0.2) + 5 = 9.4$, o sea, la velocidad media es de $9.4\ \dfrac{m}{seg}$

LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Sea Y = F(X) una función. Se denomina DERIVADA DE LA FUNCIÓN "Y" RESPECTO DE LA VARIABLE "X" al límite del incremento relativo de la función cuando el incremento de la variable tiende a cero. O sea:

$\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (Se lee " la derivada de Y con respecto a X es igual al límite de delta y sobre delta x cuando delta x tiende a cero).

NOMENCLATURA: Para indicar la derivada de una función se escribe:

$\dfrac{dy}{dx}$ $Y' = F'(x)$ (En cualquiera de los casos se lee "derivada de Y con respecto a x).

Ejemplo1: dada la función $Y = X^2 + 3X - 5$, calcule la derivada de la función con respecto de la variable usando la definición anterior.

(1) $Y = X^2 + 3X - 5$ (función dada)

(2) $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^2 + 3(X + \Delta x) - 5$ (Incrementando la (1))

(3) $\Delta y = (X + \Delta x)^2 + 3(X + \Delta x) - 5 - (X^2 + 3X - 5)$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = X^2 + 2X\Delta x + 3X + 3\Delta x - 5 - X^2 - 3X + 5$ (Destruyendo paréntesis)

(5) $\Delta y = \Delta x(2X + 3)$ (Reduciendo y simplificando)

(6) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2X + 3$ (Incremento relativo de la función)

(7) $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (2X + 3) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2X + 3$, aplicando la definición dada antes.

Ejemplo 2: Si $Y = X^3 - X^2 + 4$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$, usando la definición dada.

(1) $Y = X^3 - X^2 + 4$ (Función dada)

(2) $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^3 - (X + \Delta x)^2 + 4$ (Incrementando la (1))

(3) $\Delta y = (X + \Delta x)^3 - (X + \Delta x)^2 + 4 - (X^3 - X^2 + 4)$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = X^3 + 3X^2\Delta x + 3X\Delta^2 x + \Delta^3 x - X^2 - 2X\Delta x - \Delta^2 x + 4 - X^3 + X^2 - 4$ (Destruyendo paréntesis)

(5) $\Delta y = \Delta x(3X^2 + 3X\Delta x + \Delta x^2 - 2X - \Delta x)$(Reduciendo y simplificando)

(6) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3X^2 + 3X\Delta x + \Delta x^2 - 2X - \Delta x$ (Incremento relativo de la función)

$\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (3X^2 + 3X\Delta x + \Delta x^2 - 2X - \Delta x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3X^2 - 2X$ que es la solución.

Ejemplo 3: Si $Y = \dfrac{3}{X}$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$, usando la definición.

(1) $Y = \dfrac{3}{X}$ (función dada)

(2) $Y + \Delta y = \dfrac{3}{X + \Delta x}$ (Incrementando)

(3) $\Delta y = \dfrac{3}{X + \Delta x} - \dfrac{3}{X}$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = \dfrac{3X - 3(X + \Delta x)}{X(X + \Delta x)}$ (Efectuando la operación)

(5) $\Delta y = \dfrac{3X - 3X - 3\Delta x}{X(X+\Delta x)}$ (Destruyendo paréntesis)

(6) $\Delta y = \dfrac{-3\Delta x}{X(X+\Delta x)}$ (Reduciendo)

(7) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{X(X+\Delta x)}$ (Incremento relativo)

(8) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-3}{X(X+\Delta x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{X(X+0)} = -\dfrac{3}{X^2}$ que es la solución.

Ejemplo 4: Si Y = $\sqrt{X}$, hallar Y’ (derivada de Y con respecto a X)

(1) $Y = \sqrt{X}$ (Función dada)

(2) $Y + \Delta y = \sqrt{X + \Delta x}$ (Incrementando)

(3) $\Delta y = \sqrt{X + \Delta x} - \sqrt{X}$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = \dfrac{(\sqrt{X+\Delta x} - \sqrt{X})(\sqrt{X+\Delta x} + \sqrt{X})}{(\sqrt{X+\Delta x} + \sqrt{X})}$ (Multiplicando por $\sqrt{X+\Delta x} + \sqrt{X}$ para racionalizar el numerador de la (3))

(5) $\Delta y = \dfrac{X + \Delta x - X}{\sqrt{X+\Delta x} + \sqrt{X}}$

(6) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{X+\Delta x} + \sqrt{X}}$ (Incremento relativo 9)

(7) $Y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{X+\Delta x} + \sqrt{X}} \Rightarrow Y' = \dfrac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{X}} = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$

que es la solución.

Guiándome por los conceptos expuestos antes y ayudándome de los ejercicios resueltos, desarrollo en mi cuaderno los siguientes planteamientos. Luego observo como allanan estas situaciones mis compañeros para detectar qué problemas pueden surgir y cómo los resolvemos. Para ello tengamos en cuenta no sólo las dificultades en cuanto a la temática, sino también el tiempo y los recursos empleados.

1. Calculo el incremento de la variable que se especifica:

   a) X cuando cambia de 2 a -3

   b) Y cuando cambia de -1.5 a 2.5

   c) M cuando cambia de –4 a –2

   d) Z cuando cambia de –1.1 a -1.2

2. Usando la definición de incremento, hallo el valor final de la variable si:

   a) $V_0 = 3$ y $\Delta v = 1$

   b) $X_0 = -1$ y $\Delta x = -0.1$

   c) $V_0 = X$ y $\Delta v = \Delta x$

   d) $V_0 = Y$ y $\Delta v = \Delta y$

3. Uso la ecuación general de los incrementos para hallar el incremento Δy de la función de acuerdo con las condiciones que se especifican:

   a) $Y = X^2 + 5X - 8$, si X varía de 1 a 1.2

   b) $Y = 8 - 5X^2$, si X cambia de 1.5 a 1

   c) $Y = \frac{1}{X}$, si X cambia de 2 a 2.3

   d) $Y = \sqrt{X}$, si X cambia de 1.4 a 3

4. Calculo el incremento relativo de la función en los siguientes casos:

   a) $Y = 2X - 3$, cuando X pasa de 3.3 a 3.5

   b) $Y = X^2 + 4X$, cuando X cambia de 0.7 a 0.85

   c) $Y = \frac{2}{X}$ cuando X pasa de 0.75 a 0.5

   d) $Y = X^2 + 5X - 8$, cuando X cambia de 1 a 0.8

5. Calculo la velocidad media de los siguientes movimientos (S en metros y t en segundos):

   a) $S = 5t^2$, cuando t varía de 3 seg a 3.5 seg

   b) $S = 3t^2 + 5$, cuando t cambia de 2 seg a 3 seg

   c) $S = 2t^2 + 5t - 3$, cuando t pasa de 2 seg a 5 seg

6. Si un capital inicial de $100.000 se convierte en $110.000 en 3 meses, ¿cuál es el incremento relativo del capital respecto del tiempo?

7. En una ciudad se observó que la población de la misma pasó de 895.000 habitantes a 1.400.000 en 12 años. ¿Cuál es el incremento relativo de la población respecto del tiempo?

8. Usando la definición calculo $\frac{dY}{dx}$ en:

   a) $Y = X^3 - 2x + 4$

   b) $Y = \frac{3}{X} + X$

   c) $Y = 3X^{-2} - X^{-1} + \frac{1}{2}$

D

Para determinar en qué medida he alcanzado los logros propuestos, conscientemente resuelvo y discuto, tanto con mis compañeros como con el profesor, los siguientes problemas que se presentan con mucha frecuencia en el campo laboral, análisis poblacional, etc.

1 De acuerdo con una circular del 18 de enero de 2005 del Ministerio de Protección Social, el salario mínimo legal vigente pasa de \$358.000 a \$381.500 mensuales, apoyándose en un índice de precios al consumidor (IPC) de 5.5 para el 2004 certificada por el Departamento Nacional de estadística.

   a. ¿Cuál es el incremento del salario mensual?

   b. ¿A qué porcentaje corresponde?

   c. ¿Cuál debe de ser aproximadamente el incremento relativo mensual durante el 2005 si se aspira a mantener el porcentaje calculado en b?

   d. Si en su familia se presentan dificultades para equilibrar los egresos con los ingresos, ¿Qué les propondría para solucionar el problema?

2. El DANE en el último censo de población que se realizó en el país, en 1993, calculó para cierta región una tasa de crecimiento de la población del 2% anual. En cierto momento, la población era de 350.000 habitantes y 10 años más tarde era de 500.000.

   a. ¿Cuál fue el incremento relativo de la población?

   b. ¿Se cumplió la meta de crecimiento, estimado en el 2% anual?

   c. Si el crecimiento es muy superior a lo esperado, se puede hablar de explosión demográfica. ¿Qué problemas podrían generarse y que soluciones propondría?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA