



<http://www.booksofa.com/tmp/images/el-diablo-de-los-numeros-portada.jpg>

Algunas relaciones entre los números naturales

Indicadores de Desempeño

Conceptual

Clasifica los números naturales en primos o compuestos.

Procedimental

Resuelve algunos problemas que requieren este tipo de relaciones de los números naturales.

Actitudinal

Valora el aporte de los demás compañeros en la construcción de las relaciones entre los números naturales.



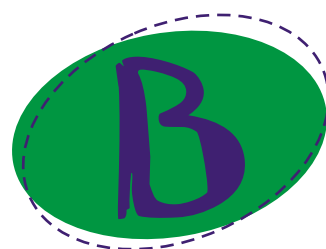
Vivencia

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Realizo una tabla de multiplicar que tenga 10 filas por 10 columnas. Busco cuántas veces aparecen los siguientes resultados: 36, 7, 24, 5, 12 y 15.
2. En la misma tabla, analizo las siguientes situaciones:
 - a. Si se suma el resultado de la multiplicación 3×2 con el resultado de 4×2 , ¿es el mismo de 7×2 ? Argumento mi respuesta.
 - b. Si se suma el resultado de 7×3 con el resultado de 2×3 , ¿es el mismo resultado que se obtiene al multiplicar 9×3 ? Argumento mi respuesta.
3. Respondo: lo ocurrido en las situaciones a y b, ¿sucede en todos los casos? Argumento mi respuesta.
4. Imagino una tabla de multiplicar que en vez de tener 10 filas por 10 columnas, tuviera infinitas filas e infinitas columnas. ¿Cuántas veces aparecería en los resultados de la tabla el número 360?
5. Comparo con mis compañeros el trabajo desarrollado.

TRABAJO EN EQUIPO

6. Comparamos las respuestas de cada situación planteada e invitamos al profesor para compartirle el ejercicio realizado.



Fundamentación Científica

TRABAJO EN EQUIPO

1. Realizamos la siguiente lectura y consignamos en el cuaderno los conceptos más importantes:

Los múltiplos de un número natural

Los múltiplos de un número natural son todos los productos que se obtienen de multiplicar ese número por cada uno de los números naturales.

Algunas características de los múltiplos de un número natural son:

- ✓ El 0 es múltiplo de todos los números.
- ✓ Todos los números naturales son múltiplos de 1.
- ✓ Los múltiplos de un número natural son infinitos.

Ejemplo: los 50 primeros múltiplos del 7 son:

0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, 154, 161, 168, 175, 182, 189, 196, 203, 210, 217, 224, 231, 238, 245, 252, 259, 266, 273, 280, 287, 294, 301, 308, 315, 322, 329, 336 y 343.

Cada uno de los múltiplos se obtuvo de multiplicar por 7 los primeros 50 números naturales. Es decir, $0 \times 7 = 0$, porque cabe 0 veces 7; $1 \times 7 = 7$, porque cabe una vez en el 7; 2×7 , porque cabe 2 veces 7, y así sucesivamente.

Los divisores de un número

Los divisores de un número natural son los números naturales que dividen exactamente al número, es decir, que su residuo es 0. También se puede decir que se es divisor de un número, si decimos que tenemos dos cantidades **a** y **b** que **a** es divisor de **b** si existe un número que al multiplicarlo por **a**, me da como resultado **b**.

Algunas características de los divisores de los números naturales son:

- ✓ El 0 tiene un número infinito de divisores, pero el cero no es divisor de ningún número natural.
- ✓ El número 1 tiene solamente un divisor.
- ✓ Todo número natural es divisor de sí mismo.
- ✓ Los divisores de un número son finitos.

Ejemplos:

- ✓ Los divisores del 60 son: 1, 2, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60.
- ✓ Los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.
- ✓ Los divisores de 73 son: 1 y 73.

Para saber si un número es divisible por otro, se efectúa la división y se comprueba si el resultado es 0. Sin embargo, existen algunas reglas que permiten averiguar si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división.

A estas reglas se les llama "**Crterios de Divisibilidad**".

a. *Divisibilidad por 2*

Un número es divisible por 2 cuando las cifras de las unidades termina en par: 0, 2, 4, 6 y 8.

Ejemplo:

2.400, 238 y 1.024 son divisibles por 2. Porque la cifra de las unidades es par.

b. *Divisibilidad por 3*

Un número es divisible por 3, si la suma de sus cifras nos da como resultado un múltiplo de 3.

Ejemplo:

564 es divisible por 3 porque al sumar $5 + 6 + 4 = 15$ y 15 es múltiplo de 3.

c. *Divisibilidad por 5*

Un número es divisible por 5, si la cifra de las unidades es 0 ó 5.

Ejemplo:

245, 3.800 y 1.000 son divisibles por 5. Porque la cifra de las unidades es 0 ó 5.

d. *Divisibilidad por 10:*

Un número es divisible por 10, si la cifra de las unidades es 0.

Ejemplo:

320, 2.400 y 50 son divisibles por 10. Porque la cifra de las unidades es 0.

e. *Divisibilidad por 4*

Un número es divisible por 4, si la cifra de las decenas y unidades es un múltiplo de 4.

Ejemplo:

528 es divisible por 4. Porque 28 que corresponde a las decenas y unidades es un múltiplo de 4.

f. *Divisibilidad por 6:*

Un número es divisible por 6, si cumple con el criterio de divisibilidad tanto para 2 como para 3.

Ejemplo:

El número 72 es divisible por 6. Porque es divisible por 2 porque es un número par y es divisible por tres porque al sumar sus cifras me da como resultado un múltiplo de 3.

Además de los múltiplos y divisores, podemos clasificar los números naturales entre **números primos y compuestos**.

a. Los *números primos* son los números naturales que tienen sólo dos divisores: el 1 y el mismo número.

Ejemplos:

✓ El 2 es un número primo porque sólo tiene como divisores el 1 y el 2.

✓ El 13 es un número primo porque sólo posee como divisores el 1 y el 13.

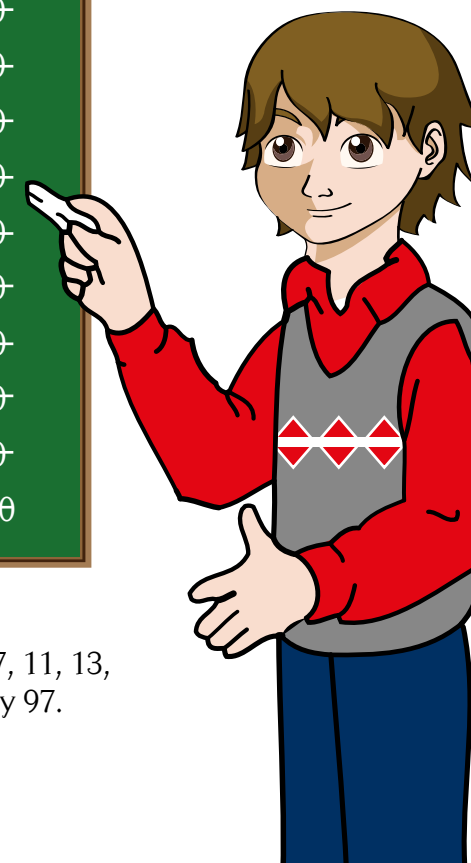
b. Los *números compuestos* son los que poseen más de dos divisores.

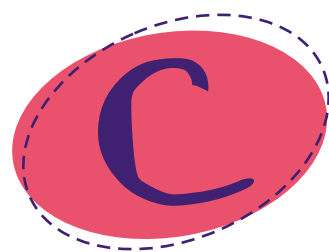
Para determinar los números primos del 1 al 100, se utiliza la **criba de Eratóstenes**.

El método consiste en tachar los números que son múltiplos de otros, iniciamos con el 2 y se tachan todos sus múltiplos luego continuamos con el 3 y tachamos los múltiplos de 3, continuamos de la misma forma y se obtiene lo siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números primos que encontramos del 1 al 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.





Ejercitación

TRABAJO INDIVIDUAL

- Resuelvo los siguientes ejercicios aplicando el concepto de múltiplo:
 - ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 6? 33, 54, 9, 88, 68, 6, 89, 53, 73, 77, 42, 3.
 - Escribo 5 números que sean al mismo tiempo múltiplos de:
 - ✓ 5, de 102 y de 4.
 - ✓ 3 y de 9.
 - ✓ 4 y de 6.
- Resuelvo los siguientes ejercicios, aplicando el concepto de divisor:
 - Escribo todos los divisores de los números:
48 18 21 86
 - Identifico los posibles valores que pueden tener las letras en cada uno de los casos:
 - ✓ el número $2xy31$ es divisible por 3.
 - ✓ $28x75y$ es divisible por 10.
 - ✓ $2x45y$ es divisible por 6.
 - Encuentro los divisores que tienen en común:
 - ✓ el 90 y el 120.
 - ✓ el 24 y el 32.
 - ✓ el 15 y el 50.
 - ✓ el 72 y el 96.
- Determino cuáles de los siguientes números naturales son primos o compuestos: 76, 51, 23, 60, 72, 47, 36, 64, 21, 30, 53, 49.



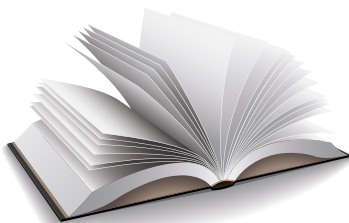
TRABAJO EN EQUIPO

- Consultamos quién fue Eratóstenes y lo consignamos en el cuaderno.
- Elaboremos la criba de Eratóstenes pero del 1 al 200 y determinemos los números primos del 100 al 200.



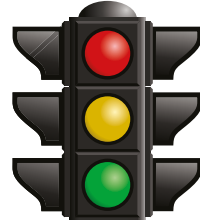
Aplicación

TRABAJO EN EQUIPO

- Apliquemos lo desarrollado en la guía resolviendo las siguientes situaciones:
 - Don Carlos necesita transportar 810 bultos de papa. Para ello, quiere alquilar un carro que requiera menos viajes, las ofertas que tiene son: un camión JVC que transporta 90 bultos por viaje, un Hunday que hace 30 bultos por viaje y un Chevrolet que transporta 81 bultos por viaje. ¿Cuál es el carro que debe alquilar?
 - En el cumpleaños de Laura se iban a repartir 108 bombas de color verde y 324 de color negro entre 12 niños. ¿Cuántas bombas de cada color debe entregar a cada niño? 
 - Cuatro hermanos decidieron repartirse sus ahorros. A cada uno le correspondieron \$65.800. ¿Cuánto dinero habían ahorrado entre los cuatro? 
 - El número de páginas de un libro es mayor que 500 y menor que 600. Si se cuentan de 3 en 3 sobran 2 páginas, de 5 en 5 sobran 4 páginas y de 7 en 7 sobran 6 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro? 
 - Pedro tiene en su tienda los botones empacados en bolsas. En la caja verde tiene bolsitas de 36 botones cada una

y no sobra ningún botón. En la caja roja tiene bolsitas de 16 botones cada una y tampoco sobra ningún botón. El número de botones que hay en la caja verde es igual que el que hay en la caja roja. ¿Cuántos botones como mínimo hay en cada caja?

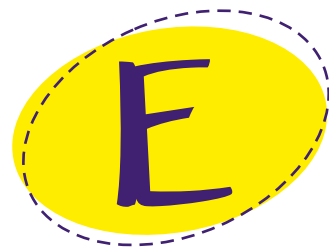
- f. Un semáforo se pone rojo cada 3 minutos y otro cada 5. Si a las tres de la tarde se ponen rojos al mismo tiempo. ¿A qué hora volverán a ponerse rojos los dos a la vez?, ¿cuántas veces se pondrán rojos a la vez en una hora?



- g. Al contar las patas de gallinas y conejos me da 38 y al sumar el número de cabezas me da 11. ¿Cuántas gallinas y conejos se tienen?

TRABAJO INDIVIDUAL

- Formulo 5 situaciones en donde pueda aplicar lo comprendido acerca de los múltiplos y divisores de un número. Los escribo y resuelvo en mi cuaderno.
- Escribo cada uno en una hoja, le entrego cada uno a mis compañeros de grupo para que los resuelvan y soluciono los de mis compañeros.
- Evalúo lo desarrollado por mis compañeros y lo comparo con lo que realicé en mi cuaderno.
- Presento mi trabajo al profesor para que aclare mis dudas.



Complementación

TRABAJO EN GRUPO

- Leemos el siguiente texto y consignamos en el cuaderno los aspectos más importantes:

Todo número se puede descomponer en factores primos. Para ello existen varias técnicas:

- a. *Primera técnica*
Se descompone el número en productos de otros y se continúa así hasta obtener todos los factores números primos

Ejemplo:

$$180 = 18 \times 10$$

$$180 = (6 \times 3) \times (2 \times 5) \text{ ahora buscamos factores para 18 y 10.}$$

$$180 = 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 \text{ ahora buscamos factores para 6.}$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \text{ llegamos a factores primos y ordenamos los factores.}$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \text{ escribimos como potencia los factores que se repiten (2 x 2 = 2^2 y 3 x 3 = 3^2)}$$

- Descomponemos los siguientes números con la primera técnica hasta llegar a sus factores primos y, si es posible, expresamos como potencia:

2.310 176 475 1.408 43

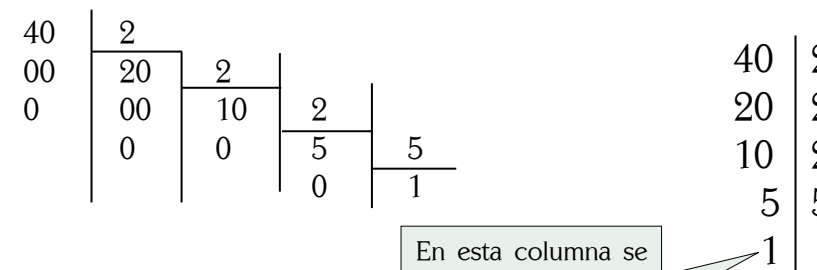
- Continuemos leyendo y escribiendo los aspectos más importantes en el cuaderno:

- b. *Segunda técnica*

Consiste en aplicar los criterios de divisibilidad que se refieren a los números primos. Para ello, se realizan dos columnas, en la primera se colocan los cocientes que se van obteniendo y en la segunda columna, se colocan los divisores que son números primos.

Ejemplo:

En esta parte te mostramos las divisiones que tienes que hacer mentalmente para hacer la segunda técnica en ese arreglo de dos columnas.



En esta columna se coloca los divisores que son los números primos.

En esta columna se coloca los cocientes que se obtiene.

Se obtuvo que $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Al escribir como potencia $2^3 \times 5$

4. Aplicamos la segunda técnica de descomposición en factores primos, en los siguientes números:

36 84 48 135

5. Continuamos con la lectura, teniendo en cuenta consignar los aspectos más importantes:

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.)

Hallar el mínimo común múltiplo de varios números naturales es un proceso que requiere manejar tres ideas:

- Hallar los múltiplos de cada uno de los números.
- Determinar los múltiplos comunes de cada uno de los números.
- De esa lista seleccionar el menor.

El mínimo común múltiplo se simboliza m.c.m.

Ejemplo:

Determinar el mínimo común múltiplo de 12 y 18.

- a. Realizamos la lista de múltiplos

Números	Múltiplos
12	12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144,...
18	18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180,...

- b. Realizamos la lista de los múltiplos comunes del 12 y 18 se tiene: 36, 72, 144,...
- c. De esos seleccionamos el menor que es el 36. Por tanto, el m.c.m. de 12 y 18 es 36.

Otra forma de hallar el mínimo común múltiplo es determinando los factores primos. Estudiemos el ejemplo:

Caso 1

Si quisiéramos saber cuál es el m.c.m. de 24 y 36.

Descomponemos cada una de las cantidades en sus factores.

$$24 = 3 \times 2^3 \qquad 36 = 3^2 \times 2^2$$

Luego, tomamos todos los factores que aparecen entre ambos y seleccionamos los que tienen mayor exponente. Por tanto, se tiene que los factores de ambos son 2 y 3, seleccionamos para 2 el exponente 3 y para 3 el exponente 2, multiplicamos esas potencias quedando:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^2 &= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \\ &= 8 \times 9 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Luego el m.c.m. de 24 y 36 es 72.

Caso 2

Si queremos saber cuál es el mcm de 12 y 8: $12 = 2^2 \times 3$ $8 = 2^3$

Elegimos los factores comunes y no comunes elevado al mayor exponente, por lo tanto elegimos 2^3 y el 3. Multiplicando las potencias así:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3 &= (2 \times 2 \times 2) \times 3 \\ &= 8 \times 3 \\ &= 24 \end{aligned}$$

6. Encontremos el m.c. m. de las siguientes parejas de números, utilicemos las dos formas explicadas:
- El m.c.m. de 64 y 100.
 - El m.c.m. de 32 y 48.
 - El m.c.m. de 25 y 36.
 - El m.c.m. de 2 y 3.
7. Continuamos con la lectura:

Máximo Común Divisor (m.c.d.)

Hallar el máximo común divisor de varios números naturales es un proceso que requiere manejar tres ideas:

- Hallar los divisores de cada uno de los números.
- Determinar los divisores comunes de cada uno de los números.
- De esa lista seleccionar el de mayor valor.

El máximo común divisor se simboliza m.c.d.

Ejemplo:

Determinar el máximo común divisor de 12 y 18.

- a. Realizamos la lista de divisores:

Números	Divisores
12	1, 2, 3, 4, 6 y 12
18	1, 2, 3, 6, 9 y 18

- b. Realizamos la lista de los divisores comunes del 12 y 18 se tiene: 1, 2, 3 y 6.
- c. De esos seleccionamos el mayor que es el 6. Por tanto, el m.c.d. de 12 y 18 es 6.

Así como se realiza con el mínimo común múltiplo se puede con el máximo común divisor de calcularlo a través de los factores primos. Estudiemos el ejemplo:

Evaluación por competencias

1. Existen algunos números entre 1 al 100 que tienen más de 10 divisores. De las siguientes parejas de números, ¿cuáles seleccionarías?

- A. 60 y 72.
B. 24 y 48.
C. 30 y 98.
D. 76 y 81.

1

2. Al descomponer en factores primos el número 216, se obtiene:

- A. $2^3 \times 3^2$
B. $2^2 \times 3^2 \times 7$
C. $2^3 \times 3^3$
D. $2^2 \times 3^2 \times 5$

2

3. Un comerciante tiene 108 chokolatinas y 81 dulces y debe empacar la misma cantidad en cada caja. Por caja debe empacar:

- A. 2 unidades.
B. 4 unidades.
C. 27 unidades.
D. 9 unidades.

3

4. La máquina A produce 15 cajas y la máquina B produce 36 cajas por hora. Si las máquinas se ponen al mismo tiempo, la cantidad de cajas que coinciden por primera vez ambas máquinas es:

- A. 0
B. 3
C. 180
D. 675

4

- d. Determinemos el m.c.d. de 45 y 36.

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

Luego, tomamos todos los factores comunes entre ambos y colocamos los que tienen menor exponente. Por tanto, se tiene que el factor común es 3 y el menor exponente es 2. Por tanto:

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

Luego, el m.c.d. de 45 y 36 es 9.

8. Encontramos el m.c.d. de las siguientes parejas de números, utilicemos las dos formas explicadas :
- El m.c.d. de 21 y 48.
 - El m.c.d. de 35 y 14.
 - El m.c.d. de 6 y 20.
 - El m.c.d. de 12 y 24.
9. Le preguntamos al profesor si solucionamos bien las actividades.

5. Del siguiente grupo de números, ¿cuáles de ellos son divisibles por 2, por 5 y por 10?

- A. 50, 25, 30, 70
- B. 20, 40, 50, 60
- C. 15, 30, 45, 75
- D. 20, 40, 60, 80

5

Glosario

- **Divisibilidad:** Calidad que poseen los números de dividirse en partes iguales.
- **Divisores:** Cantidad por la cual una cantidad se divide en otra.
- **Máximo común divisor:** El mayor de los divisores comunes de dos o más cantidades.
- **Mínimo común múltiplo:** El menor de los múltiplos de dos o más cantidades.
- **Múltiplos:** Es un número o una cantidad que contiene exactamente a otra varias veces.