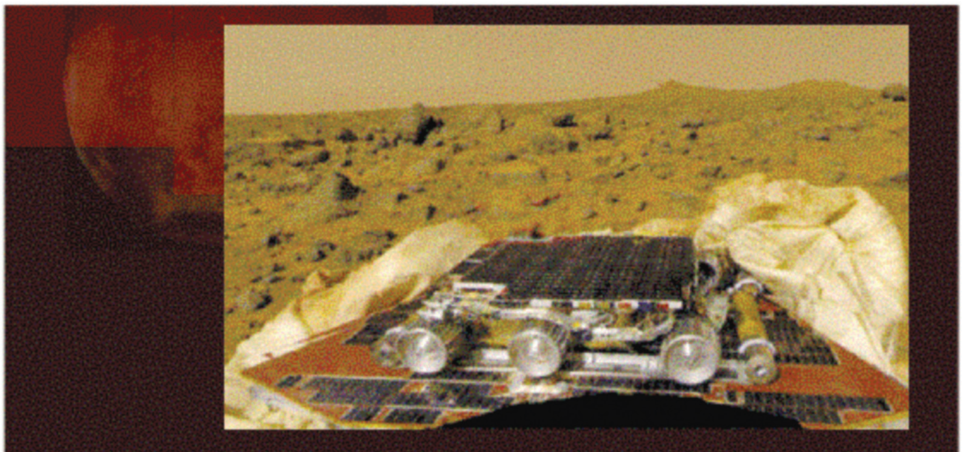
UNIDAD 2

¿QUÉ ES Y CÓMO OPERA LA RELACIÓN FUNCIONAL?



*"**Aquí Marte. Aterrizamos** sin novedad". Primera imagen que transmitió el Pathfinder para avisar que llegó con bien y de paso transmitir la buena noticia de que el lugar de aterrizaje está sembrado de rocas, como esperaban los científicos.*

Así como el robot PATHFINDER construido por la NASA inició la exploración marciana, nosotros también daremos los primeros pasos en el fascinante mundo del cálculo infinitesimal.

LOGROS DE LA UNIDAD:

- Utiliza con propiedad elementos de matemáticas ya estudiados.
- Define una relación matemática y la describe, tanto por extensión como por comprensión y define su dominio y su rango.
- Identifica cuándo una relación es función, bien sea algebraica ó gráficamente.
- Calcula analíticamente el dominio y el rango de relaciones y funciones.
- Define una sucesión, calcula cualquier elemento de ella y usa el resultado para clasificarla.
- Establece y maneja el concepto de límite, tanto de sucesiones como de funciones, establece sus propiedades y las usa para el cálculo del límite (cuando existe).
- Evalúa y compara sus procesos con otros similares para innovar y mejorar. (REFERENCIACIÓN COMPETITIVA).
- Analiza algunos conceptos que refuercen sus relaciones familiares (EJE TEMÁTICO).
- Participa activa, responsable y colectivamente en el logro de objetivos comunes. (TRABAJO EN EQUIPO).

¿LAS RELACIONES SON SÓLO FAMILIARES?

INDICADORES DE LOGROS:

- Define y calcula una relación en A x B.
- Establece y calcula analíticamente el dominio y el rango de relaciones reales sencillas.
- Identifica cuándo una relación es función.
- Analiza instrumentos de evaluación, comparación y selecciona datos para tomar decisiones (REFERENCIACIÓN COMPETITIVA).
- Formula indicadores que permitan medir el desempeño de sus acciones.
- Aplica el ciclo PHVA a procesos de referenciación con otros.
- Reconoce procesos exitosos de otros.
- Identifica las debilidades de sus procesos y los compara con los de otros.
- Aprende y aplica en forma continua las mejores prácticas desarrolladas por otros.
- Asume una posición positiva al cambio, que permite ajustar sus prácticas habituales.
- Refuerza las relaciones familiares al compararlas con el concepto de relación matemática (EJE TEMÁTICO).

Antes de iniciar el desarrollo de la guía, leemos y comentamos lo enunciado a continuación.

Hoy por hoy, la globalización en todos los órdenes nos plantea el reto de ser abiertos al cambio, para tratar de superarnos continuamente, evaluando nuestro desempeño, comparándolo con el de otros y, si es preciso, reconocer que el suyo es más eficiente que el nuestro, procurando apropiarnos de elementos que nos permitan ejecutar nuestras tareas con éxito. Por tal razón, trataremos la competencia laboral general **Referenciación Competitiva** que se entiende como "el proceso de compararse y evaluarse continuamente con otros, para lograr identificar los mecanismos, procedimientos y prácticas que ayuden a tomar acciones para mejorar los desempeños".

"Es una actividad de aprendizaje continuo y se adelanta a través de las etapas del ciclo gerencial básico: Planear, ejecutar, verificar y actuar".

Estemos atentos a los conceptos y actividades que encontremos en la guía, relacionados con esta competencia.

También, tendremos en cuenta conceptos que tienen que ver con el mejoramiento de las relaciones familiares, pues "el hecho de pertenecer a una familia por un largo tiempo, además del grado de intimidad diaria de la que disfrutamos con ella, parecería ser garantía de relaciones armoniosas y estables entre todos sus miembros. Pero la realidad es otra. Las relaciones entre sus distintos miembros, llegan en ocasiones a constituirse en un problema bastante serio y preocupante, cuando no logramos establecer los vínculos afectivos que desearíamos con los demás. El convivir en armonía se ha constituido en todo un arte, que muchos de nosotros no cultivamos, en ocasiones por no considerarlo importante si al fin de cuentas a la familia hay que soportarla y punto; y otras veces por que no estamos dispuestos a destinarle el esfuerzo e interés que demanda una tarea así cuyos resultados quizá no son apreciables ni cuantificables pero que indudablemente van a enriquecer profundamente nuestra vida personal y emocional". (Lic.Pilar Pacheco).

A

Con un compañero leemos, analizamos y respondemos la siguiente situación: Hablando de vestirse, ¿es lo mismo "colocarse las medias y luego los zapatos" que "colocarse los zapatos y luego las medias"?

Escribimos otros ejemplos similares a éste y los discutimos.

Existen en nuestra cotidianidad muchas situaciones en las que deben realizarse acciones cuyo resultado depende del orden en que se ejecuten, similares al planteamiento inicial.

Supongamos que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 5\}$.

Escribo en mi cuaderno el conjunto de pares ordenados (x, y), de modo que las primeras componentes "x" sean elementos de A y las segundas componentes "y" sean elementos de B. Comparo mi respuesta con la de un compañero y la discutimos hasta llegar a un acuerdo. Registramos además los pasos seguidos por cada uno en la solución del ejercicio, para definir cuál fue el más ágil y sencillo.

Si tiene dificultades o no logra resolver la actividad anterior, ¿Qué haría usted?

B

Leo y analizo los siguientes conceptos y consigno en mi cuaderno lo que aparece en el recuadro verde. Si lo requiero, elaboro las gráficas correspondientes. Si encuentro dificultades, busco la manera de allanarlas usando todos los recursos disponibles.

Sean los conjuntos $A=\{1, 2, 3\}$ y $B=\{2, 4\}$. El producto cartesiano entre A y B se define así: $A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \wedge y \in B\}$, que se lee " A cartesiano B" es el conjunto de los pares ordenados (x, y) tales que x le pertenece a A y y le pertenece a B. Para los conjuntos dados el producto cartesiano es:

A x B ={(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}.
B x A ={(2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}. También:

A x A ={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2,2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}, es decir el cartesiano de un conjunto consigo mismo.

Se ve que $A \times B \neq B \times A$

Consideremos ahora los conjuntos:

$M = \{(x, y) / y = x\} \subset A \times B \Rightarrow M = \{(2, 2)\}$

$H = \{(x, y) / y = x + 1\} \subset A \times B \Rightarrow H = \{(1, 2), (3, 4)\}$

$K = \{(x, y) / x > y\} \subset A \times B \Rightarrow K = \{(2, 4), (3, 4)\}$

$L = \{(x, y) / x \neq y\} \subset A \times B \Rightarrow L = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

(Por la izquierda, los conjuntos están descritos por comprensión, es decir, se da la propiedad común que deben cumplir los elementos que lo conforman; por la derecha, los mismos conjuntos están descritos por extensión, o sea, se nombran todos y cada uno de los elementos que lo forman).

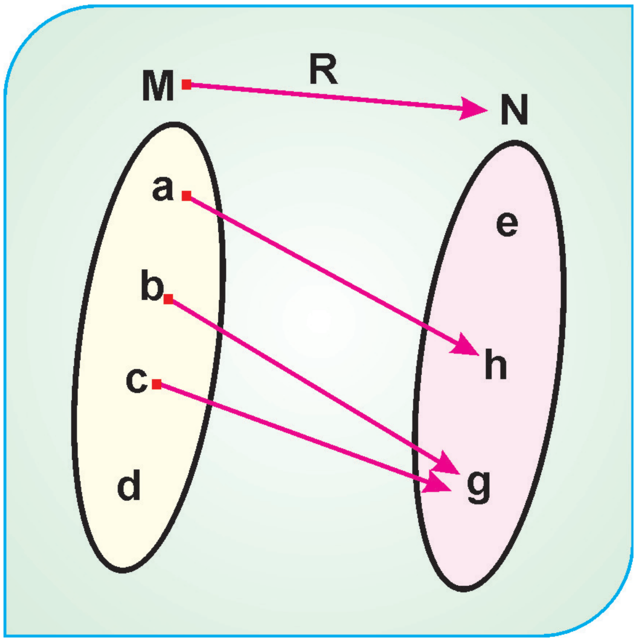
DEFINICIÓN: en matemáticas, una RELACIÓN es un subconjunto de un producto cartesiano. Por ejemplo, M, H, K y L son relaciones definidas en AxB.

DIAGRAMA SAGITAL: a veces conviene representar una relación por medio de flechas o sagitas, así:

En el diagrama, la relación descrita por extensión es R = {(a, h), (b, g), (c, g)}

M es el conjunto de SALIDA; N es el conjunto de LLEGADA.

DOMINIO DE UNA RELACIÓN: es el conjunto de las primeras componentes de las parejas (valores de x), es decir; D_R ={a, b, c} $\subseteq$ M.



CODOMINIO o RANGO DE UNA RELACIÓN: es el conjunto de las segundas componentes de las parejas (valores de y), o sea: C_R ={h, g} $\subseteq$ N.

GRÁFICA CARTESIANA DE UNA RELACIÓN: son los puntos del plano que representan a las parejas que la integran.

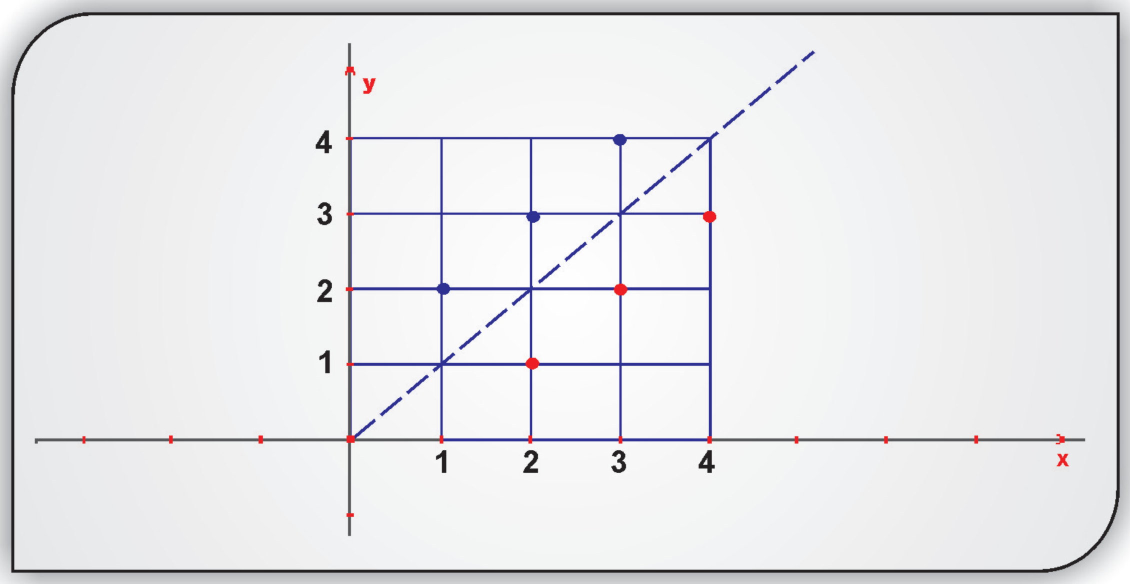
LA RELACIÓN INVERSA: Dada una relación R, su inversa R^{-1} es otra relación que resulta al intercambiar el dominio por el codominio en R y recíprocamente.
Ejemplo 1: R^{-1} ={(h, a), (g, b), (g, c)} es la relación inversa de R.

Ejemplo 2: dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4} y la relación Q ={(x, y) / y = x - 1} $\subset$ A x A, calculemos por comprensión y por extensión su inversa. Igualmente, dibujemos las gráficas cartesianas de las dos relaciones en un mismo sistema coordenado.

Solución: Por extensión Q = {(2, 1), (3, 2), (4, 3)}, D_Q ={2, 3, 4} y C_Q ={1, 2, 3}.

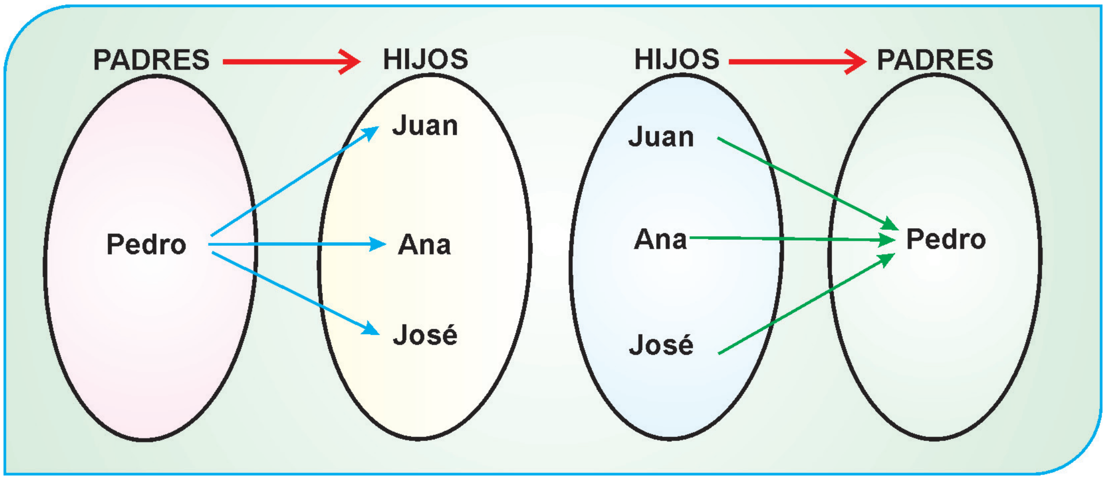
Por comprensión, la relación inversa es Q^{-1} = {(x, y) / x = y - 1}, porque para hallarla basta intercambiar el dominio y el rango: donde está "x" queda "y" y recíprocamente.

Por extensión la inversa es Q^{-1}={(1, 2), (2, 3), (3, 4)}, porque se intercambian el dominio y el rango.



Los tres puntos rojos son la gráfica cartesiana de Q y los tres puntos azules lo son de la relación inversa Q^{-1} . Obsérvese que resultan simétricos respecto de la bisectriz de los cuadrantes I y IV.

Pero, a propósito de la gráfica que encabeza la guía, las relaciones se pueden establecer no sólo en los números reales, sino en varias situaciones de nuestro entorno, como es el caso de las RELACIONES que pueden definirse con “elementos” de nuestra familia, como: “a es el padre de b”, cuya inversa es “b es hijo de a”, cuyas gráficas sagitales son:



Fuera del concepto de relación como "subconjunto de un producto cartesiano", las relaciones familiares deberán ser siempre cordiales, de comprensión, de ayuda mutua, pues la familia es realmente una sociedad en donde cada integrante debe recibir y aportarle a todos los integrantes, de acuerdo a las posibilidades y falencias de cada uno.

CÁLCULO DEL DOMINIO DE RELACIONES EN LOS REALES

Debido a que nuestro interés fundamental es trabajar con el conjunto de los números reales, veremos a continuación algunas relaciones definidas en ellos y que se denominan relaciones reales y que se denotan por R: $\Re \Rightarrow \Re$ (se lee relación R de reales contra reales).

A causa de que en una relación real la variable "Y" se expresa en términos de la variable "X", es preciso determinar los valores que puede tomar la "X" (DOMINIO), para que "Y" tenga un valor real.

Como en los reales están definidas todas las operaciones fundamentales, excepto LA DIVISIÓN ENTRE CERO Y LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES PARES DE REALES NEGATIVOS, para calcular el DOMINIO se expresa "Y" a través de "X" y la expresión resultante se somete a las siguientes preguntas:

1) ¿Hay denominadores variables? Si la respuesta es afirmativa, se tomarán solamente los reales que NO anulen el denominador (NO SE PUEDE DIVIDIR POR CERO), y en el caso contrario se tomarán todos los reales.

2) ¿Hay raíces PARES de elementos variables? Si la respuesta es afirmativa, se tomarán SOLAMENTE los que hagan que el radicando sea un real positivo (NO SE PUEDE SACAR RAÍZ PAR A REALES NEGATIVOS). Finalmente se combinan las dos soluciones parciales para obtener el DOMINIO de la relación.

Ejemplo1: Hallar el dominio de la relación G={(x,y) / 2XY - 3Y + 5 = 0} $\subset$ R x R.

Solución: Despejamos Y : 2XY - 3Y = -5 $\Rightarrow$ Y(2X - 3) = -5 $\Rightarrow$ Y = $\frac{-5}{2X-3}$

1) ¿Hay denominadores variables? Si, porque el denominador es "2X - 3". Como no se puede dividir por cero, hacemos 2X - 3 = 0 y despejamos la variable para obtener X = $\frac{3}{2}$, valor que anula el denominador y por tanto debe descartarse.

Luego, por ahora, el DOMINIO son los reales diferentes de $\frac{3}{2}$.

2) ¿Hay radicales de grado par y radicando variable? No. Por tanto no hay ninguna restricción para los valores que toma "X" en esta pregunta.

   Luego el DOMINIO de G son los reales diferentes de 0, o sea: $D_G = \Re - \{\frac{3}{2}\}$

   Ejemplo2: Hallar el DOMINIO de H =$\{(x, y) / 3X + Y^2 - 3 = 0\} \subset \Re x \Re$

   Solución: despejamos Y: Y = $\pm\sqrt{3 - 3X}$.

1) ¿Hay denominadores variables? No. Por ahora sirven todos los reales.

2) ¿Hay raíces pares de cantidades variables? Si. Como sólo se puede extraer raíz par a reales POSITIVOS, $3 - 3X \geq 0$ y si se resuelve: $X \leq 1$. Por tanto X sólo puede tomar valores en $]-\infty ,1]$. Luego el dominio es el intervalo $]-\infty ,1]$.

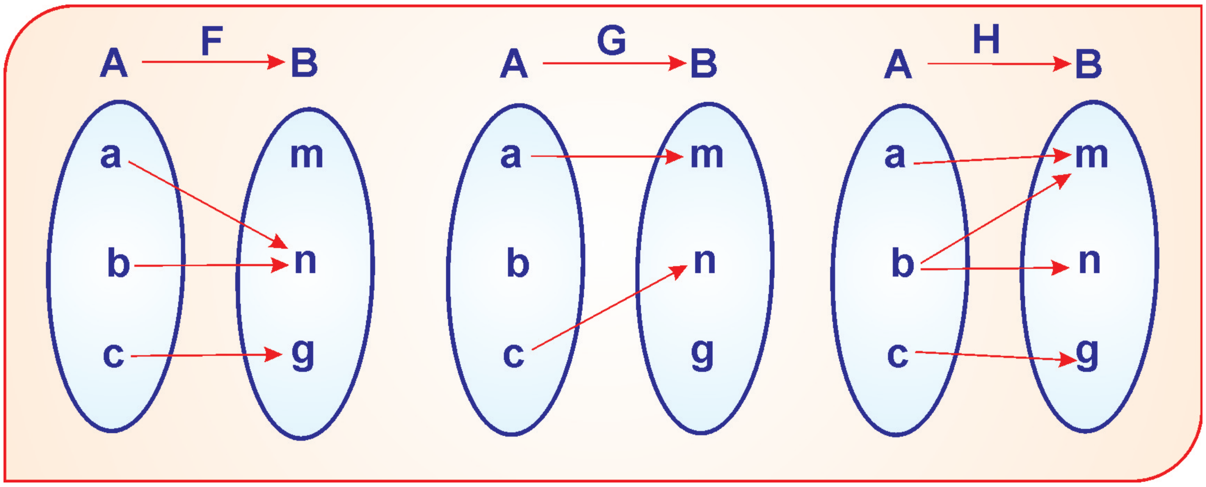
CÁLCULO DEL RANGO DE RELACIONES EN LOS REALES

Para el cálculo del RANGO se procede de manera similar, pero expresando "X" en función de "Y" (despejando X en la relación dada).

Con un compañero, calculamos el RANGO de las relaciones planteadas en los ejemplos anteriores, buscando estrategias que permitan tener éxito.

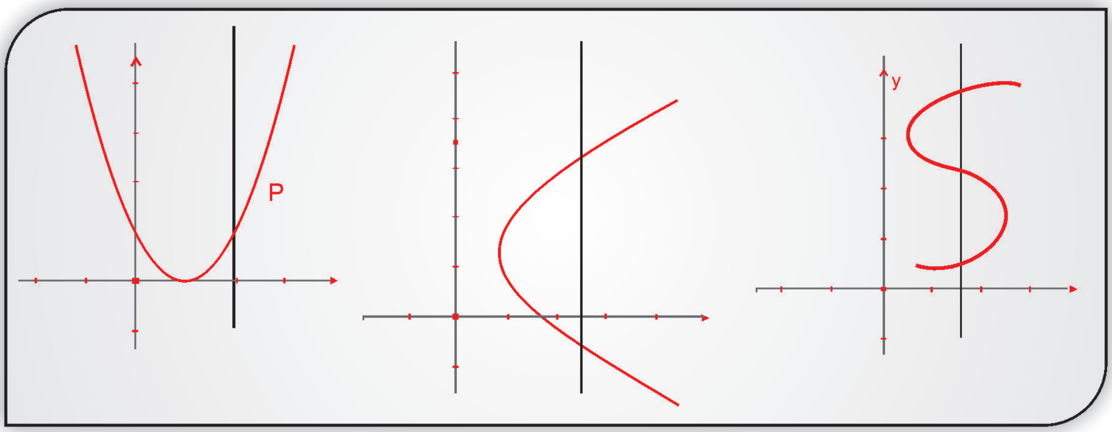
LAS RELACIONES FUNCIONALES O SIMPLEMENTE FUNCIONES

Una FUNCIÓN es una relación en la que se cumplen: 1. El dominio es igual al conjunto de salida; 2. A cada elemento del dominio se le asocia solamente un elemento del conjunto de llegada. O sea: Una relación es FUNCIÓN si todos los elementos del conjunto de salida están relacionados una sola vez con elementos del conjunto de llegada.



En los diagramas sólo es función la F; G no es función porque b ∈ A, pero no está relacionado con algún elemento de B; H tampoco es función porque b ∈ A está relacionado en más de una vez.

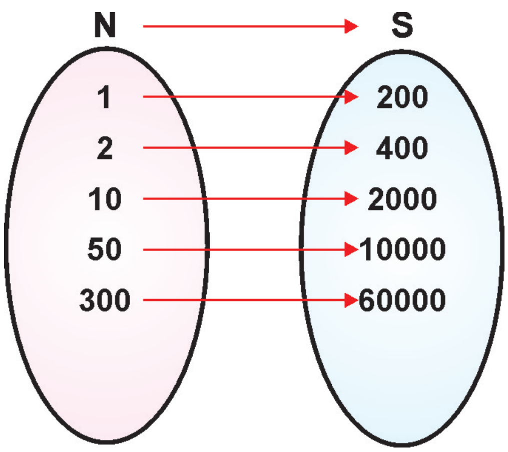
La gráfica cartesiana de una relación también permite decidir si es o no una función: En efecto, si se trata de una relación funcional, cualquier perpendicular al eje de las X sólo puede cortar a la gráfica en un punto.



En las gráficas, la primera es función porque una perpendicular al eje x sólo la corta en un punto; la segunda no es función porque la perpendicular la corta en dos puntos; la tercera tampoco es función por la perpendicular al eje x la corta en tres puntos.

Finalmente, una función es similar a un dispositivo que recibe en su entrada un valor para la variable X, la procesa de acuerdo con una regla preestablecida y entrega un solo resultado Y. Es el caso de la máquina registradora de un supermercado en donde la persona encargada de la caja recibe los artículos, introduce un código y el dispositivo muestra la cantidad de dinero que debe cancelar el cliente.

En la cotidianidad se presentan diversas situaciones que son funciones. Por ejemplo, el salario que devenga una persona recolectora de café depende de los kilogramos de café de buena calidad (maduro, sin pezón) que recoja, de la topografía del terreno..., pues se supone que por cada kilogramo le pagan una cantidad constante de dinero, luego SALARIO = COSTO DE UN KILOGRAMO * NÚMERO DE KILOGRAMOS RECOLECTADOS. Si llamamos "n" al número de kilogramos, S al salario percibido y suponemos que le pagan $200 por cada kilogramo, podemos elaborar un diagrama de Venn-Euler y la función la representamos así:



Como se ve en el diagrama sagital, las posibilidades de tener un mayor nivel de vida dependen de un ingreso suficiente para satisfacer las necesidades básicas. Si en la familia varios miembros trabajan, por equidad todos deberán aportar en la medida de sus capacidades para procurar bienestar a todos los integrantes del núcleo familiar. Para mi entorno, ¿Es esto cierto?; ¿En que medida mi aporte (aunque no sea en dinero) contribuye al bienestar de mi familia?; si tengo fallos en algún sentido, ¿Cómo puedo remediarlos? Tenga en cuenta que el dinero percibido por la labor de recolectar el café depende de la cantidad y de la calidad del grano.

Con la ejercitación verifico mi avance en el aprendizaje. Por tanto, conscientemente intento desarrollar las siguientes actividades en mi cuaderno de apuntes, comparo mis resultados con otros compañeros del subgrupo hasta ponernos de acuerdo. Esta comparación me permitirá identificar los factores de éxito o de dificultades en mi tarea. Presento informe al profesor con el fin de identificar los aspectos en los que debo mejorar.

1. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {4, 5, 6} y las siguientes relaciones definidas en A x B por los enunciados:

F = {(x, y) / X = Y}

G = { (x, y) / X es divisor de Y}

H = { (x, y) / $X \geq Y$}

J = { (x, y) / Y = X^2 }

K = { (x, y) / X = Y - 2

a) Calculo el conjunto solución de cada relación.

b) Determino el DOMINIO y el RANGO de cada una.

c) Elaboro diagramas sagitales para representar cada relación.

d) Defino y calculo la relación inversa para cada caso.

e) Represento en un mismo plano cartesiano tanto la relación como su inversa.

2. Resuelvo el mismo ejercicio pero operando con A x A.

3. Para las siguientes relaciones, calculo el DOMINIO y EL RANGO.

a) $3X^2 + 5Y - 6 = 0$

b) $3y + 4X^2 - 4X + 3 = 0$

c) $2X - Y + 7 = 0$

d) $XY + 2X - 4 = 0$

e) $2X^2 - 5XY + 6 = 0$

4. Sea R: $\Re \Rightarrow \Re$. Indico cuáles de las siguientes relaciones son funciones.

a) R = { (x, y) / $y = +\sqrt{X+1}$ }

b) R = { (x, y) / $y^2 = X - 3$ }

c) R = { (x, y) / X < Y}

d) R = { (x, y) / X + 2 = 0}

5. De las siguientes relaciones digo cuáles son funciones, justificando la respuesta:

a) F: $\mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{N}$, definida por F(x) = X^2

b) G: $\Re \Rightarrow \Re$, definida por G(x) = π

c) H: $\Re \Rightarrow \Re$, definida por H(x) = X^3

d) K: $\mathrm{N} \Rightarrow \mathrm{N}$, definida por K(x) = $X^2 + 1$

e) L: integrantes de mi familia $\Rightarrow$ años, definida por "A cada miembro de mi familia asociarle su edad".

6) Elaboro una lista de las fortalezas que caracterizan las relaciones familiares en mi entorno y describo la manera de fomentarlas. Igualmente, hago una lista de las falencias y planteo estrategias para superarlas.

Sin darnos cuenta, usamos frecuentemente funciones. Por ejemplo, cuando compramos, digamos cuadernos, el valor que se paga es función del número de cuadernos (si los cuadernos tienen un costo igual), o sea:

Valor = costo de un cuaderno * Número de cuadernos.

Luego "valor" es función de Número de cuadernos.

Haciendo un razonamiento similar, menciono algunas funciones que son frecuentes en nuestro entorno e ilustro con diagramas de Venn-Euler, comparto con mis compañeros de subgrupo, hacemos un informe por escrito y lo presentamos al profesor.

Cotejado mi trabajo con el de otros compañeros, identifico el mejor, analizo las razones de su éxito y procuro emular su estrategia.

Respecto de las relaciones familiares, así como se definieron las relaciones "ser padre de" y "ser hijo de" (inversas entre sí), defino dos relaciones más de parentesco con sus respectivas inversas y elaboro los respectivos diagramas sagitales. ¿Cuáles de éstas relaciones son funciones? (Justifico las respuestas y las discuto con mis compañeros de subgrupo y con el profesor).

¿Y DE MI PROYECTO DE VIDA QUÉ?

Hago algunas consideraciones que me permitan identificar cómo está mi familia con relación a otras de mi entorno, teniendo en cuenta número de integrantes, calidad de vida, servicios de salud, dotación de servicios públicos, niveles de educación, convivencia sin sobresaltos, escribo estos resultados, los archivo en mi carpeta personal y los utilizo para mejorar mi proyecto de vida.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA